This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

L Soc 3983.6

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VI.

ad Annum MDCCLVI. et MDCCLVII.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

c. MDCCLXI.

LSoc 3983.6

HARVARD UNIVERSITY LIBRARY

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS VI.

MATHEMATICA.

I.

Methodus inueniendi infinitas curuas iſoperimetricas communi proprietate praeditas.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Quaeſtio hic non parum ardua euoluitur, qua intra datos terminos infinitae lineae curuae, vel eiusdem longitudinis, vel alia quadam proprietate communi praeditae, requiruntur. Occaſionem huius inueſtigationis ſuppeditauit famoſiſſimum illud problema Iſoperimetricum, quo inter omnes lineas, quas quidem intra datos terminos concipere licet, quae vel ſint eiusdem longitudinis, vel alia quadam communi proprietate gaudeant, eam determinari oportet, quae vel maximam aream includat, vel alia quadam maximi minimiue proprietate reliquis antecellat. Hic igitur manifeſto aſſumitur, dari vtique intra propoſitos terminos infinitos ductus curuilineos, quo omnes ſint eiusdem longitudinis, vel aliam quandam proprietatem habeant communem, quod quidem minime eſt dubium, cum quaeſtio non ſolum circa lineas curuas continuas, ſed etiam diſcontinuas, ſeu quocunque manus ductu deſcribendas, verſetur. Veluti ſi intra datos duos ter-

a 3 minos

minos arcus circularis proponatur, non ſolum innumerabiles aliarum curuarum continuarum arcus intra eosdem terminos aeque longi aſſignari poſſunt, ſed ſi etiam tractus curuilinei irregulares admittantur, eorum numerus multo magis in infinitum augetur. In problemate quidem iſoperimetrico non opus eſt hos tractus curuilineos omnes noſſe, ſed methodus ſingulari artificio ita eſt comparata, vt inter eos omnes, etiamſi ſint ignoti, is cui maximi minimiue quaedam proprietas conueniat, inueſtigari poſſit: electionem ſcilicet inſtituere licet, etiamſi omnes res, inter quas eſt eligendum, neutiquam ſint cognitae, quod certe inſigni noſtro commodo accidit; ſi enim ad hanc electionem requireretur, vt omnes lineae illae eiusdem longitudinis eſſent perſpectae, plurimum adhuc a ſolutione iſtius pulcherrimi problematis, quod nomine iſoperimetrici innotuit, eſſemus remoti. Interim tamen haec ſpeculatio, qua intra datos terminos infinitae quaeruntur lineae curuae, quae vel omnes longitudine ſint aequales, vel alia quadam communi indole praeditae, maxime eſt notatu digna, cum ob alios vſus in Geometria ſublimiori haud contemnendos, tum vero praecipue, quod haec ipſa inueſtigatio maximis difficultatibus eſt obnoxia. Iam olim enim Geometrae ingenti ſtudio in hoc elaborauere, vt propoſita linea curua alias eiusdem longitudinis explorarent; neque tamen ipſis ſcopum attingere licuit. In hac autem diſſertatione Cel. Auctor omnia huiusmodi problemata feliciſſimo ſucceſſu reſoluit, idque ope methodi omnino ſingularis, quam quaſi methodo Diophanteae analogam, iam pridem in

Analyſin

Analyſin ſublimiorem introduxerat, eiusque iam plurima inſignia ediderat ſpecimina.

II.

De integratione aequationis differentialis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$.

Auctore Leon. Eulero. p. 37.

In hac diſſertatione et nonnullis ſequentibus, quibus ſimile argumentum pertractatur, quaſi nouus plane campus in Analyſi aperitur, integralia diuerſarum formularum, quae per ſe omnem integrationis ſolertiam reſpuunt, inter ſe comparandi. Cum enim ope notae comparationis angulorum relatis inter binas variabiles x et y huic aequationi differentiali $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ conueniens algebraice exhiberi queat, et ſi vtraque formula per ſe algebraice integrari nequit, ſed angulum, ſeu arcum circularem, exprimit; haec relatio ex eo tantum fonte petita videtur, quod angulorum datam et quidem rationalem rationem tenentium ſinus algebraice inter ſe comparari poſſunt. Neque talis comparatio locum habere videtur, niſi ambae formulae, ſiue per angulos, ſiue per logarithmos, integrari queant. Quoties quidem ſolutio cuiusquam problematis ad huiusmodi aequationem differentialem $X\,dx = Y\,dy$, in qua X ſit functio ipſius x, et Y ipſius y tantum perducitur, ea, quia variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, tan-

quam

quam penitus abſoluta ſpectari ſolet, cum ope quadraturae duarum curuarum, quarum alterius area per $\int X\,dx$, alterius per $\int Y\,dy$ exprimitur, conſtrui poſſet. Verum ſi pro dato quouis valore ipſius x, valor ipſius y conueniens aſſignari debeat, id vtramque quadraturam inuoluere videtur, ſine qua relatio inter x et y minime exhiberi queat. Multo magis igitur mirum videbitur, cum talis formulae $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ integrale, neque per angulos, neque per logarithmos, exprimi poſſit, quae quantitates tranſcendentes ad comparationem ſolae idoneae putantur, nihilominus pro aequatione differentiali propoſita relationem inter x et y algebraice exhiberi poſſe; ita vt linea curua, cuius arcus indefinite hac formula integrali $\int \frac{dy}{\sqrt{(1-z^4)}}$ exprimitur, pari proprietate, ac circulus, ſit praedita, vt ſcilicet omnes eius arcus inter ſe comparari, ſeu, propoſito in eo arcu quocunque, alius arcus, qui ad eam datam teneat rationem, geometrice aſſignari queat. Vel quod eodem redit, aequatio integralis aequationis differentialis propoſitae, quae veram relationem inter x et y exprimit, non ſolum non tale integrale inuoluet, ſed adeo erit algebraica.

Atque hoc quidem non tantum pro caſu quodam particulari, verum adeo integrale completum, quod quantitatem conſtantem arbitrariam complectitur, erit algebraicum. Neque vero talis admiranda integratio in ipſa tantum aequatione differentiali locum habet: ſed ſimili omnino modo Cel. Auctor oſtendit hanc aequationem differentialem multo latius patentem $\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}}$ per aequationem algebraicam complete inte-

integrari poſſe, ſi modo numeri m et n ſint rationales; quin etiam eandem integrandi methodum ad hanc aequationem multo generaliorem extendit:

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}$$

vbi in denominatoribus radicalibus omnes poteſtates ipſarum x et y ad quartam vsque occurrunt. Hinc ſuſpicari liceret, etiamſi hae poteſtates altius aſcenderent, integrationem tamen algebraicam adhuc locum eſſe habituram: ſed praeterquam quod methodus Auctoris in ipſa poteſtate quarta terminatur, facile oſtendi poteſt, in poteſtate certe ſexta algebraicam integrationem in genere excludi. Si enim coefficientes ita accipiantur, vt radix quadrata extrahi queat ex hoc ſolo caſu: $\frac{m\,dx}{1+x^2} = \frac{n\,dy}{1+y^2}$, euidens eſt, relationem inter x et y nequaquam algebraice exprimi poſſe, cum vtriusque formulae integrale, tam angulum, quam logarithmum, inuoluat; anguli autem et logarithmi certe inter ſe algebraice comparari non patiuntur. Interim tamen peculiari modo integratio huius quoque aequationis: $\frac{m\,dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4+Dx^6)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4+Dy^6)}}$ algebraice exhibetur, vnde patet, hanc diſſertationem multo plures inueſtigationes continere, quam titulus quidem prae ſe ferre videtur.

III.

Obſeruationes de comparatione arcuum curuarum irrectificabilium.

Auctore Leon. Eulero p. 58.

Haec Diſſertatio ex eodem fonte eſt petita atque antecedens. Vtraque enim innititur methodo formulas integrales, quae neque algebraice, neque per angulos, vel logarithmos, expediri queant, algebraice inter ſe comparandi. Methodus autem ipſa, qua totum hoc negotium conficitur, ita eſt comparata, vt non data opera ſit inuenta, ſed potius fortuito quaſi detecta, ex quo cum ad inuentiones alias abſtractiſſimas perduxerit, maxime digna videtur, vt omni ſtudio vberius excolatur. In ſuperiori quidem diſſertatione hoc iam eſt praeſtitum, vt omnium curuarum, quarum arcus indefinite huiusmodi formula integrali $\int \frac{a\,dz}{\sqrt{(A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4)}}$ exprimuntur, arcus quicunque inter ſe comparari, ac dato arcu quouis alii arcus ad eum datam rationem tenentes geometrice aſſignari queant, ſimili omnino modo quo arcus circulares inter ſe comparari ſolent. Tali autem proprietate gaudet curua lemniſcata vocari ſolita, cuius arcus indefinite hac formula $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ exprimitur, huiusque arcuum comparatio in hac diſſertatione prolixius explicatur. Praeterea vero Cel. Auctor inueſtigationes ſuas ad arcus ellipticos et hyperbolicos extendit, in quo noua omnino vis illius methodi cernitur, cum rectificatio ellipſis et hyperbolae nullo modo ad formulam integralem ante commemoratam reuocari poſſit. Neque vero

vero etiam in his curuis comparatio arcuum, vti in circulo, inſtitui poteſt: ſed, quod iam pridem in arcubus parabolicis eſt factum, id nunc etiam iſtius nouae methodi beneficio in ellipſi et hyperbola praeſtatur. Scilicet dato in altera curua arcu quocunque a puncto etiam dato ſemper alius arcus in eadem curua abſcindi poteſt, cuius ab illo differentiam geometrice aſſignare liceat: tum vero etiam negotium ita confici poteſt, vt non ipſorum arcuum, ſed quorumuis eorum multiplorum differentia fiat geometrice aſſignabilis, idque ita, vt arcus quaeſitus a dato puncto incipiat. Omiſſa autem hac conditione, vt arcus quaeſitus in dato puncto terminetur, effici poteſt, vt differentia vel ipſorum arcuum, vel quorumdam multiplorum eorundem euaneſcat, ſicque arcus aſſignari queant, qui abſolute datam inter ſe teneant rationem. Atque hinc iſtud problema maxime notatu dignum reſolui poteſt, quo datus quicunque arcus, ſiue ellipticus, ſiue hyperbolicus, ita ſecari iubetur, vt partium differentia geometrice aſſignabilis euadat. Sub finem animaduertit Auctor, quam inſignia incrementa in Analyſi infinitorum hinc expectari queant, cum inde eiusmodi aequationum differentialium, quae nulli alii methodo cedant, intergralia adeo algebraica aſſignari poſſint.

IV.

De problematibus indeterminatis, quae videntur plus quam determinata.

Auctore Leon. Eulero p. 85.

Argumentum huius diſſertationis omnino eſt nouum, atque inſignem promotionem analyſeos indeterminatae, quae vulgo methodus Diophantea appellari ſolet, polliceri videtur, ſiquidem ſummi *Euleri* veſtigia premendo omni ſtudio vberius excolatur. Primum autem accuratius hic definitam cernimus indolem problematum indeterminatorum, qualia quidem Diophantus pertractavit, quae vulgo perperam innumerabiles ſolutiones admittere videntur. Natura ſcilicet cuiusque quaeſtionis ex ſua ipſius indole potius, quam ex ſolutione, quae initio nondum conſtant, diiudicari debet. Ita dantur quaeſtiones nullam plane ſolutionem admittentes, quae tamen nihilominus ad indeterminatas ſunt referendae; veluti ſi quaerantur duo cubi, quorum ſumma ſit cubus, vel quatuor quadrata, in arithmetica progreſſione. Poſtquam enim diu multumque in his ſoluendis fuerit elaboratum, tum demum agnoſcimus, nullam ſolutionem dari, quod autem non impedit, quo minus iſtiusmodi quaeſtiones pro indeterminatis habeantur. Simili modo dantur etiam eiusmodi quaeſtiones indeterminatae, quae plures vna ſolutiones non admittunt, veluti ſi quaeratur cubus, qui vnitate auctus efficiat quadratum. Melius ergo problemata indeterminata ita definiuntur, vt dican-

dicantur circa numeros rationales tantum, ac ſaepe numero integros tantum verſari. Ita ſi quaeri debeant duo biquadrata, quorum ſumma faciat quadratum, quaeſtio omnino eſt huius generis, cum radix quadrata ex ſumma biquadratorum debeat eſſe numerus rationalis, etiamſi ſolutio ipſa ſit impoſſibilis. Saepe numero plures conditiones ſimul proponi ſolent, veluti ſi quaerantur tres eiusmodi numeri, vt binorum productum, ſi tertio addatur, faciat quadratum, vbi vtique tribus conditionibus eſt ſatisfaciendum; hocque adeo infinitis modis praeſtari poteſt. Sin autem inſuper noua conditio adiiciatur, ſine dubio numerus ſolutionum reſtringetur, atque adeo interdum fit impoſſibilis. Veluti ſi quaerantur duo quadrata, quorum ſumma ſit quadratum, id vtique infinitis modis fieri poteſt, at adiecta inſuper hac conditione, vt etiam eorundem quadratorum differentia ſit quadratum, quaeſtio ſubito fit impoſſibilis. Ita pleraque problemata, quae Diophantus tractauit, ita ſunt comparata, vt noua adiecta conditione fiant impoſſibilia, hocque caſu plus quam determinata vocari ſolent. Nunc igitur Cel. Auctor oſtendit, infinita dari huiusmodi problemata, quibus et ſi adiiciantur non vna, ſed plures nouae conditiones, ſolutionum tamen numerus re vera maneat infinitus. Neque vero putandum eſt, tales conditiones pro lubitu adiici poſſe, ſed eas certo modo ad ipſam quaeſtionis indolem adſtrictas eſſe oportet, alioquin certo plus quam determinata eſſent euaſura. Ita in quaeſtione memorata de tribus numeris, vt binorum productum tertio additum faciat quadratum, inſuper hae conditiones adiici poſſunt, vt binorum pro-

ductum ſummae eorundem binorum additum faciat quadratum, quae tres nouae conditiones adiectae non impediunt, quo minus adhuc innumerabiles ſolutiones locum habeant. Si praeterea poſtuletur, vt etiam ſumma productorum ex bino fiat quadratum, quaeſtio adhuc infinitas ſolutiones admittit, neque ſolutionum numerus minuitur, ſi inſuper ſumma ipſorum numerorum ſummae productorum ex binis adiecta quadratum efficere debeat; quin etiam Auctor oſtendit, plures adhuc conditiones adiici poſſe, manente ſolutionum numero infinito. Tales quaeſtiones, niſi conditiones certa lege inter ſe eſſent connexae, quae connexio autem in ipſa propoſitione non perſpicitur, merito tanquam plus quam determinatae reiiciendae videntur, ac temere quisquam earum ſolutionem ſuſciperet, antequam probe perſpexerit, ſimul atque aliquibus certo modo ſatisfecerit, reliquis omnibus ſponte ſatisfieri. In Diophanto adeo iam eiusmodi quaeſtiones reperiuntur, quarum ſolutionem ex certis porismatibus deriuauit, quorum vim commentatores minus agnouerunt. Hoc ergo argumentum ſollicite hic euoluitur, ac non ſolum porismata, quibus Diophantus eſt vſus, dilucide explicantur et ex ſimpliciſſimis principiis deducuntur, ſed etiam indidem multo abſtruſiora eliciuntur, quorum beneficio innumerabiles quaeſtiones, quae alioquin omnes analyſeos vires ſuperare videantur, facili negotio reſolui queunt.

V.

De expreſſione integralium per factores.

Auctore Leon. Eulero p. 115.

Quemadmodum omnis generis integralia, quarum integrationem abſolute perficere non licet, per ſeries infinitas euolui ſolent, quae ſi fuerint conuergentes, ad vſum aeque ſunt accommodatae, ac ſi integratio in poteſtate fuiſſet, atque adeo ſaepe numero multo maiorem vſum praeſtant: ita iam pridem Geometrae agnouerunt, haud minoris vtilitatis fore, ſi eadem integralia per producta ex infinitis factoribus exprimi poſſent, vſumque adeo praeſtantiorem eſſe futurum, ſi logarithmis fuerit vtendum. Verum talis conuerſio ad pauciſſimos caſus eſt adſtricta: neque enim in aliis formulis integralibus locum habet, niſi quae in altera harum formularum $\int x^m dx(1-x^n)^k$ et $\int \frac{x^m dx}{(1-x^n)^k}$ ſint contentae, neque etiam in his formulis negotium in genere ſuccedit, ita vt pro quouis valore ipſius x valor integralis per eiusmodi productum exprimi queat, ſed tantum ad eum caſum limitatur, quo in priori formula ſtatuitur $x=1$, in poſteriori vero $x=\infty$. Hi autem caſus etiam calculo prae reliquis ita excellunt, vt eorum vſus ſit ampliſſimus, et pulcherrima ſubſidia pro tota analyſi inde deducantur. Hoc igitur argumentum tametſi Cel. Auctor iam olim pertractauerit, hic

denuo

denuo reſumit, atque ex principiis multo clarioribus formationem illorum productorum in infinitum excurrentium docet. Primum quidem elegantem harum formularum transformationem exponit, indeque caſus, quibus eae ſunt algebraice, vel abſolute, integrabiles, facili negotio expedit. Caeterum hic monendus eſt lector, ob calculos maxime intricatos nonnullos errores typographicos irrepſiſſe v. g p. 124. et ſeqq. frequenter litteram i cum vnitate 1. itemque litteram graecam $\varkappa$ cum latina x eſſe permutatam: cum autem hanc diſſertationem nemo facile ſit lecturus, niſi qui calculum ipſe euoluere conſtituerit, iſti errores eius ſollertiam non remorabuntur, praecipue cum hinc inde iſtae litterae recte ſint expreſſae. Ita p. 124. in Coroll. 2 notetur tantum, poni $\frac{m}{n}=k$, ſeu $m=kn$, et reliqua fient ſatis perſpicua. Deinde Cel Auctor hoc argumentum inuertit, ac propoſito huiusmodi producto:

$$\frac{acf}{beg}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)}\cdot \text{etc.}$$

vbi ſingula membra ex vna, vel duabus, vel tribus fractionibus conſtant, quorum ſingulorum tam numeratores, quam denominatores, in ſequentibus membris continuo vnitate augentur. Propoſito ſcilicet huiusmodi producto in infinitum excurrente, inquirit in formulam integralem, cuius valor caſu $x=1$ ipſi huic producto ſit aequalis, quod cum pluribus modis fieri queat, hinc egregias comparationes huiusmodi formularum integralium adipiſcitur. Obſeruat autem in genere talis producti valorem infinitum eſſe non poſſe, niſi ſit $a+c+f=b+e+g$. Deinde cum ſinus et coſinus

nus angulorum per eiusmodi producta exprimi queant, eos hinc per formulas integrales exponit, vnde inſignia Theoremata per vniuerſam Analyſin maximi momenti oriuntur.

VI.

Solutio generalis problematum quorundam Diophantaeorum, quae vulgo non niſi ſolutiones ſpeciales admittere videntur.

Auctore Leon. Eulero pag. 155.

Quanta vtilitas a methodo, Diophantaea dicta, ſi vberius excolatur, in vniuerſam Analyſin ſit redundatura, a Cel. Auctore huius diſſertationis iam ſaepius eſt commemoratum, vnde ipſum in hac Analyſeos parte diu multumque deſudaſſe minime poenitet. Hic autem inprimis obſeruat, omnia huius generis problemata, prouti adhuc ſunt tractata, quaſi ſponte in duas claſſes diſtribui. Vel enim problemata ita ſunt comparata, vt omnes omnino ſolutiones in iisdem formulis generalibus contineantur, ſicque tota ſolutio vna quaſi operatione abſoluatur, cuiusmodi problemata in vnam claſſem coniicienda videntur: vel problemata eius ſunt naturae, vt omnes ſolutiones non in vna expreſſione generali comprehendi queant, ſed tantum ex ſolutionibus iam inuentis continuo nouas alias elicere liceat,

etiamſi forte eiusmodi formulae exhiberi queant, quae infinitas quidem ſolutiones, attamen non omnes, in ſe complectantur; talia problemata alteram claſſem conſtituent. Ad claſſem priorem pertinet exempli cauſa problema, quo duo quadrata quaeruntur, quorum ſumma itidem ſit quadratum, vbi conſtat, omnium huiusmodi quadratorum radices formulis generalibus exprimi poſſe. Ad claſſem vero poſteriorem ex omnium Auctorum ſententia referendum eſt problema de tribus cubis inueniendis, quorum ſumma ſit quoque cubus, vbi quidem formulae pro radicibus horum cuborum dari poſſunt innumerabiles ſolutiones ſuppeditantes, verum tamen ſemper iis aliae innumerabiles ſolutiones excluduntur aeque ſatisfacientes: at ex inuentis iam tribus quibusque huiusmodi cubis, innumerabiles aliae nouae ſolutiones deriuari poſſunt. Diſcrimen inter has duas claſſes etiam ita eſſentiale eſt viſum, vt nullius quaeſtionis ad poſteriorem pertinentis ſolutio generalis exhiberi poſſe putaretur. Hanc igitur opinionem Auctor in iſta diſſertatione euertit, dum oſtendit, idem problema de tribus cubis, quorum ſumma ſit cubus, ita per formulas generales reſolui poſſe, in quibus omnes omnino ſolutiones contineantur, methodus autem, qua ad has formulas peruenit, prorſus eſt ſingularis, ac plurima alia inſignia incrementa huius Analyſeos partis polliceri videtur.

VII.

VII.

Specimen de vſu obſeruationum in Matheſi pura.

Auctore Leon. Eulero p. 185.

Haud parum paradoxum videbitur etiam in Matheſeos parte, quae pura vocari ſolet, multum obſeruationibus tribui, quae vulgo non niſi in obiectis externis ſenſus noſtros afficientibus locum habere videntur. Cum igitur numeri per ſe vnice ad intellectum purum referri debeant, quid obſeruationes et quaſi experimenta in eorum natura exploranda valeant, vix perſpicere licet. Interim tamen hic ſolidiſſimis rationibus oſtenſum eſt, pleraſque numerorum proprietates, quas quidem adhuc agnouimus, primum per ſolas obſeruationes nobis innotuiſſe, idque plerumque multo antequam veritatem earum rigidis demonſtrationibus confirmauerimus. Quin etiam adhuc multae numerorum proprietates nobis ſunt cognitae, quas tamen nondum demonſtrare valemus, ad earum igitur cognitionem ſolis obſeruationibus ſumus perducti. Ex quo perſpicuum eſt, in ſcientia numerorum, quae etiam nunc maxime eſt imperfecta, plurimum ab obſeruationibus eſſe expectandum, quippe quibus ad nouas proprietates numerorum continuo deducimur, in quarum demonſtratione deinceps ſit elaborandum. Talis cognitio ſolis obſeruationibus innixa, quamdiu quidem demonſtratione deſtituitur, a veritate ſollicite eſt diſcernenda, atque ad

inductionem referri ſolet. Non deſunt autem exempla, quibus inductio ſola in errores praecipitauerit. Quascunque ergo numerorum proprietates per obſeruationes cognouerimus, quae idcirco ſola inductione innituntur, probe quidem cauendum eſt, ne eas pro veris habeamus, ſed ex hoc ipſo occaſionem naneiſcimur, eas accuratius explorandi, earumque, vel veritatem, vel falſitatem, oſtendendi, quorum vtrumque vtilitate non caret. Tali igitur inſtituto Cel. *Eulerus* omnes numeros ex quadrato et duplo alius quadrati compoſitos contemplatur, quibus ad 500 vsque expoſitis plures inſignes earum proprietates obſeruat, veluti quod hi numeri, ſiquidem fuerint compoſiti, alios diuiſores non admittant, niſi qui ipſi ſint eiusdem indolis; tum vero, ſi fuerint primi, eos ſemper multiplum octonarii, vel vnitate, vel ternario, ſuperare; Hinc autem viciſſim concludere licet, omnes numeros primos, vel vnitate, vel ternario, multiplum octonarii ſuperantes, ſemper eſſe compoſitos ex quadrato et duplo quadrato, ſeu in forma $aa + 2bb$ contineri, quae poſtrema obſeruatio non ſolum in numeris minoribus ad 500 vsque locum habet, ſed, inductionem longe vltra 1000 continuando, nulla exceptio ſe prodidit. Etiamſi autem reliquas obſeruationes omnes Auctori firmis demonſtrationibus communire licuerit, in hac poſtrema tamen aquam ipſi haeſiſſe confitetur, neque tamen minus eam pro vera habet; ex quo harum ſpeculationum ſtudioſis pulcerrima occaſio ſuppeditatur, vires ſuas in ea demonſtranda exercendi. Demonſtrationes autem huiusmodi arithmeticae geometricis longe praeſtant, multoque maius ingenii acumen

poſtu-

poſtulant; quare cum demonſtrationes geometricae ad vim ingenii acuendam tantopere commendari ſolent, demonſtrationes certe arithmeticae iſto honore multo magis dignae ſunt iudicandae; eoque magis eos laudari oportet, qui in hoc genere demonſtrationum operam ſuam collocant.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

De frictione corporum rotantium.

Auctore Leon. Eulero p. 233.

In corporum motu a frictione impedito nonnulla adhuc phaenomena ſe offerunt, quorum explicatio nondum perſpicitur. Quando enim globus ſuper tabula ita prouoluitur, vt in puncto contactus nullus plane attritus exeratur, cuiusmodi motus prouolutio perfecta vocari ſolet, ob deficientem attritum nulla etiam frictio adeſſe eſt cenſenda, interim tamen motus corporis mox penitus extinguitur, qui effectus etiam ne reſiſtentiae quidem aeris tribui poteſt, quippe qua nullus motus vnquam plane ad nihilum redigitur. Omni igitur attentione digna eſt quaeſtio: quaenam ſit cauſa, qua globi ſuper plano horizontali prouolutione perfecta ingredientis motus tandem penitus extinguatur? Cel. *Eulerus* igitur primum in hanc cauſam inquirens, plu-

num panno villoſo obductum conſiderat, atque oſtendit, depreſſione horum villorum motum globi vtique retardari, ac tandem penitus extingui debere. Vbi autem tales villi deſint, nullum corpus tam eſſe durum obſeruat, quod non a pondere incumbente quandam impreſſionem accipiat. Hinc concludit, dum globus ſuper plano, tam politiſſimo, quam duriſſimo, prouoluitur, aliquantillum eum in hoc planum quaſi immergi, ex quo idem effectus atque a villis oriatur neceſſe eſt. Tum vero alia quaeſtio occurrit circa deſcenſum globi ſuper plano inclinato, cuius motus ſi prouolutione perfecta fiat, nullam reſiſtentiam a frictione pati poſſe eſt putandus. Ex hoc principio, quod in prouolutione perfecta nulla detur frictio, Auctor iam olim (Comment. Tom. XIII.) deſcenſum corporum ſuper plano inclinato determinauerat, inueneratque prouolutionem perfectam in hoc motu nunquam locum habere poſſe. Contra vero Cel. *Daniel Bernouilli*, qui idem argumentum ibidem erat proſecutus, in prouolutione perfecta perinde frictionem aſſumens, ac ſi globus rependo ingrederetur, inuenit, globum prouolutione perfecta deſcendere debere, quamdiu plani inclinatio certum terminum non ſuperaret. Et haec quidem determinatio poſtmodum experimentis a Cl. *Kraſſtio* inſtitutis apprime conformis eſt deprehenſa. Quo circa hic Cel. *Eulerus* errorem in praecedente ſua diſſertatione commiſſum ingenue fatetur, ſimulque cauſam eius ſcrutatur, quam in eo ſitam eſſe deprehendit, quod etiam in prouolutione perfecta effectus frictionis non ſit nullus, niſi motus fuerit vniformis, vel vterque motus, progreſſi-

vus

vus ſcilicet et rotationis, a viribus ſollicitantibus aequaliter acceleretur. Cum igitur in deſcenſu globi ſuper plano inclinato vis grauitatis ſolum motum progreſſiuum afficiat, rotatorio vero ab ea nulla mutatio afferatur, ſtatim certe prouolutio perfecta turbaretur, et orto attritu tota frictionis vis ſe exſereret. Huic ergo effectui ipſi, antequam eueniat, frictio iam aduerſatur, idque etiam minori vi, quam in motu reptorio cernitur, ſiquidem vis minor prouolutioni perfectae conſeruandae ſufficiat. Probe enim obſeruandum eſt, frictionem non ſemper tota ſua vi agere: namque ſi corpus plano horizontali incumbens protrahatur minore vi, quam foret frictio, ſi moueretur, hoc corpus ſine dubio in quiete manebit, ex quo haec regula, indolem frictionis haud mediocriter illuſtrans, deducitur, quod omne corpus tamdiu in quiete perſeueret, quamdiu vel ipſa frictio, vel etiam minor vis, motui coercendo ſufficit. Atque hoc etiam in prouolutione perfecta vſu venit, vbi punctum contactus pariter quieſcit: ſcilicet ſi vis frictione non maior ſufficiat ad reptionem impediendam, vel prouolutionem perfectam conſeruandam, tum frictio hanc ipſam vim exeret. Quare cum in deſcenſu globi ſuper plano inclinato grauitas motum progreſſiuum acceleret, ad conſeruationem prouolutionis perfectae requiritur, vt motus gyratorius parem accelerationem accipiat, quodſi a frictione, vel adhuc vi minori, praeſtari queat, id re vera eueniet, et prouolutio perfecta manebit. Statim autem ac maiori vi opus fuerit ad eam conſeruandam, quam frictio ſuppeditare valet, tum globus partim rotando, partim rependo,

pendo, deſcendere incipiet, frictione totum effectum exſerente. Prior caſus locum habet, quamdiu inclinatio plani certam eleuationem non ſuperat, prorſus vti experimenta declarant. In hac autem diſſertatione Auctor iſtam quaeſtionem in genere pertractat, ac de omnibus corporibus cuicunque ſuperficiei incumbentibus, ſi inſuper a viribus quibuscunque ſollicitentur, omnes caſus ſollicite diſtinguit, quibus vel ſolus motus progreſſiuus, vel mixtus, atque adeo prouolutio perfecta oriri debet; ac formulae quidem, vnde has concluſiones peti oportet, tam ſunt intricatae, vt facile appareat, hanc quaeſtionem multo eſſe difficiliorem, quam primo intuitu videatur.

II.

Principia motus fluidorum.

Auctore Leon. Eulero p. 271.

Hic theoriae motus fluidorum elementa in genere traduntur, vbi totum negotium huc reducitur, vt propoſita fluidi maſſa, ſiue libera, ſiue vaſibus incluſa, cum ei motus quicunque fuerit impreſſus, eaque deinceps a viribus quibuscunque ſollicitetur, motus, quo ſingulae eius particulae ſint progreſſurae, determinetur, ſimulque preſſio, qua ſingulae partes, tam in ſe mutuo, quam in latera vaſis agunt, definiatur. Antequam autem Cel. Auctor hunc virium effectum inueſtigandum ſuſcipit, in priori iſtius diſſertationis parte omnes

omnes motus poſſibiles, qui quidem in fluido locum habere poſſint, diligenter expendit. Etiamſi enim ſingulae fluidi particulae a ſe inuicem ſint ſolutae, tamen eiusmodi motus penitus excluduntur, quibus particulae in ſe mutuo penetrarent, quandoquidem hic de eiusmodi fluidis tantum eſt ſermo, quae nullam compreſſionem in arctius ſpatium patiuntur. Ex quo perſpicuum eſt, quamlibet fluidi portiunculam alium motum recipere non poſſe, niſi quo perpetuo idem volumen conſeruet; etiamſi interea figura vtcunque varietur. Sufficeret quidem, dum ne vlla portiuncula vnquam in minus ſpatium compingeretur, verum quoniam, ſi in maius ſpatium expanderetur, continuitas particularum tolleretur, eaeque diſpergerentur, neque amplius inter ſe cohaererent, huiusmodi motus non amplius ad doctrinam de motu fluidorum pertineret, ſed ſingulae guttulae ſeorſim motus ſuos abſoluerent. Hoc igitur caſu excluſo, motus fluidorum iſta regula eſt reſtringendus, vt ſingulae portiunculae perpetuo eiusdem maneant voluminis; atque ex hoc principio generales motus expreſſiones pro ſingulis fluidi elementis limitantur. Conſiderando ſcilicet quamcunque fluidi portiunculam, ſingula eius puncta tali motu ferri debent, vt cum puncto temporis in locum proximum peruenerint; etiamnum volumen priori aequale adimpleant, vnde ſi cuiusuis puncti motus in ternas celeritates, ſecundum directiones fixas inter ſe normales, reſoluatur, ſemper certa quaedam relatio inter has ternas celeritates ſubſiſtat neceſſe eſt, quam Auctor in prima parte definiuit.

In altera parte (pag. 288.) ad motum fluidi a viribus quibuscunque productum determinandum progreditur Auctor, in quo negotio vniuerſa inueſtigatio eo redit vt, preſſio, qua partes fluidi in ſingulis punctis in ſe inuicem agunt, definiatur, quae preſſio commodiſſime, vti in aqua fieri ſolet, altitudine quadam indicatur, quae ita eſt intelligenda, vt ſingula elementa fluidi parem preſſionem ſuſtineant, ac ſi a columna graui eiusdem fluidi, cuius altitudo illi eſt aequalis, premerentur. In ſingulis ergo fluidi punctis ſemper dabitur eiusmodi altitudo ſtatum preſſionis referens, quae quatenus non circumquaque eſt aequalis, motum elementorum perturbabit. Haec autem preſſio pendet tam a viribus, quibus ſingula fluidi elementa immediate ſollicitantur, quam ab iis, quae in totam maſſam agunt, ita vt his viribus datis preſſio in ſingulis punctis, hincque ſingulorum elementorum acceleratio, vel retardatio, motus aſſignari queat, quae determinationes omnes ab Auctore per formulas differentiales exprimuntur. At vero plerumque euolutio harum formularum maximis difficultatibus implicatur. Interim tamen vniuerſa haec theoria ad Analyſin puram eſt reducta, et quod in ea perficiendum reſtat, vnice ab vlteriori Analyſeos promotione pendet. Tantum igitur abeſt, vt ſpeculationes mere analyticae nullum vſum in Matheſi applicata praeſtent, vt potius adhuc inſignia eius incrementa deſiderentur.

III.

III.

De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis.

Auctore Leon. Eulero p. 312.

Quantumuis difficile ſit Theoriam generalem motus fluidorum ad quosuis caſus particulares accommodare, tamen ſi aqua per tubos non nimis amplos fluit, ſingularis accedit circumſtantia, qua motus determinatio multo fit facilior, atque adeo ad concluſiones practicas perduci poteſt. Hoc commodum inde naſcitur, quod per totam quamque tubi ſectionem transuerſam aqua fere in omnibus punctis pari velocitate defertur, ita vt haec hypotheſis ſatis tuto in calculum introduci poſſit, etiamſi negari nequeat, quin aliquis error calculum inquinet, qui eo maior erit, quo tubi fuerint ampliores, vel ſaltem quo magis velocitas in ſingulis cuiusque ſectionis punctis ab aequalitate recedat; quare etiam omnes concluſiones ex hac hypotheſi deductae pro proxime tantum veris erunt habendae. Huic autem principio fere omnia, quae adhuc de motu fluidorum determinata habentur, innituntur, cum vbique motus tantum per tubos tractari ſoleat, qui etſi plerumque non admodum anguſti aſſumantur, tamen iis ante memorata proprietas tribuitur, qua per totam quamque ſectionem quouis tempore in omnibus punctis aqua aequali celeritate moueri ponitur, ex quo determinationes inde concluſae modo magis, modo minus, a veritate ab-

errare deprehenduntur. Nonſolum autem in huiusmodi tubis ipſe motus aquae, ſed etiam preſſio, quam inde ipſe tubus ſuſtinet, definiri ſolet; vnde cognoſcitur, niſi tubus, vel vas, ſatis firmiter retineatur, in eo ipſo ab actione aquae, quae quatenus in latera vaſis agit, reactio appellatur, motum generari debere. Quin etiam talis reactio quoties aqua per foramen effluit, experientia dilucide confirmatur. Namque Cel. *Segnerus* iam pridem de eiusmodi machina cogitauit, quae ſola effluentis aquae reactione ad motum concitaretur: hanc autem machinam ita inſtruxit, vt ipſi tubi aquam deferentes circa axem verticalem fixum in gyrum agerentur. Hinc quaeſtio non minus curioſa, quam difficilis, eſt nata, qua lege aqua per tubos mobiles promoueatur, quod argumentum in hac diſſertatione omni circumſpectione ad tot tamque varias circumſtantias adhibita a Cel. *Eulero* pertractatum videmus. Ac primo quidem principium vniverſaliſſimum, pro omni reactione determinanda luculenter exponit, vnde actio virium non mediocriter illuſtratur: ſcilicet ſi omnes vires aquam in vaſe contentam ſollicitantes littera P indicentur, vires autem ad accelerationem ſingularum particularum impenſae littera Q; tum differentia P – Q perpetuo dabit reactionem; vnde perſpicitur, eatenus tantum reactionem exiſtere, quatenus non omnes vires ſollicitantes ad accelerationem motus impenduntur. Hinc regula illa notiſſima, ſed plerumque perperam intellecta, egregie illuſtratur, quod omnis cauſa effectum ſibi aequalem producat; hic enim P exhibet cauſam, cuius effectus duabus partibus conſtat, altera ad motus productionem, ſeu accelerationem, im-

penſa

penſa, quam littera Q indicat, altera vero ipſius vaſis latera vrgente, ſeu reactione, quae ſi ponatur R, erit vtique P = Q + R. Huius principii ope ab Auctore motus et reactio aquae per tubos mobiles fluentis ſatis concinne et expedite determinatur, hincque machina illa Segneriana ad ſummum perfectionis ſtatum proue-hitur: quae tum a data copia aquae per datam altitudinem delapſa ad motum impulſa maiorem effectum producere valet, quam pleraeque machinae hydraulicae vſu receptae, ex quo hoc nouum machinarum genus digniſſimum videtur, quod omni cura ad communem vſum transferatur.

IV.

Tentamen Theoriae de frictione fluidorum.

Auctore Leon. Eulero p. 338.

Fluida, dum per canales feruntur, frictionem quandam pati, plurima experimenta teſtantur, atque adeo Phyſiologi non dubitant, calorem animalium frictioni motum ſanguinis afficienti tribuere; quod autem etſi neutiquam ſatis adhuc eſt euictum, tamen certum eſt, ſi aqua per longinquos canales ad fontes ſalientes deriuetur, eius motum ob frictionem non mediocriter retardari, propterea quod altitudo iactus eo magis ab altitudine aquae in caſtello deficit, quo tractus canalium fuerit longior, ipſique canales anguſtiores. Nullum etiam eſt dubium, quin haec frictio ſimiles leges ſe-

quatur, atque frictio corporum ſolidorum, cum minimae fluidi particulae, ad latera canalium praeterfluentes, tanquam ſolidae, ſpectari queant, ex quo frictio ſemper preſſioni proportionalis cenſenda videtur. Quoniam vero particulae fluidorum maxime ſunt lubricae, earum frictio ſine dubio multo minor eſt ſtatuenda, quam in ſolidis, ad quod etiam hoc diſcrimen accedit, quod in fluidis extimae tantum particulae latera tuborum tangentes frictionem patiantur, dum interiora iuxta has libere defluere poſſunt, vnde huius frictionis effectus multo minor euadat, neceſſe eſt. Quatenus autem hoc modo euenit, vt in qualibet tubi ſectione particulae interiores celerius mouentur, quam quae lateribus ſunt contiguae, eatenus hypotheſis, cui theoria motus fluidorum per tubos fluentium ſuperſtruitur, euertitur, ita vt iam concluſiones ex calculo deductae magis a veritate aberrent. Quae igitur in hac diſſertatione circa frictionem aquae per tubos decurrentis a Cel. *Eulero* traduntur, ea ipſe Auctor minime tanquam certa et veritati conſentanea venditat; ſed potius totam tractationem pro tentamine habet, quo naturae ſcrutatoribus occaſionem ſuppeditare voluit, tam per experimenta, quam per calculos accuratiores, in naturam huius frictionis inquirendi. Aſſumit igitur hypotheſin vulgarem, qua in qualibet tubi ſectione aqua communi motu proferri ponitur, inſuperque frictionem preſſioni aquae ad latera tubi proportionalem ſtatuit, quam autem pro eadem preſſione ex craſſioribus quibusdam experimentis plus millies minorem colligit, quam in ſolidis. Primum autem obſeruat in tubis cylindricis effectum frictionis duplo eſſe mino-

minorem, ac in tubis eiusdem amplitudinis, quorum ſectiones ſunt quadratae. Tum vero diminutionem motus aquae per quosuis tubos, ſiue verticales, ſiue ad horizontem inclinatos, determinat, et in omnibus caſibus terminos, tam in longitudine tuborum, quam eorum gracilitate, definit, vbi motus aquae ob frictionem penitus coercetur, qui iidem termini, cum per experimenta facile explorari queant, hinc maxime ideoneus modus obtinetur theoriam frictionis fluidorum per experimenta perficiendi.

Hanc porro theoriam etiam adhuc imperfectam (pag. 372.) ad curſum fluminum accommodat Auctor, vbi obſeruat, niſi pro data fluminis profunditate alvei decliuitas certum terminum ſuperet, aquam eſſe ſtagnaturam: ita ea frictionis menſura aſſumta, quam experimenta nonnulla craſſiora ſuadere videbantur, ſequitur, fluuium cuius profunditas ſit 25 pedum, fluere ceſſare, ſtatim atque aluei decliuitas pro diſtantia 1000 pedum minor ſit quam 9 pollicum: ſin autem profunditas ſit 15 pedum, ad fluendum ſufficit, vt pro diſtantia 1000 pedum decliuitas ſemiſſem pedis ſuperet: hic autem frictionis effectus nimis magnus eſſe videtur.

Addita eſt (pag. 379 appendix de fontibus ſalientibus, eidem huic theoriae accommodata, et, quantum ex illa fieri poteſt, dilucide monſtrans, ad quam altitudinem aqua in huiusmodi fontibus, cognita eleuatione caſtelli et amplitudine nec non longitudine canalium, ſurſum proiicietur. Caeterum hic notatu maxime dignum putamus, effectum huius frictionis etiam a preſſione

ſione atmoſphaerae pendere, ita vt aucta atmoſphaerae preſſione effectus frictionis pariter augeatur: quare ſi aqua per canales ad fontes ſalientes deriuatur, ſingulare hoc phaenomenum locum habere debet, vt aqua eo altius proiiciatur, quo humilior ſtet mercurius in barometro.

Denique (pag. 382.) prolixa tabula ſubiungitur ex qua pro data canalium longitudine et amplitudine ad quamuis aquae in caſtello altitudinem facile definiri poteſt altitudo, ad quam aqua ſit aſcenſura, vbi in genere notaſſe iuuabit, quo longiores, ſimulque anguſtiores, fuerint canales, per quos aqua deriuatur, eo majorem iacturam in altitudine fontium eſſe futuram.

Ad fontes ergo ſalientes inſtruendos plurimum intereſt, vt caſtellum quam proxime conſtituatur, ſimulque tubi quam ampliſſimi adhibeantur. Verum, vt jam eſt monitum, haec Theoria adhuc emendatione indiget, quam vix ante cum ſucceſſu ſuſcipere licebit, quam plurima noua experimenta ſumma cura fuerint inſtituta, quae vlterior inueſtigatio omnino eſt digna, in qua tam Phyſici, quam Geometrae, omni ſtudio vires ſuas exerceant.

V.

V.

Explicatio experimenti paradoxi, de aſcenſu coni duplicis ſpontaneo.

Auctore G. W. Krafft. p. 389.

Etſi aſcenſus apparens rotae, axibus conicis praeditae, aut coni duplicis, duobus planis inclinatis diuergentibus impoſiti, mirum videatur phaenomenon ad primum intuitum, peritioribus tamen et attentius rem conſiderantibus parum negotii creare potuit perſpicere, interea dum conus aut rota eiusmodi verſus partes eleuatiores aſcendere videtur, totius aggregati centrum grauitatis vere deſcendere, et inferiora petere. Aſſerere interim vix dubitamus, mancam fuiſſe phaenomeni, cuius in plerisque Philoſophiam naturalem explicantibus libris iniicitur mentio, explicationem, antequam eam, quam hic orbi erudito ſiſtimus, diſquiſitionem b. Auctor inſtituerat. Iure enim meritoque talis huius phaenomeni explicatio deſiderari poterat, quae non ſolum generatim oſtenderet, fieri debere, quae fieri actu experimur, ſed etiam, cur et quomodo ita fiat, diſtincte explicaret.

Praeſtitit hoc *Krafftius*, et in expediendo hoc negotio ſequenti ratione proceſſit. Supponit plana divergentia, quibus impoſita eſt rota, aut conus, horizontalia, atque tum inquirit in cauſam, cur prouolui iam debeat conus, eam regionem verſus, verſus quam plana diuergunt. Concipit ea propter, tranſire per rectam

horizontalem, cui incumbit conus, planum verticale, atque demonſtrat, coni, per planum hoc, ſectione, produci ellipſin, cuius axis maior horizonti parallelus, cuiusque centrum, puncto contactus ellipſeos et rectae horizontalis, cui incumbit conus, verticaliter imminet. Quodſi itaque diameter grauitatis, ſiue axis coni, per ellipſeos centrum tranſiret, ſuffultum cenſendum eſſet coni centrum grauitatis. Hic autem res aliter ſe habet. Conſtat nempe ex geometricis conſiderationibus in diſſertatione prolatis, centrum ellipſeos in axin coni, ex quo ſecatur, non cadere; vnde liquet, eo quem conſideramus caſu, centrum grauitatis coni non ſuffultum eſſe, mirumque non eſt, quod actu prouoluatur conus, eas partes verſus, verſus quas centrum grauitatis ipſius a libero deſcenſu non impeditur.

Poſtquam ita generatim oſtenſa haec ſint, diſtinctius experimenti theoriam diſquirit Auctor, momentum, quo ad deſcenſum ſollicitatur centrum grauitatis, aut conus ad motum rotatorium, inueſtigat, lineaeque, per quam durante prouolutione, centrum grauitatis coni deſcendit, inclinationem ad horizontem determinat. Ex his tandem immediate deducitur, quantum rectae horizontales, quibus incumbit conus, eleuari queant, antequam rotae prouolutio et apparens aſcenſus ſiſtatur.

Plena ſic omnibusque numeris abſoluta ſuppeditatur huius phaenomeni explicatio, quam eo magis luce publica dignam exiſtimauimus, quod aliqui Phyſicorum, interque eos perſpicaciſſimus *Deſaguillierius*, in eodem hoc negotio, infeliciter verſati ſint, prouti ſub diſſertationis finem *Krafftius* demonſtrat.

VI.

VI.

Sector Catadioptricus.

Auctore

Ioh. Andr. de Segner p. 399.

Ex quo Ill. *Segnerus* Academiae noſtrae nomen dedit, merito gratulamur Commentariis noſtris, a tanti viri claritate laudes, ab acumine autem eius et in publica commoda peruigili diligentia bonarum artium incrementa. Deſcriptio Sectoris Catadioptrici, quam hic damus, ordine prima ab ipſo cum Academia communicata lucubratio eſt. Suum quidem non dicit, quod hic deſcribit inſtrumentum, contractione tamen molis illud eo redegit, vt vix commodius aliquod cognitum ſit, ad peragendas varias operationes, quae alias non ſine labore, ac difficultate perficiuntur. Deſcriptionem inſtrumenti hic non ſuſcipimus, quia, niſi ad delineationes recurrere velimus, vix intelligibilis foret. Hic ſolum annotamus, gerere hunc ſectorem arcum circuli, non niſi decimae ſextae parti totius circuli peripheriae aequalem, quo non obſtante omnes anguli eius ope dimetiri poſſunt. Perutilis erit ſector hic Catadioptricus peregrinatoribus eruditis, vt inſtrumento hoc, quod absque incommoditate ſecum portare poſſunt, admodum expedite poſitiones locorum ex longinquo conſpicuorum, capiant, ſicque geographicam regionis alicuius deſcriptionem perficiant.

PHYSICA.

I.

Obſeruationes botanicae et vna Iridis multiplicis.

Auctore G. B. Bülffinger p. 407.

Heroicis tantum ingeniis datum eſt, limites cognitionis humanae, certis obiectis alligatos perrumpere, et in pluribus doctrinis, quae nihil inter ſe commune habent, eadem facilitate verſari. Non diffiteor equidem, ſtructuram et vegetationem plantarum multa offerre Philoſopho non indigna, nec miror, ſi naturae ſcrutatorem cupido incedit, ea, quae in corpore animali fieri videt, in plantis quoque experiri. At quot non aliis ſtudiis diſtentus fuit *Bülffingerus*? Profunda Mathematum ſcientia et Phyſices experimentalis amplificatio totum illum, cum hic Petropoli degeret, occupauit. Reuerſus in patriam Theologiam profeſſus eſt, Architecti ſupremi bellici munus per aliquot tempus non ſine laude ſuſtinuit, tandem in conſilium regiminis Ducatus Virtembergici admiſſus, eum ſe geſſit, vt qui tota vita ſua nihil praeter doctrinam politicam exercuiſſet. Hoc non obſtante Vir illuſtris, quo erat ingenio feliciſſimo et nullis limitibus circumſcripto, quandoque, ſi non data opera, ſaltem recreationis cauſa, in amoeniſſimum Florae campum deſcendit,

dit, et vt olim Academicus Petropolitanus de Tracheis plantarum in melone, nec non de radicibus et foliis Cichorii (v. Tom. IV. et V. vet. Comment.) commentatus erat, ita paucis ante obitum menſibus opellam, quam hic damus, conſcripſit et Academiae noſtrae conſecrauit. Damus eam hoc fine, tum ne quid immortalis viri laborum intercidat, tum vt ii, qui curioſis obſeruationibus delectantur, in noſtris quoque Commentariis reperiant, quo animum paſcere poſſint.

Obſeruationes botanicae ſunt ſequentes: 1. *Fructus proliferi et frondoſi.* Poſt collecta ex variis Auctoribus fructuum proliferorum exempla, deſcribuntur quatuor pira, nouis fructibus et frondibus foecunda. 2. *Malus ſatiua – cum fructu florifero.* Vt ex allegatis piris prodiere frondes, ita hic frondes ex malo ortae procrearunt flores. 3. *Flos roſae prolifer et frondoſus.* Huius generis plura exempla ex ſcriptoribus variis allegantur, et diſcrimen inter ſingula notatur.

Accedit (p. 420.) obſeruatio Iridis multiplicis, cui praemittitur enumeratio exemplorum, ab optimae notae Phyſicis de hoc Phaenomeno euulgatorum. *Bülffingerus* Iridem vnam quintuplicatam vidit, reliquas tres triplicatas. Notandum autem, Iridum loco ipſi quoque Zonas coloratas venire, quae quandoque Iridi primariae interius contiguae ſubobſcure conſpiciuntur, et fere ſemper adparere debent, dummodo ſatis clara luce ſplendentis ſolis radii, in atram nubem denſamque pluuiam incidentes, viuidam Iridem efformare poſſint, cuius ſufficiens explicatio, principiis a ſummo *Newtono* Opt. L. II. P. IV. euolutis, innixa,

apud Auctores Phyſicos paſſim occurrit; vnde quoque dubitari licet, vtrum recte ſatis de his Zonis ſentiat Ill. Auctor, qui iſtas pro coronarum aut halonum portionibus haberi poſſe exiſtimauit.

Recordamur etiam hic Petropoli aeſtate anni 1757. Iridem triplicem diuerſo tempore a Viris Cl. *Zeibero* et *Aepino* interuallo aliquot hebdomadarum conſpectam fuiſſe, vbi tamen tertia Iris reliquis non fuit parallela, ſed priores duas oblique interſecauit. Tribuunt autem hoc phaenomenon doctiſſimi obſeruatores cum *Halleio* reflexioni radiorum ſolis a quieta ſuperficie ſtagni aut fluuii ortae; ſub hac enim conditione vterque illud ſe vidiſſe teſtatur.

II.

Obſeruationes Meteorologicae in diuerſis Sibiriae locis factae, in ordinem redegit, animaduerſionibus illuſtrauit, et conſectaria addidit.

Auctore I. A. Braun p. 425.

Inter fructus itineris Sibirici, a b. *Gmelino* exantlati, non poſtremus cenſendus eſt, quod vbicunque locorum aliquam moram fecit, obſeruationes Meteorologicas inſtituit, et inſtitutas in praecipuis Sibiriae locis per alios obſeruatores continuari curauit. Obſeruationum ab ipſo *Gmelino* conſignatarum rationem hoc loco reddidit *Braunius* V. Cl. non quidem omnes, quod

quod nimis longum fuiſſet, repetendo, ſed obſeruationes ſingulorum locorum inter ſe inuicem comparando, et ſub quibus aeris circumſtantiis maximae minimaeue altitudines barometricae, nec non calor ſummus, frigusque ſummum, quolibet tempore et loco acciderunt, excerpendo. Notatu hic dignam iudicamus confirmationem frigoris ſummi ſub initium Anni 1735. a *Gmelino* in vrbe Ieniſeisk obſeruati, quia cum b. Vir in praefatione ad Tomum I. Florae Sibiricae mentionem eius inieciſſet, increduli nonnulli extiterunt, tantum frigoris gradum dari poſſe dubitantes, ideoque obſeruationem vitio laborare ſuſpicati ſint. His autem nunc reliquis obſeruationibus a Cl. *Braunio* allegatis omnis ſcrupulus eximitur, fidesque *Gmelini* eo quoque confirmatur, quod praeterito anno 1760. ſi non maiorem, ſaltim parem, frigoris rigorem in Suecia obſervatum fuiſſe, noua publica nunciarunt. Deinde notari meretur depreſſus barometri ſtatus, illi, qui in ſummis Alpibus obſeruari ſolet, non abſimilis, quem patentes campi Mongolenſes in vico Kjachta, Ruſſorum cum Sinenſibus mercatura celebri, oſtenderunt. Quod cum hic loci obtineat, quae non erit ſoli eleuatio ad fontes fluuiorum Selengae, Orchonis et Tolae, ſeu in mediis Mongolenſium deſertis, vnde haec flumina profluunt? Hoc certum eſt, rudera diluuii vniuerſalis, aut nulla, aut dubia, ibi obſeruari. Et defectum aeris denſioris omnes, huic adſuetos, mox ſub ingreſſum in iſtas regiones ſentire et aegre ferre, *Gmelinus* in deſcriptione itineris Sibirici Tom. I. p. 444. adnotauit. Iactura obſervationum thermometricarum inter Kraſnoiarenſes anni

1739

1739 et 1740. conſpicua, dolenda quidem, ob hiemis aſperitatem totam tunc Europam occupantem, at non irreparabilis eſt, quia ſuppetunt obſeruationes eadem anni tempeſtate in proximis vrbibus Tomſk, Ieniſeisk et Irkuzk habitae, ex quibus colligitur, hiemem plus ſolito rigidiorem in Sibiria obſeruatum non eſſe. Dum obſeruationes Meteorologicae ab aliis obſeruatoribus per Sibiriam inſtitutae in poſterum ab Academia publicabuntur, accipient etiam *Gmelinianae* quaedam ſupplementa, quae Cl. *Braunium*, dum has euulgaret, effugerunt. Extant enim praeterea ab ipſo *Gmelino* conſignatae obſeruationes Meteorologicae annis 1733 et 1734. in itinere a Tweria vrbe Caſaniam, cum naue in Volga fluuio veheretur, deinde Caſaniae, Catharinopoli et Tobolii, et denique anno 1742. Tumeni, Tutinii et Werchoturiae captae.

ASTRONOMICA.

I.

Inueſtigatio Parallaxeos Lunae, obſervationibus aliquot 1752 Petropoli et in Promontorio bonae ſpei ex compacto habitis, innixa.

Auctore A. N. Griſchow. p. 495.

Cum in promontorium bonae ſpei ad capiendas pro Parallaxi Lunae obſeruationes profectus eſſet Celeb. noſtri

noſtri temporis Aſtronomus Abbas *de la Caille*, ex compoſito factum eſt, vt eodem tempore Clar. quoque *Griſchouius*, quem praematuro fato ſibi ereptum luget Academia, primum *Petropoli*, poſtmodum in Inſula *Oeſilia*, Lunam ſedulo obſeruaret. Priorum obſeruationum hic rationem reddere ſategit, quas cum obſeruationibus Cel. *de la Caille* comparando, primum differentiam meridianorum vtriusque Obſeruatorii, deinde vero Parallaxeos horizontalis Lunae quantitatem, eruere laborauit.

Quo primum attingat ſcopum, in auxilium vocatis Tabulis *Halleianis*, ex differentiis aſcenſionum rectarum Lunae et fixae cuiusdam parallelo Lunae propinquae, vtrobique obſeruatis, meridianorum differentiam quaeſitam deducit 47′ 10″, quae determinatio, etſi ob methodi naturam quodammodo lubrica ſit, pro praeſenti tamen ſcopo ſatis exacta haberi poteſt.

Inueſtigat poſtmodum Clar. Auctor, parallaxin Lunae horizontalem, qualis ex obſeruationibus vtrobique inſtitutis profluit, duplici autem via, in hac disquiſitione procedit, quod, quam ob cauſam fecerit, breviter exponendum erit.

Etſi generatim ſatis conſtet, terrae globum polos verſus compreſſum eſſe, lex tamen curuaturae, qua gaudet ſphaeroidis huius ſuperficies, nondum ita cognita eſt, vt de ea ambigendi, ſummi viri, locum non inuenerint. Sequuntur quidem plerique *Newtonum*, qui meridianis planetae, quem habitamus, ellipticam figuram adſcribit, aſt ſunt quoque, qui cum ſummo Geo-

metra et Aſtronomo *Bouguerio*, talem aſſumunt curuaturam, vt meridiani gradus, tranſeundo ab aequatore verſus polos, increſcant ſecundum rationem, quae biquadrata ſinuum latitudinum intercedit, cum in hypotheſi elliptica haec incrementa in duplicata circiter praedictorum ſinuum ratione fiant.

Magnus eſt harum hypotheſium in diſquiſitiones a Clar. Auctore inſtitutas, influxus. Aſſumta enim alia curuaturae meridiani lege, alia prodit ratio rectarum, ex obſeruatoriis ad terrae centrum ductarum, aliaque anguli, quem verticalis linea cum radio terreſtri includit, menſura, vnde neceſſario quoque alia aliaque prodire debet parallaxeos lunaris quantitas.

Vtrique itaque hypotheſi, *Newtonianae* nempe atque *Bouguerianae*, (emendato prius aliquo, qui in calculos analyticos, a Cel. *Bouguero* inſtitutos, irrepſerat, errore) inueſtigationes ſuas adaptat Clar. Auctor, quod negotium, qua ratione perficiat, qui ſcire cupit, ad ipſam diſſertationem ablegandus eſt. Nos hic ſolummodo monemus ex prolixioribus Clar. Collegae diſquiſitionibus et calculis elucere tandem, ſub parallelo Petropolitano rationem parallaxeos horizontalis Lunae et diametri ipſius vti 270 ad 149 circiter ſtatuendam eſſe; atque parallaxin Lunae horizontalem, ex tabulis *Halleianis* deductam, parte ſui 168 augendam eſſe, vt theoria cum natura ad conſenſum reducatur, quod quidem cum concluſione, quam in Tomo V. Commentariorum Academiae noſtrae, ex conſideratione eclipſium ſola-

ſolarium An. 1748 et 1750 deduxerat, apte ſatis conſentit.

Obſeruationes Clar. *Griſchouii* in Inſula *Oeſilia* inſtitutas, operam dabit Academia, vt quantocyus lucem publicam adſpiciant.

II.

Obſeruatio Eclipſeos lunaris partialis, quae contigit d. $\frac{16}{27}$ Martii 1755. habita in Inſula Oeſilia ab A. N. Griſchouio. p. 542.

III.

Obſeruatio Eclipſeos lunaris Petropoli in Obſeruatorio aſtronomico d. 17. Martii mane temp. civ. 1755. ſt. vet. inſtituta a N. Popowio et A. Kraſilnikowio. p. 545.

Etſi obſeruationes Eclipſium lunarium ad perficiendam ſcientiam aſtronomicam vix aliquem habeant vſum, immo et non niſi rudioribus adminiculis, longitudinem locorum determinandi, annumerandae ſint, pro hoc vltimo tamen ſcopo, vbi ſumma non quaeritur accuratio, vtiliter aliquando adhiberi poſſunt. Hac itaque mente ſupra indicatos Eclipſeos huius obſeruationes cum lectoribus communicamus.

IV.

Mercurius in ſole viſus, Lipſiae d. 6. Maii ſt. nov. A. 1753, hor. mat. temp. civ. a Godofredo Heinſio. p. 547.

Verſabatur in eo orbitae ſuae loco, qui nodo deſcendenti propinquus eſt, Mercurius, cum An. 1753 inter ſolem terramque tranſibat, vnde obſeruationes circa hunc tranſitum inſtitutae, ad emendandam planetae huius theoriam apprime vtiles eſſe poſſunt. Quid Clar. Auctor circa hoc phaenomenon obſeruauerit, ex ſcripto ipſo haurire debent lectores, de methodo tamen quam adhibuit, aliqua monere operae pretium iudicamus.

Habet haec methodus inſignem, cum conſueto per tubum, quadranti aſtronomico affixum, phaenomena talia obſeruandi modo, ſimilitudinem, eademqûe hac gaudet praerogatiua, quod a refractionum effectu immunis ſit. Tota, quae locum habet, differentia, ea eſt, quod 4 fila ſub angulo ſemirecto ad ſe inuicem inclinata, in ocularis vitri foco extendat Clar. Auctor, cum tubi quadrantum ordinarie non niſi 2 fila, normaliter ſe decuſſantia, gerere ſoleant, deinde vero, quod tubus, quem adhibet, quadranti non affixus ſit, ſed ope libellae ipſi appenſae ita dirigatur, vt aliquod filum reticuli, dum obſeruatio inſtituitur, horizonti parallelum ſit, prouti hoc in prius dicta methodo, plano quadrantis ſitum exacte verticalem conciliando, obtinetur. Plura, quia aſtronomis ſcribimus, in medium afferre ſuperuacuum foret.

MATHEMATICA.

METHODVS INVENIENDI INFINITAS CVRVAS ISOPERIMETRAS ALIAVE COMMVNI PROPRIETATE PRAEDITAS.

Auctore

L. EVLERO.

In celebri illo problemate iſoperimetrico quaeri ſolet, inter omnes lineas curuas per data duo puncta transeuntes ac longitudine aquales, ea quae maximi minimiue cuiusdam proprietate gaudeat. Hoc igitur problema innititur iſti hypotheſi, quod datis duobus punctis infinitae exiſtant lineae curuae longitudine aequales, quae omnes intra haec puncta tanquam terminos contineantur. Quanquam autem nullum eſt dubium, quin per data duo puncta innumerabiles duci queant lineae curuae, quae omnes longitudinem eandem habeant, tamen ſi omnes iſtae curuae exhiberi debeant, vel aequatio generalis deſideretur eas omnes complectens, quaeſtio non parum ardua videtur. Atque ſi ad ſolutionem problematis iſoperimetrici id opus fuiſſet, vt omnes curuae iſoperimetrae intra datos terminos contentae exhiberentur, et ad electionem maximi minimi-

ve quaſi proponerentur, nondum fortaſſe aditus ad hoc problema patuiſſet.

Remota autem huius problematis mentione, ipſa quaeſtio de inueniendis infinitis lineis curuis iſoperimetris, quae intra datos terminos ſint deſcriptae, omni attentione digna videtur, et quoniam eius ſolutio peculiaria calculi artificia poſtulat, quemadmodum cuique tentanti mox patebit, pro Analyſi inde non ſpernenda incrementa expectare licebit. Praecipue autem multo maiorem fructum hinc percipiemus, ſi problemati longe ampliorem extenſionem tribuamus, ita, vt nonſolum curvas eiusdem longitudinis, ſed quae alia quacunque indole communi ſint praeditae, definire doceamus, quae intra eosdem terminos ſint contentae. Quousque igitur mihi in tractatione huius problematis latiori ſenſu accepti, pertingere licuerit, hic dilucide explicare conſtitui, atque vt ordine procedam, a quaeſtionibus ſimplicioribus huc pertinentibus exordiar.

Problema 1.

1. Inuenire aequationem generalem pro omnibus curuis, quae per data duo puncta tranſeant.

Solutio.

Referentur omnes hae curuae inueniendae ad eundem axem, easdemque coordinatas orthogonales, ſitque abſciſſa $=x$, applicata $=y$. Bina autem puncta data reſpondeant his duobus ipſius x valoribus; $x=o$ et $x=a$;

ac

ac pro illo quidem ſit $y=b$, pro hoc vero $y=c$. Quaeſtio ergo huc redit, vt eiusmodi relatio in genere inter x et y definiatur, quae poſito $x=o$ praebeat $y=b$, poſito autem $x=a$, det $y=c$; ſin autem abſciſſae x alii valores tribuantur, reſpondentes applicatae y valores in infinitum variare debent, propterea quod ſingulae curuae inter ſe debent eſſe diuerſae. Sit X eiusmodi functio ipſius x, quae poſito $x=o$ vel $x=a$ fiat vel $=b$ vel $=c$, atque manifeſtum eſt, aequationem $y=X$ vnam praebere curuam per propoſita ambo puncta transeuntem. Denotet iam P functionem quamcunque ipſius x indefinitam, ac ponatur $y=X+x(a-x)P$, vbi manifeſtum eſt, ſiue ſtatuatur $x=o$, ſiue $x=a$, alterum membrum $x(a-x)P$ in nihilum eſſe abiturum; dummodo P neque per x, neque per $a-x$ ſit diuiſum, ſicque alteruter factorum x et $a-x$ tollatur. Idem eueniet, ſi ponatur $y=X+x^m(a-x)^nP$, dummodo exponentes m et n ſint nihilo maiores, ex quo perſpicuum eſt, omnes curuas hac aequatione $y=X+x^m(a-x)^nP$ contentas ita fore comparatas, vt ſiue ponatur $x=o$, ſiue $x=a$, iidem pro y prodeant valores, quaecunque functio ipſius x loco P ſubſtituatur. Ergo omnes hae curuae per eadem duo puncta abſciſſis $x=o$ et $x=a$ reſpondentia tranſibunt, per quae tranſit curua aequatione $y=X$ contenta: et quoniam aſſumtio functionis P latiſſime patet, perſpicuum eſt, hanc aequationem omnes omnino curuas per ambo propoſita puncta tranſeuntes continere.

Coroll. 1.

2. Data ergo curua hac aequatione $y = X$ expreſſa, vel ſaltem eius portione, quae reſpondet abſciſſae $= a$, cuius propterea ambo termini erunt noti, omnes curuae hac aequatione generaliſſima contentae:

$$y = X + x^m (a-x)^n P$$

per eosdem terminos tranſibunt, quaecunque pro P ſubſtituatur functio ipſius x, dummodo exponentes m et n ſint nihilo maiores, neuterque horum factorum x^m et $(a-x)^n$ per diuiſionem deſtruatur. Quippe qui factores ſunt neceſſarii ad hanc proprietatem producendam.

Coroll. 2.

3. Scilicet ſi curuae hac aequatione $y = X$ expreſſae punctum abſciſſae $x = o$ reſpondens ſit A, abſciſſae vero $x = a$ reſpondens ſit B, quae puncta A et B in figura notata ſunt intelligenda, tum omnes curuae hac aequatione $y = X + x^m (a-x)^n P$ contentae per eadem duo puncta A et B tranſibunt.

Coroll. 3.

4. Si in curua, cuius aequatio $y = X$, notentur tria puncta A, B, C, quae tribus abſciſſis $x = o$, $x = a$, $x = b$ conueniant, ſimili modo infinitae aliae curuae exhiberi poterunt, quae per eadem tria puncta A, B, C tranſibunt, omnes enim hac aequatione generali continebuntur $y = X + x^m (a-x)^n (b-x)^p P$.

Coroll.

Coroll. 4.

5. Simili modo facile erit infinitas curuas inuenire, quae per quatuor pluraue puncta data datae curvae $y=X$ tranſeant, ſi enim haec puncta ſint A,B,C,D, etc. quae reſpondeant abſciſſis;

$$x=o, \quad x=a, \quad x=b, \quad x=c, \text{ etc.}$$

curuae quaeſitae hac comprehendentur aequatione:

$$y=X+x^m(a-x)^n(b-x)^p(c-x)^q \text{ etc. } P$$

dummodo exponentes m,n,p,q etc. ſint nihilo maiores, nullusque factorum per indolem functionis P deſtruatur.

Coroll. 5.

6. Si ergo curua data ſit circulus, in eiusque peripheria puncta quotcunque notentur, aliae infinitae curuae deſcribi poterunt, quae per omnia haec puncta tranſeant.

Scholion 1.

7. Si coordinatae curuae datae per functiones quasdam nouae variabilis u dentur, ita, vt ſit:

$$x=U \quad \text{et} \quad y=V$$

huiusque curuae duo puncta A et B reperiantur ſi ponatur $u=f$ et $u=g$, ita vt poſito $u=f$ fiat $x=o$ et poſito $u=g$ fiat $x=a$; tum infinitae aliae inuenientur curuae per eadem duo puncta A et B tranſeuntes, ope harum formularum:

$$x=U+(f-u)^\mu(g-u)^\nu P$$
$$\text{et } y=V+(f-u)^m(g-u)^n Q$$

quae-

quaecunque functiones ipſius u loco P et Q ſcribantur dummodo factorum nullus deſtruatur, exponentesque μ, ν, m, n nihilo ſint maiores. Perſpicuum eſt enim, ſiue ponatur $u = f$, ſiue $u = g$, coordinatas x et y prodire plane easdem, quaecunque functiones litteris P et Q tribuantur. Simili etiam modo ſolutio adornabitur, ſi curuae quaeſitae per tria pluraue puncta data curuae propoſitae tranſire debeant; atque etiam patet hoc modo non ſolum curuas algebraicas, ſed etiam tranſcendentes cuiusque ordinis exhiberi poſſe, cum nihil impediat, quominus pro P et Q etiam functiones tranſcendentes ipſius u accipiantur.

Scholion 2.

8. Cuique patet, functionibus P et Q eiusmodi adiunctos eſſe factores, qui vtroque caſu propoſito $u = f$ et $u = g$ euaneſcant, ita vt his caſibus, quibus oriuntur abſciſſae $x = o$ et $x = a$, poſteriora vtriusque formulae membra euaneſcant, indeque pro coordinatis iidem prodeant valores $x = U$ et $x = V$, qui ipſi curvae propoſitae conueniunt. Haec ergo conditio vt impleatur, haec iſtorum factorum forma $(f-u)^m (g-u)^n$ ſimpliciſſima et commodiſſima eſt viſa; interim tamen occurrere poſſunt caſus, quibus haec forma idoneos non ſuppeditat factores, veluti ſi alterum curuae punctum obtineatur ponendo $u = \infty$, ita vt ſit $g = \infty$; tum enim huius modi factor $(f-u)^m (\infty - u)^n$ calculum maxime perturbaret. Hoc autem caſu non erit difficile eiusmodi formas excogitare in terminis finitis, quae tam

caſu

caſu $u=f$, quam caſu $u=\infty$ euaneſcant: ſcilicet huic conditioni ſatisfaciet haec forma $\frac{(f-u)^m}{(k+u)^n}$ dummodo ſit $n>m$, quo caſu $u=\infty$ numerator prae denominatore, etiamſi vterque fiat infinitus, euaneſcat; k autem ita capi debet, vt numerator et denominator communem non adipiſcantur diuiſorem. Ita ſi ambo puncta data prodeant ex valoribus $u=0$ et $u=\infty$, factores idonei erunt:

$$\frac{u}{(k+u)^2} \text{ vel } \frac{u}{k+u^2} \text{ vel } \frac{u^m}{A+Bu^\alpha+Cu^\beta+Du^\gamma \text{ etc.}}$$

dummodo in denominatore altior occurrat poteſtas ipſius u, quam eſt numerator u^m.

Problema 2.

9. Infinitas inuenire lineas curuas, quae non ſolum per data duo puncta tranſeant, ſed etiam in his punctis communi gaudeant tangente.

Solutio.

Sit vt ante $y=X$ aequatio pro vna curua, quae datam habeat proprietatem, atque duo puncta data oriantur ex valoribus abſciſſae $x=0$ et $x=a$.

Iam vt omnes curuae quaeſitae per eadem puncta tranſeant, videmus eas hac contineri aequatione:

$$y=X+x^m(a-x)^n P$$

exiſtente P functione quacunque ipſius x. Tum vero, vt in his punctis omnes curuae communi tangente gau-

deant, neceſſe eſt, vt caſu vtroque $x=0$ et $x=a$, valor $\frac{dy}{dx}$ idem plane prodeat, qui oritur ex aequatione $y=X$, ſeu vt is ſit $=\frac{dX}{dx}$. Fiet autem inde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}+mx^{m-1}(a-x)^nP-nx^m(a-x)^{n-1}P+x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$$

vbi manifeſtum eſt hunc valorem redigi ad $\frac{dX}{dx}$ caſibus $x=0$ et $x=a$, ſi non ſolum exponentes m et n, ſed etiam $m-1$ et $n-1$ fuerint nihilo maiores. Quamobrem aequatio

$$y=X+x^m(a-x)^nP$$

etiam in propoſitis duobus punctis eandem tangentium poſitionem praebebit, ſi exponentes m et n non ſolum nihilo, ſed etiam vnitate fuerint maiores.

Simili modo ſi ambae coordinatae x et y per nouam variabilem u dentur, cuius valores $u=f$ et $u=g$ data duo puncta exhibeant, infinitae curuae quaeſito ſatisfacientes in his formulis continebuntur.

$$x=U+(f-u)^m(g-u)^nP$$
$$\text{et } y=V+(f-u)^\mu(g-u)^\nu Q$$

quaecunque functiones ipſius u, ſiue algebraicae, ſiue transcendentes, pro P et Q ſubſtituantur, dummodo, quae cautio ſemper eſt tenenda, neutra factorem ſibi adiunctum deſtruat. Inſuper vero ad communionem tangentium in his punctis requiritur, vt exponentes m, n, μ, ν ſinguli ſint vnitate maiores. Quoniam enim tum vtroque caſu $u=f$ et $u=g$ fit $\frac{dx}{du}=\frac{dU}{du}$ et $\frac{dy}{du}=\frac{dV}{du}$, erit etiam $\frac{dy}{dx}=\frac{dV}{dU}$, qui valor a functionibus P et Q neutiquam pendet.

Coroll.

Coroll. 1.

10. Data ergo curua quacunque intra duo puncta A et B deſcripta, cuius aequatio inter coordinatas x et y eſt vel $y = X$, vel his formulis continetur $x = U$ et $y = V$, infinitae aliae curuae exhiberi poſſunt, quae non ſolum per eosdem terminos A et B transeant, ſed etiam in his punctis communi tangente gaudeant.

Coroll. 2.

11. Quodſi exponentes in formulis inuentis adhibiti non ſolum vnitate, ſed etiam binario, fuerint maiores, tum etiam vtroque caſu $x = o$ et $x = a$, vel $u = f$ et $u = g$, hoc eſt in ambobus terminis, differentialia ſecundi gradus inter ſe conuenient. Scilicet in his punctis non ſolum omnium curuarum inuentarum eadem erit directio, ſed etiam eandem curuaturam habebunt.

Scholion.

12. Quemadmodum ergo ante vidimus, ſi habeatur variabilis cuiusdam u talis functio z, vt ſit

$$z = (f-u)^m (g-u)^n P$$

vtroque caſu $u = f$ et $u = g$ fieri $z = o$, quaecunque P fuerit functio ipſius u, dummodo exponentes m et n fuerint nihilo maiores: ita nunc porro patet:

II. Si exponentes m et n fuerint vnitate maiores, fore vtroque caſu $u = f$ et $u = g$

$$\text{et } z = o \text{ et } \frac{dz}{du} = o$$

 III. Si

III. Si exponentes m et n fuerint binario maiores, fore vtroque caſu $u=f$ et $u=g$

et $z=0$, et $\frac{dz}{du}=0$ et $\frac{ddz}{du^2}=0$

IV. Si exponentes m et n ſint ternario maiores, fore vtroque caſu $u=f$ et $u=g$

et $z=0$ et $\frac{dz}{du}=0$ et $\frac{ddz}{du^2}=0$ et $\frac{d^3z}{du^3}=0$ etc.

Perſpicuum eſt, quae hic de duobus caſibus $u=f$ et $u=g$ ſunt annotata, etiam ad caſus tres, nempe $u=f$, $u=g$, et $u=h$ extendi, ſi aequatio fuerit huiusmodi:

$$z=(f-u)^m(g-u)^n(h-u)^p P$$

Quodſi autem in caſu duorum punctorum fuerit $g=\infty$ tum loco factoris $(f-u)^m(g-u)^n$ capi debet factor huius formae $\frac{(f-u)^m}{\alpha+\beta u^\mu+\gamma u^\nu+\text{etc.}}$ ita vt in denominatore ſummae poteſtatis exponens ſit maior quam m, atque tum ex ſolo exponente m definietur, ad quemnam vsque ordinem differentialia ipſius z his duobus caſibus euaneſcant.

Problema 3.

13. Per data duo puncta infinitas ducere lineas curuas, quae omnes cum axe et applicatis extremis aequales areas includant.

Solutio.

Reſpondeant puncta haec data abſciſſis $x=0$ et $x=a$, ac poſita cuiusque curuae applicata $=y$, erit aequa-

aequatio generalis pro omnibus curuis per haec duo puncta tranſeuntibus:

$$y = X + x^m (a-x)^n P$$

dummodo curua $y = X$ per haec duo puncta tranſeat. Cum iam area huius curuae ſit

$$\int y\,dx = \int X\,dx + \int x^m (a-x)^n P\,dx$$

quia ea euaneſcere debet poſito $x = 0$, poſito autem $x = a$ aequalis eſſe debet $\int X\,dx$, manifeſtum eſt, integrale $\int x^m (a-x)^n P\,dx$ euaneſcere debere vtroque caſu $x = 0$ et $x = a$. Sit igitur

$$\int x^m (a-x)^n P\,dx = x^{m+1} (a-x)^{n+1} Q$$

quam formam ideo aſſumo, vt inde P ſine fractionibus determinetur. Hinc ergo fiet

$$P = (m+1)(a-x)Q - (n+1)xQ + x(a-x)\frac{dQ}{dx}, \text{ ſeu}$$

$$P = ((m+1)a - (m+n+2)x)Q + \frac{x(a-x)\,dQ}{dx}$$

Quare pro curuis quaeſitis aequatio generalis erit

$$y = X + ((m+1)a - (m+n+2)x)x^m (a-x)^n Q + x^{m+1} (a-x)^{n+1} \frac{dQ}{dx}$$

quaecunque enim pro Q aſſumatur functio ipſius x, dummodo exponentes m et n ſint nihilo maiores, omnes curuae per data duo puncta tranſibunt et cum axe et applicatis extremis, quae ſcilicet abſciſſis $x = 0$ et $x = a$ reſpondent, easdem includent areas, atque curua aequatione $y = X$ contenta.

Aliter

Sit $\int y\,dx = z$ erit $y = \frac{dz}{dx}$. Iam vt quaeſito ſatisfiat, pro z eiusmodi functionem ipſius x quaeri oportet, vt vtroque caſu $x = 0$ et $x = a$, tam valor ipſius z quam ipſius $\frac{dz}{dx}$ pro omnibus curuis prodeat idem, id quod euenit, ſi ſtatuatur

$$z = Z + x^m (a-x)^n P$$

dummodo exponentes m et n ſint vnitate maiores, quaecunque enim pro P aſſumatur functio ipſius x, vtroque caſu $x = 0$ et $x = a$, tam pro z, quam pro y, iidem prodibunt valores. Sit $Z = \int X\,dx$ erit

$$dz = X\,dx + (ma - (m+n)x) x^{m-1} (a-x)^{n-1} P\,dx + x^m (a-x)^n dP$$

Pro curuis ergo quaeſitis haec habebitur aequatio generalis:

$$y = X + (ma - (m+n)x) x^{m-1} (a-x)^{n-1} P + x^m (a-x)^n \frac{dP}{dx}$$

dummodo numeri m et n ſint vnitate maiores, quae ſolutio cum praecedente congruit. Pro numeris enim m et n ibi vſurpatis hic poſuimus $m-1$ et $n-1$, atque Q pro P.

Coroll. 1.

14. Data ergo curua quacunque $y = X$ eiusue ſaltem portione intra abſciſſas $x = 0$ et $x = a$ contenta, aequatio inuenta infinitas alias praebebit curuas, quae non ſolum per eosdem terminos transibunt, ſed etiam intra hos terminos aequales areas complectentur.

Coroll.

Coroll. 2.

15. Si in ſolutione poſteriori exponentes *m* et *n* fuerint non ſolum vnitate, ſed etiam binario, maiores, tum omnes hae curuae etiam in vtroque termino communem habebunt tangentem. Quin etiam inſuper communem habebunt curuaturam, ſi exponentes illi *m* et *n* quoque ternario erunt maiores.

Coroll. 3.

16. Si curua data $y = X$ fuerit algebraica, non ſolum infinitae aliae curuae algebraicae eiusdem areae hinc reperientur, ſed etiam infinitas curuas tranſcendentes eiusdem proprietatis exhibere licebit, ſiquidem pro P functiones transcendentes ipſius x aſſumantur.

Coroll. 4.

17. Si pro P ſumatur quantitas conſtans quaecunque C, hinc iam pro infinitis ipſius C valoribus infinitae reperientur curuae, cum data $y = X$, tam eosdem terminos, quam eandem aream habentes, quae in hac aequatione continebuntur:

$$y = X + C(ma - (m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}$$

exiſtentibus numeris *m* et *n* vnitate maioribus.

Coroll.

Coroll. 5.

18. Si ambo termini A et B, qui abſciſſis $x=0$, et $x=a$ reſpondent recta AB iungantur, erit haec recta omnium curuarum inuentarum corda communis. Atque etiam areae, quas omnes hae curuae cum iſta corda continent, inter ſe erunt aequales, quatenus quidem ad eandem cordae partem fuerint ſitae; quae enim portiones forte in partem oppoſitam cadent, eae pro negatiuis ſunt habendae.

Exemplum 1.

19. *Propoſito circuli quadrante, inuenire infinitas alias curuas intra eosdem terminos deſcriptas, quae eandem aream includant.*

Sit radius circuli $=a$, eiusque aequatio $y=\surd(aa-xx)$ prodibunt quadrantis termini ſi ponatur $x=0$, et $x=a$ et poſita $1:\pi$ ratione diametri ad peripheriam erit area quadrantis $=\frac{1}{4}\pi aa$, cui aequales eſſe debent areae omnium curuarum per quadrantis terminos ductarum. Omnes ergo iſtae curuae hac continebuntur aequatione:
$$y=\surd(aa-xx)+(ma-(m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}P+x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$$
vbi m et n debent eſſe numeri vnitate maiores.

Ut hinc curuam quampiam ſimpliciorem eliciamus, ponamus $m=2$; $n=\frac{3}{2}$ et $P=C(a+x)^{\frac{5}{2}}$ erit $dP=\frac{5}{2}Cdx(a+x)^{\frac{3}{2}}$, vnde fiet

$y=$

$$y = \sqrt{(aa-xx)} + C(2a-\tfrac{7}{2}x)x(a+x)\sqrt{(aa-xx)}$$
$$+ \tfrac{3}{2}Cx^3(a-x)\sqrt{(aa-xx)}$$

ſeu $y = \sqrt{(aa-xx)} + Cx(2aa-xx)\sqrt{(aa-xx)}$

Ad homogeneitatem conſeruandam ſit $C = \frac{1}{\alpha a^3}$ vt fiat $y = \frac{(\alpha a^3 + 2aax - 5x^3)\sqrt{(aa-xx)}}{\alpha a^3}$

ſi ponamus $m = 3$, $n = \frac{5}{2}$, $P = C(a+x)^{\frac{5}{2}}$ et $C = \frac{1}{5a^6}$

$$y = \frac{(aa+3xx)(aa-xx)^{\frac{5}{2}}}{a^4}$$

Exemplum 2.

20. *Propoſitus ſit ſemicirculus terminos ſuos in diametri terminis habens, atque inuenire oportet infinitas alias curuas per terminos diametri tranſeuntes, quae omnes cum diametro areas ſemicirculo aequales includant.*

Sit diameter $= a$, erit aequatio $y = \sqrt{(ax-xx)}$, vnde cum fiat $y = o$, poſito tam $x = o$, quam $x = a$, idem quoque in omnibus curuis, quae quaeruntur, euenire debet; deinde, quia etiam areae, earum diametro inſiſtentes, ipſi ſemicirculo aequales eſſe debent, huic conditioni ſatisfiet hac aequatione generali:

$$y = \sqrt{(ax-xx)} + (ma-(m+n)x)x^{m-1}(a-x)^{n-1}P + x^m(a-x)^n\frac{dP}{dx}$$

dummodo pro m et n accipiantur numeri vnitate maiores. Quoniam igitur etiam pro P functionem quamcunque ipſius x aſſumere licet, modo ne inconuenienti aliquoties memorato ſit obnoxia, patet omnes omnino curuas quaeſtioni ſatisfacientes in hac aequatione contineri debere.

Ut curuam quampiam ſimpliciorem eruamus, ponamus $m=\frac{1}{2}$ et $n=\frac{1}{2}$, vt ſit:

$$y=V(ax-xx)+(3(\tfrac{1}{2}a-x)P+x(a-x)\tfrac{dP}{dx})V(ax-xx)$$

Ponatur $P=\frac{x}{3b}$ fietque:

$$y=V(ax-xx)+\frac{(a-2x)}{b}V(ax-xx)$$

ſit $b=$ vel $y=\frac{(b+a-2x)}{b}V(ax-xx)$

pro linea quarti ordinis.

Si iam ſit $b=-a$, erit $y=\frac{2x}{a}V(ax-xx)$.

Haec ergo curua, ſuper diametro ſemicirculi deſcripta, aream habebit ſemicirculo aequalem. Eadem curua ſitu inuerſo prodit, ſi ponatur $b=a$.

Scholion.

21. Prior huius problematis ſolutio etſi magis naturalis videtur, tamen in problematibus difficilioribus locum non inuenit. Hinc ob cauſam adieci alteram ſolutionem, cuius fundamentum in eo eſt poſitum, quod expreſſionem areae integralem $\int y\,dx$ ante ad expreſſionem finitam reuocauerim. Haec enim reductio omnino neceſſaria deprehenditur, ſi formulae integrales, quae loco arearum ſunt conſiderandae, magis fuerint complicatae. Veluti ſi omnes curuae per data duo puncta ducendae eiusdem longitudinis eſſe debeant, ita vt iam non $\int y\,dx$ ſed $\int V(dx^2+dy^2)$ datum valorem inter abſciſſas $x=o$ et $x=a$ continere debeat; tentanti mox patebit, formam aſſumtam $y=X+x^m(a-x)^nP$ parum iuuare ad idoneas functiones pro P eruendas. Quanquam enim arcus $\int V(dx^2+dy^2)$ ſimili expreſſione con-

contineri debet, ſcilicet $\int V(dx^2+dX^2)+x^\mu(a-x)^\nu Q$, ita, vt hoc poſterius membrum pariter vtroque caſu $x=o$ et $x=a$ euaneſcat, tamen inſtituto calculo ad aequationem tantopere implicatam peruenitur, vt inde nullo modo relatio inter functiones P et Q erui poſſe videatur. Hoc ergo incommodum vt euitetur, coordinatae x et y primum ita per alias formulas erunt exprimendae, vt inde arcus per formulam finitam expreſſus prodeat, id quod praeſtari poterit per methodum Diophanteae analogam in analyſi infinitorum, cuius nuper quaedam ſpecimina in medium attuli.

Problema 4.

22. Infinitas inuenire curuas per data duo puncta tranſeuntes, ita vt omnium arcus inter haec duo puncta comprehenſi ſint inter ſe aequales.

Solutio.

Poſitis coordinatis x et y ſit arcus $\int V(dx^2+dy^2)=s$; iam vt hae tres quantitates per nouam variabilem formulis a ſigno integrali liberis exprimatur, ſit $dy=pdx$ eritque

$$\left.\begin{array}{l} y=\int p\,dx=px-\int x\,dp \\ s=\int dx\,V(1+pp)=xV(1+pp)-\int\frac{xp\,dp}{V(1+pp)} \end{array}\right\} \text{ponatur } \begin{array}{l} \int x\,dp=q \\ \int\frac{xp\,dp}{V(1+pp)}=r \end{array}$$

erit $x=\frac{dq}{dp}=\frac{dr\,V(1+pp)}{p\,dp}$, vnde ſit $dr\,V(1+pp)=p\,dq$ et $p=\frac{dr}{V(dq^2-dr^2)}$ vbi r denotet functionem quamcunque ipſius q. Cum igitur, ſumto elemento dq conſtante, ſit $dp=\frac{dq^2\,ddr}{(dq^2-dr^2)^{\frac{3}{2}}}$

per

per hanc nouam variabilem q coordinatae x et y cum arcu s ita exprimentur, vt ſit

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr}$$
$$y = \frac{dr(dq^2 - dr^2)}{dq\,ddr} - q$$
$$s = \frac{dq^2 - dr^2}{ddr} + r.$$

Sint iam f et g valores ipſius q, qui praebeant pro punctis datis abſciſſas, nempe $x=0$ et $x=a$; ac ponatur

$$r = Q + (f-q)^m (g-q)^n Z$$

vbi Q ſit functio data ipſius q, Z vero functio quaecunque indefinita, ita vt, hac variabilitate non obſtante, haec formula quaeſtioni aeque ſatisfaciat, ac ſi eſſet $Z=0$. Nunc manifeſtum eſt, ſi exponentes m et n fuerint binario maiores, tum vtroque caſu $q=f$ et $q=g$, non ſolum pro r, ſed etiam pro $\frac{dr}{dq}$ et $\frac{ddr}{dq^2}$ eosdem prodire valores, quaecunque functio ipſius q pro Z ſubſtituatur. Hinc vtroque caſu $x=0$ et $x=a$, tam applicata y, quam arcus s, eosdem quoque nanciſcentur valores, atque idcirco omnes infinitae curuae, quae ex diuerſitate functionis Z naſcuntur, non ſolum per data duo puncta tranſibunt, ſed etiam omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, inter ſe erunt aequales.

Aliter.

Poſſunt etiam aliae formulae a ſigno integrali liberae pro x, y et s inueniri, quae ad ſolutionem ſimpliciorem deducent. Ponatur ſcilicet, vt ante, $\int x\,dp = q$, vt

vt ſit $x = \frac{dq}{dp}$, hicque valor in altera formula integrali ſubſtitutus dabit:

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{p\,dq}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pq}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Iam ponatur $\frac{\int q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = r$, eritque $q = \frac{dr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, vbi r ſignificat functionem quamcunque ipſius p. Sumto ergo dp conſtante, erit $dq = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp} + 3p\,dr\sqrt{(1+pp)}$, ideoque $x = \frac{dq}{dp} = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$.

Tum vero habebitur $y = px - q = \frac{p\,ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$ et $s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2p\,dr(1+pp)}{dp} - \frac{p\,dr(1+pp)}{dp} + r$.

Ergo per hanc nouam variabilem p, cuius r eſt functio quaecunque, coordinatae x, y cum arcu s ita erunt expreſſae:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{p\,ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2p\,dr(1+pp)}{dp} + r.$$

Sint iam f et g valores ipſius p, qui praebent pro datis duobus punctis abſciſſas $x = 0$ et $x = a$, ac ponatur:

$$r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$$

vbi P denotet functionem ipſius p datam, Z vero indefinitam; ſintque exponentes m et n binario maiores. Cum igitur quaecunque Z ſit functio caſibus $x = 0$ et $x = a$, tam pro r, quam pro $\frac{dr}{dp}$ et $\frac{ddr}{dp^2}$ iidem prodeant

 valo-

valores, ac ſi eſſet $Z = o$ et $r = P$, perſpicuum eſt etiam caſibus $p = f$ et $p = g$ pro x, y et s eosdem prodituros eſſe valores, ſcilicet pro x valores o et a. Conſequenter omnes iſtae curuae per data duo puncta tranſibunt, eruntque omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, eiusdem longitudinis.

Coroll. 1.

23. Si in ſolutione priore Q, in poſteriori vero P, ſit functio algebraica, atque pro Z etiam functiones algebraicae capiantur, omnes curuae inde oriundae non ſolum erunt algebraicae, ſed etiam rectificabiles. Sin autem pro Z ſumantur functiones tranſcendentes, ipſae curuae fient tranſcendentes, earumque rectificatio indefinita a quapiam quadratura pendebit.

Coroll. 2.

24. Sin autem in ſolutione priori pro Q, in poſteriori vero pro P, eiusmodi capiantur functiones tranſcendentes, vt ibi $\frac{dQ}{dq}$, hic vero $\frac{dP}{dp}$, fiant functiones algebraicae, inſuperque Z ſit functio algebraica, tum curuae quidem erunt algebraicae, ſed non rectificabiles.

Coroll. 3.

25. Duo puncta, per quae omnes curuae inueniendae tranſire debent, reperiuntur ex binis valoribus f et g, ſi ii in ſolutione priori pro q, in poſteriori vero pro

pro p, ſubſtituantur. Vnde patet eandem ſolutionem locum habere, vbicunque duo illa puncta aſſignentur.

Coroll. 4.

26. Aſſumtis autem pro lubitu his valoribus f et g, viciſſim duo illa puncta omnibus curuis communia reperientur; atque, quo hoc facilius expediatur, functio Z pro nihilo habeatur, quoniam, quaecunque fuerit haec functio, eadem ſemper puncta reperiuntur.

Coroll. 5.

27. Si loco membrorum $(f-q)^m(g-q)^n$ Z in priori, vel $(f-p)^m(g-p)^n$ Z in poſteriori, adhibeantur huiusmodi $(f-q)^m(g-q)^n(b-q)^\mu$ Z in priori, vel $(f-p)^m(g-p)^n(b-p)^\mu$ Z in poſteriori ſolutione, tum omnes curuae in formulis inuentis contentae, per tria data puncta A, B, C tranſibunt, atque non ſolum omnes arcus AB, ſed etiam omnes arcus BC, ac proinde etiam AC, erunt inter ſe longitudine aequales, dummodo exponentes ſinguli m, n, et μ fuerint binario maiores.

Coroll. 6.

28. Simili modo infinitae curuae inueniri poterunt quae per quatuor pluraue puncta data tranſibunt, et quarum omnium arcus, inter bina quaeque puncta intercepti, futuri ſint inuicem aequales.

Scho-

Scholion.

29. Formulae $(f-q)^m (g-q)^n Z$ ita debent eſſe comparatae, vt vtroque caſu $q=f$ et $q=g$ non ſolum ipſae in nihilum abeant, ſed etiam earum differentialia prima et ſecunda, quod vtique euenit, ſi exponentes m et n fuerint binario maiores. Atque ſi f et g ſint quantitates finitae, in aſſumtione huiusmodi formularum nulla ineſt difficultas. Verum ſi alter valor g fiat infinitus, idem remedium erit adhibendum, quod iam ſupra eſt indicatum, ſcilicet tum formula ita debebit inſtrui:

$$\frac{(f-q)^m}{\alpha+\beta q^\mu+\gamma q^\nu \text{ etc.}} Z$$

vt ſummae poteſtatis in denominatore exponens maior ſit quam m, hinc vero m binario maiorem eſſe oportet. Atque vt hoc caſu conditiones problematis adimpleantur, vti Z non diuiſum eſſe debet per vllam poteſtatem ipſius $f-q$, ita etiam in numeratore ipſi q aequalem vel altiorem poteſtatem inducere non debet, quam in denominatore. Niſi ergo Z ſit quantitas, conſtans debet eſſe eiusmodi fractio, in cuius numeratore variabilis q non ad altiorem poteſtatem exſurgat, quam in denominatore. Sin autem eueniat, vt ambo valores f et g fiant infiniti, veluti $f=\infty$ et $g=-\infty$, tum manifeſtum eſt, pro illo altero membro aſſumi poſſe fractionem quamcunque, in cuius denominatore variabilis q altiorem habeat poteſtatem, quam in numeratore. Huiusmodi enim functio, non ſolum euaneſcet poſito $q=\infty$, ſed etiam eius differentialia omnium graduum.

Proble-

Problema 5.

30. Data curua quacunque inuenire infinitas alias, quae eam in datis duobus punctis interſecent, ita vt omnium arcus, inter haec duo puncta intercepti, aequales ſint arcui curuae datae inter eadem puncta contento.

Solutio.

Pro curua data reſpondeat abſciſſae x applicata $= v$, quae ergo functioni cuipiam ipſius x aequabitur. Pro curuis inueniendis vero ſit applicata abſciſſae x reſpondens $= y$ et arcus $= s$. Quoniam nunc ex praecedentis problematis ſolutione priore ſequentes formulae

$$x = \frac{(dq^2 - dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddr}$$

$$y = \frac{dr(dq^2 - dr^2)}{dq\,ddr} - q$$

$$s = \frac{dq^2 - dr^2}{ddr} - r$$

ſi ponatur $r = Q + (f-q)^m (g-q)^n Z$, pro variis functionis Z determinationibus, infinitas praebent curuas per duo puncta transeuntes, arcusque inter haec puncta aequales continentes, quae duo puncta ex valoribus $q = f$ et $q = g$ definiuntur, ſi modo pro m et n numeri accipiantur binario maiores; tantum opus eſt, vt curua data in his formulis generalibus reperiatur. Efficiamus ergo, vt hae formulae caſu $Z = 0$, curuam datam producant, et inueſtigemus, qualis functio ipſius q pro Q ad hoc obtinendum ſubſtitui debeat, ſeu quia hoc caſu eſt $r = Q$, quaeramus qualis functio r ipſius q eſſe debeat.

beat. Cum igitur pro curua data ſit v applicata reſpondens abſciſſae x, erit filum ſolutionis praecedentis euoluendo $p = \frac{dv}{dx}$ et $q = \int x\,dp = px - v$, ideoque $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, ex qua aequatione valor ipſius x per q definitur; deinde eſt $r = \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = x\sqrt{(1+pp)} - \int dx\sqrt{(1+pp)}$ ſeu $r = \frac{x\sqrt{(dx^2+dv^2)}}{dx} - \int\sqrt{(dx^2+dv^2)}$, vnde fit, ſi elementum x conſtans accipiatur, $dr = \frac{x\,dv\,ddv}{dx\sqrt{(dx^2+dv^2)}}$; atque ſi hic pro x ſubſtituatur eius valor per q iam inuentus, apparebit, qualis functio ipſius q ſit r, quae deinceps pro Q ſcribi debet. Ambo autem puncta data in curua propoſita reperientur, ponendo $q = f$ et $q = g$, vnde viciſſim ex datis punctis valores litterarum f et g elicientur. Quibus definitis ſi pro Q ſcribatur ille valor pro r inuentus ac per q expreſſus, pro Z autem functiones quaecunque ipſius q ſubſtituantur, infinitae prodibunt lineae curuae, per eadem duo puncta transeuntes, et interea pares cum curua propoſita arcus interceptos habentes.

Aliter.

Si alteram ſolutionem generalem problematis ſuperioris in ſubſidium vocemus, quae pro curuis quaeſitis ſequentes ſuppeditauerat formulas:

$$x = \frac{ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3p\,dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{p\,ddr(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dr\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \frac{ddr(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2p\,dr(1+pp)}{dp} + r$$

ponen-

ponendo $r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$, exiſtentibus m et n numeris binario maioribus: efficiendum eſt, vt hae formulae caſu $Z = o$ curuam propoſitam exhibeant. Cum igitur hoc caſu ſit $p = \frac{dv}{dx}$ hinc valor ipſius x per p definiatur. Deinde ob $q = \int x\,dp = px - v$ erit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, et $r = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$: quodſi ergo in q loco x valor eius per p inuentus ſubſtituatur, habebitur pro r functio ipſius p, quae curuam propoſitam producit. Haec iam functio ipſius p pro r inuenta loco P ſcribatur, ita vt ſit $P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et quaecunque functiones litterae Z tribuantur, ſemper eiusmodi valores habebuntur

pro $r = P + (f-p)^m (g-p)^n Z$

quae infinitas praebebunt curuas, datam in duobus punctis fixis interſecantes, et cum data inter haec duo puncta aequales arcus interceptos habentes. Quomodo autem ſi illa puncta pro lubitu dentur, inde valores debiti pro f et g ſint eruendi, ante eſt expoſitum.

Coroll. 1.

31. Cum in ſolutione priore ſit $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$, erit $dq = \frac{x\,ddv}{dx}$, hinc cum Q aequalis ſit valori ipſius r inde orto, erit $Q = \int \frac{dv\,dq}{\surd(dx^2 + dv^2)}$. At ob $dv = \frac{(q+v)\,dx}{x}$ erit quoque $Q = \int \frac{(q+v)\,dq}{\surd(xx + (q+v)^2)}$, vbi tantum opus eſt, vt pro x et v valores ex aequatione $q = \frac{x\,dv}{dx} - v$ per q

expreſſi ſubſtituantur; hocque modo pro Q obtinebitur debita functio ipſius q in formulis ſubſtituenda.

Coroll. 2.

32. Pro ſolutione altera valor ipſius x per p quaeri debet ex hac aequatione $p = \frac{dv}{dx}$; vnde ſimul ob aequationem inter v et x datam, elicitur valor ipſius v itidem per p expreſſus. Tum vero elabitur quoque $q = px - v$ per p, ideoque etiam functio quaeſita:

$$P = \int \frac{q\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(px-v)\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Coroll. 3.

33. Si linea propoſita eſſet recta, foret in ſolutione priori q, in poſteriori vero p quantitas conſtans, hincque etiam ibi Q, hic vero P, quantitates conſtantes. Quia ergo hoc caſu x, y et s per p definire non licet, manifeſtum eſt, ſolutionem non ſuccedere. Hoc autem per ſe eſt perſpicuum, quia linea recta eſt breuiſſima intra ſuos terminos, neque propterea inter eosdem terminos lineae curuae rectae aequales exhiberi poſſunt.

Exemplum.

34. Sit curua data circulus hac aequatione expreſſus: $v = \sqrt{(aa-xx)}$, erit $\frac{dv}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, et pro ſolutione priori $q = \frac{-xx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \sqrt{(aa-xx)} = \frac{-aa}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Hinc

Hinc $x = \frac{a\sqrt{(qq-aa)}}{q}$ et $v = \frac{-aa}{q}$. Vnde reperitur, $Q = \int \frac{(qq-aa)dq}{\sqrt{(aa(qq-aa)+(qq-aa)^2)}}$, ſiue $Q = \int \frac{dq}{q}\sqrt{(qq-aa)}$. Quare ſi ſtatuatur $r = \int \frac{dq}{q}\sqrt{(qq-aa)} + (f-q)^m(g-q)^n Z$, exiſtentibus m et n numeris binario maioribus, quaecunque functio ipſius q pro Z ponatur, ſequentes formulae

$$x = \frac{(dq^2-dr^2)^{\frac{3}{2}}}{dqddr} \text{ et } y = \frac{dr(dq^2-dr^2)}{dqddr} - q$$

infinitas exhibebunt lineas curuas, circulum in duobus punctis ſecantes, quarum omnium arcus inter haec puncta contenti, ipſi arcui circulari futuri ſint aequales. Haec autem duo puncta in circulo definientur ex abſciſſis $x = \frac{a\sqrt{(ff-aa)}}{f}$ et $x = \frac{a\sqrt{(gg-aa)}}{g}$. Viciſſim autem ſi hae abſciſſae dentur, erit f vel $g = \frac{-aa}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Pro altera ſolutione erit $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$, ideoque $x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $v = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde fit $q = px - v = a\sqrt{(1+pp)}$, ita vt functio quaeſita P hinc prodeat $P = \int \frac{adp}{1+pp}$ atque $r = \int \frac{adp}{1+pp} + (f-p)^m(g-p)^n Z$, et ambo puncta reſpondebunt abſciſſis $x = \frac{af}{\sqrt{(1+ff)}}$ et $x = \frac{ag}{\sqrt{(1+gg)}}$; vel ex datis his abſciſſis litterae f et g elicientur ex aequatione $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa-xx)}}$.

Sit breuitatis gratia $(f-p)^m(g-p)^n - Z = V$, vt ſit

$$r = \int \frac{adp}{1+pp} V, \text{ erit}$$

$$\frac{dr}{dp} = \frac{a}{1+pp} + \frac{dV}{dp} \text{ et}$$

$$\frac{ddr}{dp^2} = \frac{-2ap}{(1+pp)^2} + \frac{ddV}{dp^2}.$$

 Omnes

Omnes ergo curuae quaeſitae his formulis continebuntur:

$$x = \frac{-2ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{-2app}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{a(2pp-1)}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = -2ap + 2ap + \int\frac{adp}{1+pp} + \frac{ddV(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1+pp)}{dp} + V$$

ſiue

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{3pdV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pddV(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{(2pp-1)dV\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

$$s = \int\frac{adp}{1+pp} + \frac{ddV(1+pp)^2}{dp^2} + \frac{2pdV(1+pp)}{dp} + V$$

Scholion.

35. Pro altera hac ſolutione ſi valor ipſius p ad alterutrum punctum datum relatus eſt infinitus, quo caſu pro V huiusmodi valorem $\frac{(f-p)^m Z}{\alpha+\beta p^\mu+\gamma p^\nu + \text{etc.}}$ accipi oportere vidimus, vt maxima poteſtas ipſius p in denominatore maior ſit, quam eius maxima poteſtas in numeratore, ſequentem obſeruationem adiici conuenit, quae non ſolum in hoc exemplo, ſed in genere etiam eſt tenenda. Primo quae hactenus de hoc caſu ſunt tradita huc redeunt, vt pro V aſſumi debeat huiusmodi fractio, cuius numerator factorem habeat $(f-p)^m$, exponente m excedente binarium. Deinde vero requiritur, vt maxima poteſtas ipſius p in denominatore ſuperet maximam eius poteſtatem in numeratore

ratore. Verum etſi hoc modo caſu $p = \infty$ non ſolum ipſa quantitas V, ſed etiam $\frac{dV}{dp}$ et $\frac{ddV}{dp^2}$ euaneſcunt; tamen ad functiones ipſius p, per quas hae quantitates in noſtris formulis ſunt multiplicatae, ſpectari debent, ne ob eas haec euaneſcentia tollatur. Quae circumſtantia vt probe obſeruetur, ponamus in ea fractione, quae pro V aſſumitur, μ eſſe exponentem maximae poteſtatis ipſius p in numeratore, in denominatore vero eſſe $\mu + \nu$ exponentem maximae poteſtatis ipſius p. Iam caſu $p = \infty$, quo inferiores ipſius p poteſtates omnes prae maxima euaneſcunt, erit valor ipſius $V = \frac{A}{p^\nu}$ ipſius $\frac{dV}{dp} = \frac{B}{p^{\nu+1}}$ et ipſius $\frac{ddV}{dp^2} = \frac{C}{p^{\nu+2}}$, qui vtique hoc caſu $p = \infty$ euaneſcunt. Sed quoniam in noſtris formulis $\frac{dV}{dp}$ per $(2pp-1)\sqrt{(1+pp)}$ et per $p(1+pp)$ hoc eſt caſu $p = \infty$ per p^2 reperitur multiplicatum, ac $\frac{ddV}{dp^2}$ per $p(1+pp)^{\frac{3}{2}}$ et $(1+pp)^2$ hoc eſt per p^4, neceſſe eſt, vt poſito $p = \infty$ etiam $\frac{p^2 dV}{dp} = \frac{Bp^2}{p^\nu}$ et $\frac{p^4 ddV}{dp^2} = \frac{Cp^2}{p^\nu}$ euaneſcant. Vnde manifeſtum eſt exponentem ν binario maiorem eſſe debere. Hinc ergo concludimus: ſi duo puncta data reſpondeant valoribus $p = f$ et $p = \infty$, pro V aſſumi debere huiusmodi fractionem, cuius numerator primo factorem habeat $(f-p)^m$, in quo exponens m ſit binario maior, deinde

maxima

maxima poteſtas ipſius p in denominatore, non ſolum maior eſſe debet quam in numeratore, ſed etiam exceſſus maior eſſe debet, quam quadratum p^2; ita vt ſi μ ſit exponens maximae poteſtatis in numeratore, maximae poteſtatis in denominatore exponens maior eſſe debeat, quam $\mu + 2$. Simili modo ſi ambo puncta data conueniant valoribus $p = +\infty$ et $p = -\infty$, pro V quoque eiusmodi fractio aſſumi debebit, cuius denominator vltra quadratum maiores contineat poteſtates ipſius p quam numerator. His igitur notatis, exempli propoſiti ſequentes euoluamus caſus praecipuos.

Caſus I.

36. *Dato circuli quadrante infinitas aſſignare curvas per eius terminos tranſeuntes, ita vt ſingularum arcus intra hos terminos comprehenſi, aequales ſint arcui quadrantis.*

Poſito radio quadrantis $= a$, vt ſit $v = V(aa - xx)$ termini quadrantis reſpondebunt abſciſſis $x = 0$ et $x = a$. Cum iam ſit $p = \frac{-x}{\sqrt{(aa - xx)}}$, valores ipſius p erunt pro illo termino $p = 0$, pro hoc vero $p = \infty$, erit ergo $f = 0$; ideoque pro V eiusmodi aſſumi debet functio fracta, cuius numerator factorem habeat p, exiſtente exponente m binario maiore, denominatoris vero maxima poteſtas ipſius p ſupra quadratum excedat maximam poteſtatem in numeratore. Quibus praeceptis obſeruatis formulae ante datae omnes curuas quaeſtioni ſatisfacientes exhibebunt.

bunt. Ex quibus vt ſimpliciores eliciamus, ponamus $V = \frac{b p^3}{(1+pp)^3}$, ſit enim exponens maximae poteſtatis, in denominatore ternario ſuperat numeratorem. Erit ergo:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{3b(pp - p^4)}{(1+pp)^4} \text{ et } \frac{ddV}{dp^2} = \frac{6b(p - 5p^3 + 2p^5)}{(1+pp)^5}$$

qui valores in formulis noſtris ſubſtituti dabunt:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3bp(2 - 7pp + p^4)}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$y = \frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{3bpp(1 - 7pp + 2p^4)}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

$$s = \int \frac{adp}{1+pp} + \frac{bp(6 - 23pp + 6p^4)}{(1+pp)^3}$$

Aliter.

Obtinetur etiam arcus 90°, ſi termini conſtituantur $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, vnde fit $p = -1$ et $p = +1$, ita vt pro his terminis ſit $f = -1$ et $g = +1$. Quare V eiusmodi eſſe debet functio ipſius p, quae factorem habeat $(1+p)^m(1-p)^n$, exiſtentibus exponentibus m et n binario maioribus. Hincque poſito

$$V = (1+p)^m(1-p)^n Z$$

formulae ſuperiores omnes praebebunt curuas quaeſito ſatisfacientes. Simpliciores ergo prodibunt ponendo

$$V = b(1-pp)^3 \text{ vel } V = \frac{b(1-pp)^3}{1+pp}$$

Alio praeterea modo, idque generaliter, termini ambo ita definientur, vt inter eos arcus 90° contineatur, ſi

ponatur pro altero $\frac{x}{a} = \text{ſin}\,\Phi$, pro altero vero $\frac{x}{a} = -$ coſ. Φ. Cum igitur pro illo ſit $\sqrt{(aa-xx)} = a$ coſ. Φ pro hoc vero $\sqrt{(aa-xx)} = a$ ſin. Φ erunt ipſius p valores, alter $p = -$ tang. Φ, alter $p = +$ cot. Φ, ſicque erit $f = -$ tang. Φ et $g =$ cot. Φ: vnde valor ipſius V erit

$$V = (\text{tang.}\,\Phi + p)^m (\text{cot.}\,\Phi - p)^n Z$$

ac ſi $m = n > 2$, poſito cot. $\Phi -$ tang. $\Phi = \alpha$, erit

$$V = (1 + \alpha p - pp)^m Z$$

Caſus 2.

37. *Data ſemicircumferentia circuli, inuenire infinitas alias curuas illi aequales, atque intra ipſius terminos exiſtentes.*

Poſito circuli radio $= a$, vt ſit $v = \sqrt{(aa-xx)}$, termini circumferentiae, quia in diametri extremitatibus ſunt ſiti, orientur ex valoribus abſciſſae $x = a$ et $x = -a$: hinc autem ipſius p valores prodibunt $f = -\infty$ et $g = \infty$. Hinc, vti ante notauimus, functio V eiusmodi debet eſſe fractio, in cuius denominatore exponens maximae poteſtatis ipſius p plus quam binario ſuperet exponentem maximae poteſtatis in numeratore, haecque ſola conditio ſufficiet pro caſu propoſito. Caſus ergo ſimpliciores prodibunt ponendo

$$V = \frac{b}{p(1+pp)} \text{ vel } V = \frac{b+cp}{(1+pp)^2}$$

Notandum autem hic eſt, formam $\frac{b}{p(1+pp)}$ non conuenire, quoniam ex ea coordinatae x et y in infinitum eſſent

eſſent abiturae casu $p=0$; ita vt curuae intra datos terminos in infinitum excurrent; quare pro V eiusmodi formulas accipi oportet, vt nullo caſu, vel ipſa formula V, vel eius differentialia in infinitum abeant. Sit ergo

$$V=\frac{b+cp}{(1+pp)^2} \text{ eritque}$$

$$\frac{dV}{dp}=-\frac{4bp+c(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

$$\frac{ddV}{dp^2}=\frac{-b(4-20pp)-c(12p-12p^3)}{(1+pp)^4}$$

hineque pro conſtructione curuarum ſequentes obtinebuntur formulae:

$$x=\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}-\frac{4b(1-2pp)-3cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y=\frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}}-\frac{12bp^3-c(1+7pp-6p^4)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$s=\int\frac{adp}{1+pp}-\frac{3b(1-4pp)-3cp(3-2pp)}{(1+pp)^2}$$

Omnes hae curuae etiam diametro normaliter inſiſtent, atque ſi ſit $b=0$, earum applicatae maximae in centrum circuli cadent, quia poſito $p=0$ fit $x=0$; applicata autem maxima erit $=a+c$, atque ad vtramque partem curuae erunt ſibi ſimiles. Hae ergo curuae prae ceteris notatu dignae ex his formulis conſtruentur:

$$x=\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}-\frac{3cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$$

$$y=\frac{-a}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{c(1+7pp-6p^4)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} \text{ vnde erit}$$

$$s=\int\frac{adp}{1+pp}-\frac{3cp(3-2pp)}{(1+pp)^2}$$

 Hinc

Hinc porro intelligitur capi debere $c < \frac{1}{8}a$, ſi enim eſſet $c > \frac{1}{8}a$, tum ſumto p valde paruo, arcus s prodiret negatiuus, arcusque idcirco alicubi negatiuos valores nanciſcerentur, contra naturam quaeſtionis. Perſpicuum enim eſt, ſi applicata media et maxima $a+c$ certum terminum transgrediatur, fieri plane non poſſe, vt curua vno tractu procedens ſemicircumferentiae circuli eſſet aequalis. Pro c interim quantitates infinitae, tam affirmatiuae, quam negatiuae, accipi poſſunt, dummodo ſatis ſint paruae et quidem minores quam $\frac{1}{8}a$.

DE

DE INTEGRATIONE AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS.

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum primum occaſione inuentionum Ill. Comitis Fagnani hanc aequationem eſſem contemplatus, eiusmodi quidem relationem algebraicam inter variabiles x et y elicui, quae huic aequationi ſatisfaceret; ſed ea relatio non pro aequatione integrali completa haberi poterat, propterea quod non complecteretur quantitatem conſtantem arbitrariam, cuiusmodi ſemper in calculum per integrationem introduci ſolet. Hinc enim, vti ſatis notum eſt, integralia incompleta et particularia diſtingui ſolent, quorum illa totam vim aequationum differentialium exhauriunt, haec vero tantum ita ſatisfaciunt, vt aliae inſuper expreſſiones aeque ſatisfacere queant. Criterium autem aequationis integralis completae in hoc conſiſtit, quod ea quantitatem conſtantem inuoluere debeat, quae in aequatione differentiali non apparet.

§. 2. Quae quo clarius perſpiciantur, ſufficiet, aequationem differentialem ſimpliciſſimam $dx = dy$ conſideraſſe, cui vtique ſatisfacit haec integralis $x = y$, in rem tamen haec integralis minus late patet, quam differentialis $dx = dy$, cum huic aeque ſatisfaciat haec integralis $x = y + a$ multo latius patens, ſumendo pro a quantitatem conſtantem quamcunque, atque haec demum integralis totam vim aequationis differentialis $dx = dy$ exhaurire cenſetur, ex quo etiam aequatio integralis completa appellatur; propterea quod in ea ineſt quantitas conſtans a, quae in aequatione differentiali non occurrit. Quodſi vero loco iſtius conſtantis indefinitae a valores determinati ſubſtituantur, ex integrali completo obtinentur integralia particularia, quae ob hanc ipſam rationem minus late patent, quam aequatio differentialis propoſita.

§. 3. Saepe numero autem aequationis differentialis integrale particulare algebraicum exhiberi poteſt, cum tamen integrale completum ſit tranſcendens; hoc ſcilicet euenit, ſi pars tranſcendens per conſtantem illam arbitrariam fuerit multiplicata, quae propterea, conſtante illa nihilo aequali poſita, ex calculo euaneſcit, et integrale algebraicum particulare relinquit. Ita huic aequationi $dy = dx + (y - x)dx$ manifeſtum eſt, ſatisfacere valorem $y = x$, quo tamen tantum integrale particulare continetur, cum completum ſit $y = x + ae^x$, denotante e numerum, cuius logarithmus eſt $= 1$. Niſi igitur conſtans arbitraria a euaneſcens ponatur, integrale ſemper erit tranſcendens.

§. 4.

§. 4. Cum igitur euenire queat, vt aequatio differentialis integrale particulare algebraicum admittat, etiamſi integrale completum ſit tranſcendens, ita etiam rationes dubitandi non deſunt, quod integrale completum aequationis differentialis propoſitae $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ quantitates tranſcendentes inuoluat, etiamſi pro ea integrale particulare algebraicum exhibere licuerit. Cum enim integrale completum ſit:

$$m\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = n\int\frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)}} + C$$

haec autem integralia nullo modo, neque circuli, neque hyperbolae, quadraturam in ſubſidium vocando, aſſignari queant, minime probabile videtur, iſtas formulas tantopere tranſcendentes in genere, ita vt conſtans C maneat indeterminata, ad relationem algebraicam inter x et y reuocari poſſe.

§. 5. Notum quidem eſt, integrale completum huius aequationis differentialis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ ſemper algebraice exhiberi poſſe, dummodo proportio coëfficientium m et n fuerit rationalis; ſed quia vtriusque formulae integrale arcum circuli indicat, ita vt integrale completum ſit $m\,\mathrm{A\,ſin.}\,x = n\,\mathrm{A\,ſin.}\,y + C$, relatio autem ſinuum, qui ad arcus proportionem rationalem inter ſe tenentes ſpectant, algebraice exprimi poteſt, mirum non eſt, aequationem integralem completam his caſibus quoque algebraice exhiberi poſſe. Cum autem huiusmodi comparatio in formulis tranſcendentibus $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ et $\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ locum non habeat, ſeu ſaltem non conſtet,

ſtet, inde reductio integralis ad quantitates algebraicas peti non poterit.

§. 6. Nihilo tamen minus obſeruaui, ſi propoſita fuerit huiusmodi aequatio differentialis

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

etiam integrale completum, quod ſcilicet quantitatem conſtantem arbitrariam inuoluat, ſemper algebraice exprimi poſſe, dummodo ratio $m:n$ fuerit rationalis: quod mihi quidem eo magis notatu dignum videtur, quod nulla certa methodo ad hoc integrale ſum perductus, ſed id potius tentando, vel diuinando, elicui. Vnde nullum eſt dubium, quin methodus directa, ad idem hoc integrale perducens, fines analyſeos non mediocriter ſit amplificatura; cuius propterea inueſtigatio Analyſtis omni ſtudio commendanda videtur.

§. 7. Completum autem integrale aequationis iſtius differentialis, quaecunque fuerit ratio rationalis coëfficientium m et n, deriuare mihi licuit ex integratione completa huius aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$: hac enim conceſſa methodum certam indicabo, ex ea quoque integrale completum huius aequationis multo latius patentis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ concludendi. Quae methodus etiam in genere ad huiusmodi aequationum $mX\,dx = nY\,dy$ integralia inuenienda adhiberi queat, ſi modo integrale completum huius $X\,dx = Y\,dy$ fuerit erutum, atque Y talem ſignificet functionem ipſius y, qualis X eſt ipſius x.

§. 8.

§. 8. Exordiar igitur ab hac aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

cui quidem primo intuitu ſatisfacere perſpicuum eſt aequationem $x=y$, quae propterea eius eſt integrale particulare. Tum vero eidem aequationi quoque ſatisfacit iſte valor algebraicus $x = -\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$, cum enim ſit $dx = + \frac{2y\,dy}{(1+yy)\sqrt{(1-yy)(1+yy)}}$ et $\sqrt{(1-x^4)} = \frac{2y}{1+yy}$ erit $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$. Hinc iſte etiam valor, ſeu aequatio $xxyy + xx + yy - 1 = 0$ eſt integralis particularis aequationis differentialis propoſitae. Vnde integrale completum, quod conſtantem arbitrariam inuoluat, ita comparatum ſit neceſſe eſt, vt tribuendo huic conſtanti certum quendam valorem, prodeat $x=y$; ſin autem eidem conſtanti alius quidem valor tribuatur, vt prodeat $x = -\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$ ſeu $xxyy + xx + yy - 1 = 0$.

Theorema.

§. 9. Dico igitur huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

aequationem integralem completam eſſe:

$$xx + yy + ccxxyy = cc + 2xy\sqrt{(1-c^4)}$$

Demonſtratio.

Poſita enim hac aequatione, eius differentiale erit:

$$xdx + ydy + ccxy(xdy + ydx) = (xdy + ydx)\sqrt{(1-c^4)}$$

 vnde

vnde fit

$$dx(x+ccxyy-y\sqrt{(1-c^4)})+dy(y+ccxxy-x\sqrt{(1-c^4)})=0$$

Ex eadem vero aequatione reſoluta colligitur:

$$y=\frac{x\sqrt{(1-c^4)}+c\sqrt{(1-x^4)}}{1+ccxx}$$

$$\text{et } x=\frac{y\sqrt{(1-c^4)}-c\sqrt{(1-y^4)}}{1+ccyy}$$

Si enim ibi radicali $\sqrt{(1-x^4)}$ tribuitur ſignum $+$, hic radicali $\sqrt{(1-y^4)}$ ſignum $-$ tribui debet; vt poſito $x=0$, vtrinque idem valor prodeat $y=c$. Erit ergo

$$x+ccxyy-y\sqrt{(1-c^4)}=-c\sqrt{(1-y^4)}$$

$$y+ccxxy-x\sqrt{(1-c^4)}=c\sqrt{(1-x^4)}$$

quibus valoribus in aequatione differentiali ſubſtitutis, prodit

$$-cdx\sqrt{(1-y^4)}+cdy\sqrt{(1-x^4)}=0,$$

ſiue $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$

Huius ergo aequationis differentialis integrale eſt

$$xx+yy+ccxxyy=cc+2xy\sqrt{(1-c^4)}$$

et quia conſtantem c ab arbitrio noſtro pendentem continet, erit ſimul integrale completum. Q. E. D.

§. 10. Si igitur habeatur haec aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ valor integralis completus ipſius x eſt:

$$x=\frac{y\sqrt{(1-c^4)}\pm c\sqrt{(1-y^4)}}{1+ccyy}$$

vnde ſi conſtans arbitraria c euaneſcat fit $x=y$; ſin autem ponatur $c=1$, habemus $x=\pm\frac{\sqrt{(1-y^4)}}{1+yy}=\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}}$ qui ſunt ambo illi valores particulares iam ſupra exhi-

biti. Hinc eruuntur alii valores particulares prae caeteris ſimpliciores, ſed qui ad imaginaria deuoluuntur. Ita

poſito $c=\infty$ fit $x=\frac{\sqrt{-1}}{y}$; et

poſito $cc=-1$; fit $x=\sqrt{\frac{yy+1}{yy-1}}$

qui itidem aequationi propoſitae ſatisfaciunt.

§. 11. Quo autem ratio huius integralis clarius perſpiciatur, concipiatur curua AM cuius haec ſit indoles, vt poſita abſciſſa $AP=u$, ſit arcus ei reſpondens $AM=\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Deinde eadem curua denuo deſcripta, capiatur abſciſſa $ap=x$, erit arcus $am=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$. Sumto igitur Tab. I. Fig 1. 2.

$$x=\frac{u\sqrt{(1-c^4)}\pm c\sqrt{(1-u^4)}}{1+ccuu}$$

fiet $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; ideoque arc. $am=$ arc. $AM+$ Conſt. Pro conſtantis autem huius determinatione, poſito $u=o$ quo caſu arcus AM euaneſcit, fit $x=c$. Quare ſi capiatur abſciſſa $ab=c$; cui arcus ad reſpondeat, erit arcus $dm=$ arcui AM.

§. 12. Ope huius ergo integrationis completa aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$, in curua propoſita arcui cuicunqne AM, qui abſciſſae $AP=u$ reſpondet, arcus aequalis dm, qui a dato puncto d incipiat, abſcindi poterit. Poſita enim abſciſſa dato puncto d reſpondente $ab=c$; ſi capiatur abſciſſa $ap=x=\frac{c\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-c^4)}}{1+ccuu}$ erit arcus dm arcui AM aequalis. Simili autem modo cum $\sqrt{(1-c^4)}$ negatiuum ſtatui liceat, ſi capiatur abſciſſa

$$a\pi=\frac{c\sqrt{(1-u^4)}-u\sqrt{(1-c^4)}}{1+ccuu}$$

erit itidem arcus $d\mu$ arcui AM aequalis: ſicque in hac curua a dato quouis puncto d vtrinque abſcindi poteſt arcus dm et $d\mu$, qui arcui AM ſint aequales.

§. 13. Hinc ergo patet, ſi arcus ad aequalis capiatur arcui AM, ſeu $c = u$, fore arcum am duplum arcus AM. Hinc ſi ſtatuatur $ap = x = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4}$, prodibit arcus $am = 2$ arc. AM. Simili modo ſi capiatur arcus $ad = 2$ AM, ſeu $c = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4}$, ſtatuaturque $x = \frac{c\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-c^4)}}{1+ccuu}$ obtinebitur arcus $am = 3$ arc. AM. Ac ſi iſte valor ipſius x denuo pro c ſubſtituatur, vt ſit $ad = 3$ AM iterumque ſtatuatur $x = \frac{c\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-c^4)}}{1+ccuu}$, naſcetur arcus am quadruplus arcus AM; atque ita porro ſucceſſiue quaecunque multipla arcus AM geometrice aſſignari poterunt.

§. 14. Sit arcus $ad = n$ AM et $ab = z$; ita vt ſit $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = n\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; atque ex his patet ſi capiatur $x = \frac{z\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-z^4)}}{1+uuzz}$ fore $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = (n+1)\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; ſin autem ponatur $x = \frac{z\sqrt{(1-u^4)}-u\sqrt{(1-z^4)}}{1+uuzz}$, tum futurum eſſe $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = (n-1)\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Si igitur haec aequatio $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{n\,du}{\sqrt{(1-u^4)}}$ fuerit integrata, debitusque valor pro z inde erutus, etiam integrari poterit haec aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{(n+1)\,du}{\sqrt{(1-u^4)}}$, quippe cuius integrale erit $x = \frac{z\sqrt{(1-u^4)}+u\sqrt{(1-z^4)}}{1+uuzz}$. Ac ſi pro z aſſumtus fuerit eius valor completus, qui ſcilicet conſtantem arbitrariam inuoluat, etiam pro x prodibit eius valor completus.

§. 15. Hinc igitur perſpicuum eſt, quomodo aequatio integralis completa inueniri debeat, quae conueniat huic aequationi differentiali $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; quoties n fuerit numerus integer. Simili autem modo aſſignari poterit y, vt ſit $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = \frac{m\,du}{\sqrt{(1-u^4)}}$, vnde ſi eliminando u, aequatio inter x et y quaeratur, ea erit integralis huius aequationis $\frac{m\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$, quicunque numeri rationales pro m et n ſubſtituantur: atque vt hoc integrale prodeat completum, ſufficit pro altera tantum variabilium x et y valorem completum per u determinaſſe, cum hinc iam noua conſtans arbitraria in calculum introducatur.

§. 16. Methodus, qua hic in Theorematis demonſtratione ſum vſus, etſi non ex rei natura eſt petita, ſed indirecte ad id, quod propoſitum erat, perduxit, tamen multo latius patet: ſimili enim modo colligitur, huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+mxx+nx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1+myy+ny^4)}}$$

integrale completum eſſe:

$$0 = cc - xx - yy + nccxxyy + 2xy\sqrt{(1+mcc+nc^4)};$$

Vnde idem, quod ante, ratiocinium adhibendo, integrale quoque completum obtinebitur huius aequationis

$$\frac{\mu\,dx}{\sqrt{(1+mxx+nx^4)}} = \frac{\nu\,dy}{\sqrt{(1+myy+ny^4)}}$$

ſiquidem litteris μ et ν numeri integri deſignentur.

§. 17. Inueſtigatio autem huius integrationis ita ſe habet: Fingatur primo pro arbitrio relatio inter variabiles x et y hac aequatione contenta:

(1) $\alpha xx + \alpha yy = 2\beta xy + \gamma xxyy + \delta$

quae differentiata dat:

$$\alpha x dx + \alpha y dy = \beta x dy + \beta y dx + \gamma xyy dx + \gamma xxy dy$$

vnde conficitur

(2) $dx(\alpha x - \beta y - \gamma xyy) + dy(\alpha y - \beta x - \gamma xxy) = 0$

Deinde ex aequatione (1) eliciantur valores vtriusque variabilis:

$$x = \frac{\beta y + \sqrt{(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4)}}{\alpha - \gamma yy}$$

$$y = \frac{\beta x - \sqrt{(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4)}}{\alpha - \gamma xx}$$

Atque hinc obtinemus;

(3). $\alpha x - \beta y - \gamma xyy = \sqrt{(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4)}$

(4). $\alpha y - \beta x - \gamma xxy = -\sqrt{(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4)}$

qui valores in aequatione (2) ſubſtituti praebebunt

(5). $\frac{dx}{\sqrt{(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)xx + \alpha\gamma x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\delta + (\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta)yy + \alpha\gamma y^4)}}$

cuius ergo aequationis integrale eſt aequatio (1).

§. 18. Quo iſtas formas ſimpliciores reddamus, ponamus $\alpha\delta = A$; $\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\delta = C$; $\alpha\gamma = E$ eritque $\delta = \frac{A}{\alpha}$; $\gamma = \frac{E}{\alpha}$ et $\beta = \sqrt{(C + \alpha\alpha + \frac{AE}{\alpha\alpha})}$

Quare huius aequationis differentialis

(6) $\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}}$

aequatio integralis eſt haec:

(7). $\alpha(xx + yy) = \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha}xxyy + 2xy\sqrt{(C + \alpha\alpha + \frac{AE}{\alpha\alpha})}$

quae ſimul eſt integralis completa:

§. 19. Vel ponamus $A = f\alpha\alpha$: $C = g\alpha\alpha$ et $E = h\alpha\alpha$, vt habeamus hanc aequationem differentialem

$$\frac{dx}{\sqrt{(f + gxx + hx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f + gyy + hy^4)}}$$

cuius

cuius propterea aequatio integralis completa erit:

$$xx + yy = f + bxxyy + 2xy\sqrt{(1 + g + fb)}$$

quae etſi nouam conſtantem inuoluere non videtur, tamen eſt completa, cum in differentiali tantum ratio quantitatum f, g, et b ſpectatur, ita vt pro f, g, et b ſcribere liceat fcc, gcc et bcc, vnde aequatio integralis manifeſto completa prodit:

$$xx + yy = fcc + bccxxyy + 2xy\sqrt{(1 + gcc + fbc^4)}$$

vel $f(xx + yy) = fee + beexxyy + 2xy\sqrt{f(f + gee + be^4)}$

poſito $cc = \frac{ee}{f}$.

§. 20. Quodſi ergo propoſita ſit haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f + gxx + bx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f + gyy + by^4)}}$$

valor ipſius y per functionem algebraicam ipſius x exprimi poterit, ita vt ſit:

$$y = \frac{x\sqrt{(1 + gcc + fbc^4)} \pm c\sqrt{(f + gxx + bx^4)}}{1 - bccxx}$$

vel $y = \frac{x\sqrt{f(f + gee + be^4)} \pm e\sqrt{f(f + gxx + bx^4)}}{f - beexx}$

Quodſi ergo ſit $g = 0$, vt habeatur haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f + bx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f + by^4)}}$$

valor integralis completus ipſius y erit

$$y = \frac{x\sqrt{f(f + be^4)} \pm e\sqrt{f(f + bx^4)}}{f - beexx}$$

vnde conſtantem e pro lubitu determinando, innumeri valores particulares pro y deduci poſſunt.

§. 21.

§. 21. Methodi autem, qua ſupra vſus ſum, beneficio etiam huius aequationis

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{(f+gxx+hx^4)}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{(f+gyy+hy^4)}}$$

ſi modo m et n ſint numeri rationales, integrale completum, atque id quidem algebraice, exhiberi poterit.

§. 22. Quemadmodum in aequatione ſupra aſſumta, variabiles x et y inter ſe permutabiles ſunt conſtitutae, vt ambae formulae inter ſe ſimiles euaderent, ita omiſſa hac limitatione ad formularum differentialium diſparium comparationem perueniemus. Ponamus ergo:

$$(1)\quad \alpha xx+\beta yy=2\gamma xy+\delta xxyy+\varepsilon$$

vnde fit

$$x=\frac{\gamma y+\sqrt{(\alpha\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)yy+\beta\delta y^4)}}{\alpha-\delta yy}$$

et $y=\dfrac{\gamma x-\sqrt{(\beta\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)xx+\alpha\delta x^4)}}{\beta-\delta xx}$

hincque

$$(2).\quad \alpha x-\gamma y-\delta xyy=\sqrt{(\alpha\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)yy+\beta\delta y^4)}$$

$$(3).\quad \beta y-\gamma x-\delta xxy=-\sqrt{(\beta\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)xx+\alpha\delta x^4)}$$

at aequatio (1) differentiata dat:

$$dx(\alpha x-\gamma y-\delta xyy)+dy(\beta y-\gamma x-\delta xxy)=0$$

vnde conficitur haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(\beta\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)xx+\alpha\delta x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(\alpha\varepsilon+(\gamma\gamma-\delta\varepsilon-\alpha\beta)yy+\beta\delta y^4)}}$$

cuius propterea integralis eſt aequatio aſſumta.

§. 23. Verum haec diſparitas facile tollitur, loco y ponendo $z\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, cuius rei ratio ſtatim ex aequatione aſſumta potuiſſet eſſe manifeſta. Sed alia patet via ad formulas diſpares perueniendi, cuius hic exemplum tradidiſſe ſufficiat. Aſſumatur aequatio: $x^4+2axxyy+2bxx=c,$

$= c$, cuius differentiale eſt $dx(x^2 + axyy + bx) + axxydy = 0$, ſeu

$$\frac{dx}{xy} = \frac{-ady}{xx + ayy + b}$$

Iam ex aequatione aſſumta primo determinetur xy per x ſicque fiet $xy = \sqrt{\frac{c - 2bxx - x^4}{2a}}$; tum vero $xx + ayy + b$ per y, at ob $(xx + ayy + b)^2 = c + (ayy + b)^2$, erit

$$xx + ayy + b = \sqrt{(c + (ayy + b)^2)}$$

Quocirca habebitur aequatio differentialis iſta

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{(c + bb + 2abyy + aay^4)}}$$

cuius propterea integralis eſt aſſumta ſeu $y = \frac{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}}{x\sqrt{2a}}$

§. 24. Etſi hoc integrale non eſt completum, tamen ex ſuperioribus facile completum reddetur. Ponatur enim:

$$\frac{ady}{\sqrt{(c + bb + 2abyy + aay^4)}} = \frac{adz}{\sqrt{(c + bb + 2abzz + aaz^4)}}$$

ob $f = c + bb$; $g = 2ab$; $h = aa$, erit

$$y = \frac{z\sqrt{(c + bb)(c + bb + 2abee + aae^4)} \pm e\sqrt{(c + bb)(c + bb + 2abzz + aaz^4)}}{c + bb - aaeezz}$$

hic ergo valor aequalis ſtatuatur ipſi $\frac{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}}{x\sqrt{2a}}$, et aequatio hinc inter x et z reſultans integralis erit completa huius aequationi differentialis

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{(c - 2bxx - x^4)}} = \frac{adz}{\sqrt{(c + bb + 2abzz + aaz^4)}}$$

Quin etiam ex allatis patet, ſi haec bina membra inſuper per numeros rationales quoscunque multiplicentur, quemadmodum integrale completum inueniri oporteat.

§. 25. Verum miſſa membrorum diſparitate formationem parium membrorum generalius concipiumus, ponatur ergo:

$$(1)\quad o = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy$$

vnde differentiando obtinetur:

$$dx(\beta + \gamma x + \delta y + 2\varepsilon xy + \varepsilon yy + \zeta xyy) + dy(\beta + \gamma y + \delta x + 2\varepsilon xy + \varepsilon xx + \zeta xxy) = o$$

ideoque

$$(2)\quad \frac{dy}{\beta + \gamma x + \delta y + \varepsilon xy + \varepsilon yy + \zeta xyy} = \frac{-dx}{\beta + \gamma y + \delta x + 2\varepsilon xy + \varepsilon xx + \zeta xxy}$$

Ex reſolutione autem aequationis aſſumtae elicitur.

$$y = \frac{-\beta - \delta x - \varepsilon xx \pm \surd(\beta\beta - \alpha\gamma + 2(\beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma)x + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta - 2\beta\varepsilon)xx + 2(\delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon)x^3 + (\varepsilon\varepsilon - \gamma\zeta)x^4)}{\gamma + 2\varepsilon x + \zeta xx}$$

Ponatur breuitatis gratia

$$\beta\beta - \alpha\gamma = A;\quad \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = B;\quad \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta - 2\beta\varepsilon = C$$
$$\varepsilon\varepsilon - \gamma\zeta = E\quad \delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon = D;$$

eritque

$$\beta + \delta x + \varepsilon xx + \gamma y + 2\varepsilon xy + \zeta xxy = \pm \surd(A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4)$$

$$\beta + \delta y + \varepsilon yy + \gamma x + 2\varepsilon xy + \zeta xyy = \mp \surd(A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4)$$

§. 26. Hinc itaque concludimus huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\surd(A + 2Bx + Cxx + 2Dx^3 + Ex^4)} = \frac{dy}{\surd(A + 2By + Cyy + 2Dy^3 + Ey^4)}$$

aequationem integralem eamque completam eſſe

$$o = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy$$

adhi-

adhibita ſcilicet ſuperiori horum coëfficientium determinatione. Primum autem definiatur β vel ε ex hac aequatione

$$\frac{BB(\varepsilon\varepsilon - E) - DD(\beta\beta - A)}{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta} + \frac{2AD\varepsilon - 2BE\beta}{B\varepsilon - D\beta} = C$$

tum vero erit:

$$\gamma = \frac{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta}{B\varepsilon - D\beta};\ \alpha = \frac{\beta\beta - A}{\gamma};\ \zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon - E}{\gamma} \text{ et}$$

$$\delta = \frac{B\beta(\varepsilon\varepsilon - E) - D\varepsilon(\beta\beta - A)}{A\varepsilon\varepsilon - E\beta\beta} + \gamma \text{ ſeu } \delta = \gamma + \frac{B + \alpha\varepsilon}{\beta}$$

§. 27. Hinc ergo perſpicuum eſt etiam hanc aequationem differentialem:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Dx^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + 2Dy^3)}}$$

integrari poſſe: nam ob $B = o$, $C = o$ et $E = o$ erit

$$-\frac{DD(\beta\beta - A)}{A\varepsilon\varepsilon} - \frac{2A\varepsilon}{\beta} = o \text{ ſeu } \varepsilon = \sqrt[3]{\frac{DD}{2AA}\beta(A - \beta\beta)}$$

at hinc valores nimis prodeunt complicati. Facilius negotium abſoluetur, reſoluendo valores litterarum euaneſcentium B, C et E; nam $E = o$ dat: $\zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\gamma}$; tum $B = o$ dat: $\delta = \gamma + \frac{\alpha\varepsilon}{\beta}$; atque $C = o$ dat $\delta\delta - \gamma\gamma = \alpha\zeta + 2\beta\varepsilon = \frac{\alpha\varepsilon\varepsilon}{\gamma} + 2\beta\varepsilon = \frac{\alpha^2\varepsilon\varepsilon}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\varepsilon}{\beta}$ cuius factores ſunt $\beta\beta = \alpha\gamma$ et $\alpha\varepsilon\varepsilon + 2\beta\gamma\varepsilon = o$. At ſi eſſet $\beta\beta = \alpha\gamma$ foret $A = o$, ſin autem eſſet $\varepsilon = o$ foret et $\zeta = o$ et $D = o$, contra ſcopum. Fieri ergo oportet $\alpha\varepsilon = -2\beta\gamma$; vnde fiet $\alpha = -\frac{2\beta\gamma}{\varepsilon}$; $\delta = -\gamma$; et $\zeta = \frac{\varepsilon\varepsilon}{\gamma}$. Denique fieri debet $\beta\beta + \frac{2\beta\gamma\gamma}{\varepsilon} = A$ et $-2\gamma\varepsilon - \frac{\beta\varepsilon\varepsilon}{\gamma} = D$. Inde fit $\varepsilon = \frac{2\beta\gamma\gamma}{A - \beta\beta}$; et ob $\frac{\gamma D}{\varepsilon} = -(2\gamma\gamma + \beta\varepsilon)$ et $2\gamma\gamma + \beta\varepsilon = \frac{A\varepsilon}{\beta}$, erit $\frac{\gamma D}{\varepsilon} = -\frac{A\varepsilon}{\beta}$; ideoque $\varepsilon\varepsilon = -\frac{\beta\gamma D}{A}$ Ergo $\frac{4\beta\gamma^3}{(A - \beta\beta)^2} + \frac{D}{A} = o$.

 §. 28.

§. 28. Cum autem tantum ratio litterarum A et D in cenſum veniat, aequatio vltima valori abſoluto ipſius A inueniendo inſeruit, quem autem noſſe non eſt opus. Manebunt ergo litterae γ et β indeterminatae. Ponatur ergo $\gamma = -Ac$ et $\beta = Dc$, erit $\varepsilon\varepsilon = DDcc$, ſeu $\varepsilon = Dc$, hincque $\delta = Ac$; $\zeta = -\frac{DDc}{A}$; et $\alpha = 2Ac$. Quare huius aequationis differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + 2Dx^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A + 2Dy^3)}}$$

integrale eſt.

$$0 = 2A + 2D(x+y) - A(xx+yy) + 2Axy + 2Dxy(x+y) - \frac{DD}{A}xxyy$$

Hoc autem integrale non eſt completum, tale autem reddetur ponendo $\gamma = -A$ et $\beta = Dcc$, vnde fit $\varepsilon\varepsilon = DDcc$ et $\varepsilon = Dc$; porro erit $\delta = A$; $\zeta = -\frac{DDcc}{A}$; $\alpha = 2Ac$; ita vt integrale completum ſit:

$$0 = 2Ac + 2Dcc(x+y) - A(xx+yy) + 2Axy + 2Dcxy(x+y) - \frac{DDcc}{A}xxyy$$

vbi c eſt conſtans ab arbitrio pendens, vnde fit

$$y = \frac{Dcc + Ax + Dcxx + \sqrt{c}(2A + \frac{DD}{A}c^3)(A + 2Dx^3)}{A - 2Dcx + \frac{DDcc}{A}xx}$$

§. 29. Hic caſus notari meretur, quo $A = 1$ et $D = \frac{1}{2}$, vt habeatur haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^3)}}.$$

vbi ad fractiones tollendas loco c ſcribatur $2c$ eritque integrale completum:

$$0 = 4c + 4cc(x+y) - xx - yy + 2xy + 2cxy(x+y) - ccxxyy$$

ſeu $y = \frac{2cc + x + cxx \pm 2\sqrt{c}(1 + c^3)(1 + x^3)}{1 - 2cx + ccxx}$

integra-

Integralia ergo particularia erunt

I. ſi $c=o$; $y=x$;

II. ſi $c=\infty$; $y=\frac{2\pm 2\surd(1+x^3)}{xx}$

III. ſi $c=-1$; $y=\frac{2+x-xx}{1+2x+xx}=\frac{2-x}{1+x}$.

§. 30. Ex eodem principio ſi in §. 29. loco litterarum A, B, C, D, E, eaedem per quantitatem quampiam p multiplicentur, nihilo minus aequatio differentialis erit

$$\frac{dx}{\surd(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}=\frac{dy}{\surd(A+2By+Cyy+2Dy^3+Ey^4)}$$

inuenieturque

$$p=\frac{BB\epsilon\epsilon-DD\beta\beta}{BBE-ADD}+2\frac{(AD\epsilon-BE\beta)(A\epsilon\epsilon-E\beta\beta)}{(B\epsilon-D\beta)(BBE-ADD)}-\frac{C(A\epsilon\epsilon-E\beta\beta)}{BBE-ADD}$$

tum erit $\gamma=\frac{A\epsilon\epsilon-E\beta\beta}{B\epsilon-D\beta}$; $\alpha=\frac{\beta\beta-Ap}{\gamma}$; $\zeta=\frac{\epsilon\epsilon-Ep}{\gamma}$ atque $\delta=\gamma+\frac{\alpha\epsilon+Bp}{\beta}$: ita vt litterae β et ϵ maneant indeterminatae, fietque propterea aequatio integralis completa:

$$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy+2\epsilon xy(x+y)+\zeta xxyy$$

vnde fit:

$$y=\frac{-\beta-\delta x-\epsilon xx\pm\surd p(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}{\gamma+2\epsilon x+\zeta xx}$$

§. 31. Notandum denique eſt, non ſolum hanc aequationem differentialem, cuius integrale completum modo exhibui, ſed etiam hanc multo latius patentem:

$$\frac{m\,dx}{\surd(A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4)}=\frac{n\,dy}{\surd(A+2By+Cyy+2Dy^3+Ey^4)}$$

ſemper algebraice et quidem complete integrari poſſe; dummodo coëfficientium m et n ratio fuerit rationalis: haec enim integratio ſimili modo inſtituitur, quo ſupra vſus ſum ad aequationem, quae mihi hic praeçipue erat propoſita, integrandam. Methodus autem, cuius

hic ſpecimina attuli, ita mihi videtur comparata, vt indolem eius diligentius excolendo, ad inſignes vſus apta reddi queat, vnde haud contemnenda commoda in Analyſin ſint redundatura.

§. 32. Hic autem obſeruo, formulam §. 28 aſſumtam latius extendendo, eiusmodi differentialia inter ſe comparari poſſe, quae ſint diſparia, atque adeo exemplum diſparitatis §. 26. allatum hoc modo obtineri poſſe; ita vt omnia, quae hactenus ſunt tradita, in hac generali inueſtigatione contineantur. Fingatur ſcilicet haec aequatio integralis:

$$(1)\ldots \alpha xxyy + 2\beta xxy + 2\gamma xyy + \delta xx + \varepsilon yy + 2\zeta xy + 2\eta x + 2\theta y + \varkappa = 0$$

ex qua fit

$$(2)\ldots y = \frac{-\beta xx - \zeta x - \theta + \surd((\beta xx + \zeta x - \theta)^2 - (\alpha xx + 2\gamma x + \varepsilon)(\delta xx + 2\eta x + \varkappa))}{\alpha xx + 2\gamma x + \varepsilon}$$

$$(3)\ldots x = -\frac{\gamma yy - \zeta y - \eta - \surd((\gamma yy + \zeta y + \eta)^2 - (\alpha yy + 2\beta y + \delta)(\varepsilon yy + 2\theta y + \varkappa))}{\alpha yy + 2\beta y + \delta}$$

Ponatur iam breuitatis gratia:

$App = \beta\beta - \alpha\delta$	$\mathfrak{A}qq = \gamma\gamma - \alpha\varepsilon$
$2Bpp = 2\beta\zeta - 2\alpha\eta - 2\gamma\delta$	$2\mathfrak{B}qq = 2\gamma\zeta - 2\alpha\theta - 2\beta\varepsilon$
$Cpp = \zeta\zeta + 2\beta\theta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\gamma\eta$	$\mathfrak{C}qq = \zeta\zeta + 2\gamma\eta - \alpha\varkappa - \delta\varepsilon - 4\beta\theta$
$2Dpp = 2\zeta\theta - 2\gamma\varkappa - 2\varepsilon\eta$	$2\mathfrak{D}qq = 2\zeta\eta - 2\beta\varkappa - 2\delta\theta$
$Epp = \theta\theta - \varepsilon\varkappa$	$\mathfrak{E}qq = \eta\eta - \delta\varkappa$

eritque:

$$(4)\ldots p\surd(Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E) = \alpha xxy + 2\gamma xy + \varepsilon y + \beta xx + \zeta x + \theta$$

$$(5)\ldots -q\surd(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}) = \alpha xyy + 2\beta xy + \delta x + \gamma yy + \zeta y + \eta$$

§. 33.

§. 33. At ſi aequatio integralis aſſumta differentietur, fiet

$$(6)\ldots dx(\alpha xyy + 2\beta xy + \gamma yy + \delta x + \zeta y + \eta) + dy(\alpha xxy + \beta xx + 2\gamma xy + \varepsilon y + \zeta x + \theta) = 0$$

vnde ſi iſtorum factorum valores (4) et (5) reperti ſubſtituantur, orietur iſta aequatio differentialis:

$$(7)\ldots \frac{q\,dx}{\sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E)}} = \frac{p\,dy}{\sqrt{(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}yy + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}}$$

cuius propterea integralis eſt aequatio aſſumta (1). Cum autem ſupra habeantur 10 aequationes, coëfficientium autem α, β, γ, δ, etc. numerus ſit 9, quorum vnus pro lubitu aſſumi poteſt, octo remanebunt litterae determinandae. Porro autem inſuper definiendae accedunt binae litterae p et q, ita vt nunc decem quantitates adſint incognitae, ex quo coëfficientes vtriusque formulae A, B, C, D, E et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ videntur pro lubitu aſſumi poſſe. Verum perſpicuum eſt, cum alteri iam fuerint ad libitum aſſumti, alteros non omnino ab arbitrio noſtro pendere, alias enim quaeuis formula ad algebraicam reduci poſſet.

§. 34. Hinc autem aliae datae formulae transmutationes non inelegantes obtineri poſſunt, ſi loco y alii valores ſubſtituantur. Veluti ſi ponatur $\mathfrak{C} = 0$, ſeu $\eta\eta = \delta x$, ſtatuaturque $y = zz$ ſequens prodibit aequatio differentialis.

$$(8)\ldots \frac{q\,dx}{\sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cxx + 2Dx + E)}} = \frac{2p\,dz}{\sqrt{(\mathfrak{A}z^6 + 2\mathfrak{B}z^4 + \mathfrak{C}z^2 + 2\mathfrak{D})}}$$

cuius propterea integralis eſt aequatio aſſumta, ſi ponatur $y = zz$, ſtatuaturque $\eta\eta = \delta x$, ac reliquae litterae rite deter-

determinentur. Integrale etiam completum nulla diffi-cultate reperietur, nam etiamſi fortaſſe integrale inuen-tum nouam non inuoluat conſtantem, ponatur

$$\frac{q\,dx}{\surd(Ax^4+2Bx^3+Cxx+2Dx+E)}=\frac{q\,du}{\surd(Au^4+2Bu^3+Cuu+2Du+E)}$$

et huius aequationis integrale completum ex anteceden-tibus aſſignare licebit; atque hinc integrale quoque com-pletum aequationis ex formulis diſparibus conſtantis col-ligetur.

§. 35. Quemadmodum huius aequationis diffe-rentialis, vt a ſimpliciſſimis incipiam;

$$\frac{dx}{\surd(f+gx)}=\frac{dy}{\surd(f+gy)}$$

integrale completum eſt;

$$gg(xx+yy)-2ggxy-2ccg(x+y)+c^4-4ccf=0$$

Deinde vero huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\surd(f+gxx)}=\frac{dy}{\surd(f+gyy)}$$

integrale completum eſt:

$$xx+yy-2xy\surd(1+fgcc)-ccff=0$$

Tertio vero huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\surd(f+gx^3)}=\frac{dy}{\surd(f+gy^3)}$$

integrale completum eſt

$$f(xx+yy)+\frac{ggcc}{4f}xxyy-gcxy(x+y)-2fxy-gcc(x+y)-2fc=0$$

Quarto porro huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\surd(f+gx^4)}=\frac{dy}{\surd(f+gy^4)}$$

integrale completum repertum eſt

$$f(xx+yy)-fcc-gccxxyy-2xy\surd f(f+gc^4)=0$$

Ita

Ita etiam integrale completum huius aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(f+gx^6)}} = \frac{dy}{\sqrt{(f+gy^6)}}$$

reperiri poterit:

§. 36. Determinentur primo in §. 33. valores, ita vt prodeat haec aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{(fx+gx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(fy+gy^4)}}$$

cuius integralis completa reperitur:

$$gg(xx+yy)-4ggcxxyy-4fgccxy(x+y)-2ggxy-2fgc(x+y)+ffcc=0$$

Ponatur nunc $x=tt$ et $y=uu$, vt prodeat haec aequatio differentialis

$$\frac{dt}{\sqrt{(f+gt^6)}} = \frac{du}{\sqrt{(f+gu^6)}}$$

cuius propterea integralis completa erit

$$gg(t^4+u^4)-4ggct^4u^4-4fgcc\,ttuu(tt+uu)-2gg\,ttuu-2fgc(tt+uu)+ffcc=0$$

vnde notari meretur caſus ex hypotheſi $c=\infty$ reſultans, qui dat $4g\,ttuu(tt+uu)=f$.

OBSERVATIONES DE COMPARATIONE ARCVVM CVRVARVM IRRECTIFICABILIVM.

Auctore

L. EVLERO.

Speculationes mathematicae, ſi ad earum vtilitatem reſpicimus, ad duas claſſes reduci debere videntur, ad priorem referendae ſunt eae, quae cum ad vitam communem, tum ad alias artes, inſigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi ſtatui ſolet. Altera autem claſſis eas complectitur ſpeculationes, quae etſi cum nullo inſigni commodo ſint coniunctae, tamen ita ſunt comparatae, vt ad fines analyſeos promouendos, vireſque ingenii noſtri acuendas occaſionem praebeant. Cum enim plurimas inueſtigationes, vnde maxima vtilitas expectari poſſet, ob ſolum analyſeos defectum deſerere cogamur, non minus pretium iis ſpeculationibus ſtatuendum videtur, quae haud contemnenda analyſeos incrementa pollicentur. Ad hunc autem ſcopum imprimis accommodatae videntur eiuſmodi obſeruationes, quae, cum quaſi caſu ſint factae, et a poſteriori detectae, ratio ad eaſdem a priori, ac per viam directam, perueniendi minus, vel neutiquam, eſt perſpecta. Sic enim cognita

iam

iam veritate facilius in eas methodos inquirere licebit, quae ad eam directe ſint perducturae, nouis autem methodis inueſtigandis analyſeos fines non mediocriter promoueri, nullum plane eſt dubium.

Huiusmodi autem obſeruationes, quae nulla certa methodo ſunt factae, quarumque ratio non parum abſcondita videtur, nonnullas deprehendi in opere Ill. Comitis *Fagnani* nuper in lucem edito; quae idcirco omni attentione dignae ſunt cenſendae, neque ſtudium, quod in vlteriori earum inueſtigatione conſumitur, inutiliter collocatum erit iudicandum. Commemorantur autem in hoc libro quaedam eximiae proprietates, quibus curuae *Ellipſis*, *Hyperbola* et *Lemniſcata* ſunt praeditae, harumque curuarum arcus diuerſi inter ſe comparantur: cum igitur ratio harum proprietatum maxime occulta videatur, haud alienum fore arbitror, ſi eas diligentius examinauero, et quae mihi inſuper circa has curuas elicere contigit, cum publico communicauero.

Quod igitur primum ad has curuas attinet, notum eſt, earum rectificationem omnes analyſeos vires tranſcendere, ita vt earum arcus non ſolum non algebraice exprimi, ſed etiam nequidem ad quadraturam circuli, vel hyperbolae, reduci queant. Quare eo magis mirum videri debet, quod Ill. Comes *Fagnani* inuenit, Ellipſi et Hyperbola infinitis modis eiusmodi binos arcus exhiberi poſſe, quorum differentia geometrice aſſignari queat; in curua lemniſcata autem infinitis modis eiusmodi dari arcus binos, qui inter ſe vel ſint aequales, vel alter ad alterum rationem duplam teneat,

 vnde

vnde deinceps modum colligit in hac curua etiam eiusmodi arcus aſſignandi, qui aliam inter ſe rationem teneant.

Pro Ellipſi quidem et Hyperbola nihil admodum mihi praeterea ſcrutari licuit; vnde contentus ero faciliorem conſtructionem eorum arcuum dediſſe, quorum differentia geometrice exhiberi queat. Pro curua autem lemniſcata iisdem veſtigiis inſiſtens, multo plures, imo infinitas, elicui formulas, quarum beneficio non ſolum infinitis modis eiusmodi binos acus definire poſſum, qui inter ſe vel ſint aequales, vel rationem teneant duplam, ſed etiam qui ſint inter ſe in ratione quacunque numeri ad numerum.

I. De Ellipſi.

1. Sit quadrans ellipticus ABC, cuius centrum in C, eiusque ſemiaxes ponantur $CA = 1$, et $CB = c$; ſumta ergo abſciſſa quacunque $CP = x$, erit applicata ei reſpondens $PM = y = c\sqrt{(1-xx)}$; cuius differentiale cum ſit $dy = -\frac{cx\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, erit abſciſſae $CP = x$ arcus ellipticus reſpondens $BM = \int \frac{dx\sqrt{(1-(1-cc)xx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$. Ponatur breuitatis gratia $1 - cc = n$, vt ſit arcus $BM = \int dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}$ ſumtaque alia quauis abſciſſa $CQ = u$, erit ſimili modo arcus ei reſpondens $BN = \int du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$. His poſitis quaeritur, quomodo hae duae abſciſſae x et u inter ſe comparatae eſſe debeant, vt arcuum ſumma

$$BM + BN = \int dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + \int du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$$

integrabilis euadat, ſeu geometrice exhiberi queat.

2. Quae-

2. Quaeſtio ergo huc redit, vt determinetur, cuiusmodi functio ipſius x loco u ſubſtitui debeat, vt formula differentialis $dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} + du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}$ integrationem admittat. Facile autem perſpicitur, ſi haec quaeſtio in genere conſideretur, eius ſolutionem vtriusque formulae integratione inniti; ideoque aeque analyſeos fines transgredi, atque ipſam ellipſeos rectificationem. Cum igitur ſolutio generalis nullo modo expectari queat, in ſolutiones particulares erit inquirendum, quae vti nulla certa ratione reperiri poſſunt, ita etiam plurimum caſui et coniecturae erit tribuendum; ex quo earum verum fundamentum etiamſi ipſae ſint cognitae.

3. Primum quidem ſtatim occurrit caſus $u = -x$, quo formula noſtra differentialis in nihilum abit; ſed quia hinc duo Ellipſeos arcus aequales et ſimiles oriuntur, vti hic caſus nimis eſt obuius, ita etiam quaeſtioni propoſitae minime ſatisfacere eſt cenſendus. Cum igitur tentaminibus totum negotium abſolui debeat, fingatur $\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} = \alpha u$, et α ita concipiatur, vt viciſſim fiat $\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = \alpha x$, ſic enim habebitur $BM + BN = \alpha\int u\,dx + \alpha\int x\,du = \alpha xu + \text{Conſt.}$ omnino vti poſtulatur. Pro valore autem ipſius α habebimus tam $1 - nxx - \alpha\alpha uu + \alpha\alpha uuxx = 0$, quam $1 - nuu - \alpha\alpha xx + \alpha\alpha xxuu = 0$; vnde patet, ſtatui debere $\alpha\alpha = n$ et $\alpha = \sqrt{n}$, ita vt $u = \sqrt{\frac{1-nxx}{n-nxx}}$ et $BM + BN = xu\sqrt{n} + \text{Conſt.}$

4. Etſi autem hoc modo quaeſtioni ſatisfactum videtur, tamen iſtae determinationes in Ellipſi locum habere nequeunt. Nam cum ſit $n < 1$ quia $n = 1 - ee$

erit $n - nxx < 1 - nxx$ ideoque $u > 1$, abſciſſa ergo CQ ſemi axem CA ſuperaret, eique propterea arcus imaginarius reſponderet; ita vt hinc nulla concluſio conformis deduci poſſet.

5. Tentemus ergo alias formulas, ſitque tam $\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}} = \frac{\alpha}{u}$, quam $\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}} = \frac{\alpha}{x}$, vnde ob $\alpha\alpha - \alpha\alpha xx - uu + nxxuu = 0$ et $\alpha\alpha - \alpha\alpha uu - xx + nxxuu = 0$ colligimus $\alpha = 1$, ita vt ſit $1 - uu - xx + nxxuu = 0$, ideoque $u = \sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$. Hinc autem prodit $BM + BN = \int\frac{dx}{u} + \int\frac{du}{x} = \int\frac{xdx + udu}{xu}$. Verum aequatio $uu + xx = 1 + nxxuu$ differentiata dat:

$xdx + udu = nxu(xdu + udx)$ ſeu $\frac{xdx + udu}{xu} = n(xdu + udx$ vnde concludimus $BM + BN = n\int(xdu + udx) = nxu + \text{Conſt.}$

6. Haec ſolutio nullo incommodo laborat, cum enim ſit $n < 1$, erit $1 - nxx > 1 - xx$, ideoque $u < 1$; vti natura rei poſtulat. Sumta ergo abſciſſa quacunque $CP = x$, capiatur altera $CQ = u = \sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$; eritque ſumma arcuum $BM + BN = nxu + \text{Conſt.}$ Ad quam conſtantem definiendam ſit $x = 0$, vt fiat $BM = 0$; eritque $u = 1$, et arcus BN abit in quadrantem BMNA; vnde fit $0 + BMNA = 0 + \text{Conſt.}$ ſicque haec conſtans erit $= BMNA$. Quo valore eius loco ſubſtituto habemus $BM + BN = nxu + BMNA$, ideoque

$$BM - AN = nxu = (1 - u)xu = BN - AM$$

7. Dato ergo in quadrante elliptico ACB puncto quocunque M, aſſignare valemus alterum pun-

ctum

ctum N, ita vt differentia arcuum BM - AN, vel quae huic eſt aequalis BN - AM geometrice exprimi queat. Quod quo facilius praeſtari poſſit, ducamus ad Ellipſin in puncto M normalem MS, erit ſubnormalis $PS = ccx$, et ob $PM = c\sqrt{(1-xx)}$ ipſa normalis $MS = c\sqrt{(1-xx+ccxx)} = c\sqrt{(1-nxx)}$; ideoque pro altero puncto N abſciſſa erit $CQ = u = \frac{PM}{MS}.CA$. Vel in normalem MS productam ex C demittatur perpendicularis CR, quae producatur in V, vt ſit $CV = CA = 1$, et ob $\frac{CR}{CS} = \frac{PM}{MS}$ erit $CQ = \frac{CR}{CS}.CV$. Quare ex puncto V in axem CA ducatur perpendicularis VQ, quae punctum Q, et producta ipſum punctum N deſignabit.

8. Cum ſit $PS = ccx$, erit $CS = x - ccx = nx$, ideoque $CR = \frac{CQ.CS}{CV} = \frac{u.nx}{1} = nux$. Hoc ergo ipſum perpendiculum CR differentiam arcuum BM - AN ſeu BN - AM exhibebit. Arcuum ergo hoc modo deſignatorum differentia erit $= nx\sqrt{\frac{1-xx}{1-nxx}}$, quae igitur euaneſcit tam caſu $x = 0$, quam $x = 1$; quibus puncta M et N in ipſa puncta B et A incidunt. Maxima autem haec differentia euadit, ſi $nx^4 - 2xx + 1 = 0$, hoc eſt ſi $x = \frac{1}{\sqrt{(1+c)}}$, quo caſu fit $x = u$, et ambo puncta M et N in vnum punctum O coëunt: eritque hoc caſu differentia arcuum $BO - AO = nxx = 1 - c$, ideoque ipſi ſemiaxium differentiae CA - CB fiet aequalis: ita vt ſit $CA + AO = CB + BO$.

9. Si punctum M in ipſo hoc puncto O capiatur, vt ſit $CP = x = \frac{1}{\sqrt{(1+c)}}$ erit $PM = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{(1+c)}}$, et $PS = \frac{cc}{\sqrt{(1+c)}}$

hinc-

hincque $MS = c\sqrt{c}$, vnde variis modis ſitus puncti O commode definiri poterit. Cum autem ſit $CM = CO = \frac{\sqrt{(1+c^3)}}{\sqrt{(1+c)}} = \sqrt{(1-c+cc)} = \sqrt{(1+cc-2c\,\text{coſ.}\,60^\circ)}$, vnde facilis conſtructio deducitur: ſequentia ergo Theoremata ſubiungere viſum eſt, quorum demonſtratio ex allatis eſt manifeſta.

Theorema 1.

Tab. I. Fig. 4. 10. In quadrante elliptico ACB, ſi ad punctum quoduis M ducatur tangens HMK, quae cum altero axe CB in H concurrat, eaque alteri ſemiaxi CA aequalis capiatur, vt ſit $HK = CA$; tum vero per K axi CB parallela agatur KN ellipſin ſecans in N; arcuum BM et AN differentia $BM - AN$ geometrice aſſignari poterit; demiſſo enim ex Centro C in tangentem perpendiculo CT, erit iſta arcuum differentia $BM - AN = MT$.

Fig. 3. et 4. Demonſtratio ex figura ſponte patet, cum tangens HMK ſit rectae illi CRV parallela et aequalis, tum vero perſpicuum eſt, eſſe $MT = CR$.

Theorema 2.

Fig. 5. 11. Si ſuper quadrantis elliptici ACB altero ſemiaxe CA triangulum aequilaterum CAE conſtituatur, et in eius latere AE portio capiatur $AF = CB$, iunctaeque CF aequalis applicetur in ellipſi recta CO, punctum O hanc habebit proprietatem, vt ſit $CA +$ arcu $AO = CB +$ arcu BO.

Demonſtratio ex §. 9. euidens eſt. Cum enim ſit $CA = 1$, $AF = c$ et ang. $CAF = 60^\circ$ erit $CF = \sqrt{(1+cc-2c\,\text{coſ.}\,60^\circ)}$ ideoque $= CO$.

11. De

II. De Hyperbola.

12. Sit C centrum hyperbolae AMN eiusque ſemiaxis transuerſus $CA = 1$, ſemiaxis coniugatus $= c$; erit ſumta abſciſſa quacunque $CP = x$, applicata $PM = c\sqrt{(xx-1)}$, eiusque differentiale $= \frac{cx\,dx}{\sqrt{(xx-1)}}$; vnde fit arcus $AM = \frac{\int dx \sqrt{((1+cc)xx-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$. Ponatur breuitatis gratia $1+cc = n$; erit $AM = \int dx \sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}$. Simili ergo modo ſi capiatur alia quaeuis abſciſſa $CQ = u$, erit arcus ei reſpondens $AN = \int du \sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}$. Tab. I. Fig. 6.

13. His poſitis iſta nobis propoſita ſit quaeſtio, vt dato puncto M alterum N ita definiatur, vt ſumma arcuum $AM + AN$, ſeu expreſſio $\int dx \sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} + \int du \sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}$ abſolute integrationem admittat; quod quidem euenire caſu $u = -x$ ſponte patet; verum hinc nihil ad inſtitutum noſtrum concludere licet.

14. Ponamus ergo $\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}} = u\sqrt{n}$, cum hinc viciſſim fiat $\sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}} = x\sqrt{n}$, vtrinque enim prodit haec aequatio $nuuxx - n(uu+xx) + 1 = 0$. Facta autem hac hypotheſi prodit ſumma arcuum $AM + AN = \int u\,dx\sqrt{n} + \int x\,du\sqrt{n} = ux\sqrt{n} + \text{Conſt.}$ Haec ergo integrabilitas vt locum habeat, oportet ſit $u = \sqrt{\frac{nxx-1}{nxx-n}}$, vnde cum ob $n > 1$ prodeat quoque $u > 1$, ex dato puncto M ſemper alterum punctum N aſſignari poterit.

15. Ad conſtantem definiendam patet caſum $x = 1$, quo punctum M in verticem A incidit, nihil iuuare, cum inde oriatur $u = \infty$, punctumque N in infinitum remo-

remoueatur. Quocirca vt haec conſtans debite determinetur, alium caſum conſiderari oportet; potior autem non occurrit, quam is, vbi puncta M et N in vnum coaleſcunt, ſeu quo fit $u = x$, et $nx^4 - 2nxx + 1 = 0$. Hinc autem oritur $xx = 1 + \frac{c}{\sqrt{(1+cc)}}$ et $x = \sqrt{(1 + \frac{c}{\sqrt{(1+cc)}})}$

16. Sit igitur O hoc punctum, in quo ambo puncta M et N coaleſcunt, ductaque applicata OI erit abſciſſa $CI = \sqrt{(1 + \frac{c}{\sqrt{(1+cc)}})}$ et $2AO = c + \sqrt{(1+cc)} + \text{Conſt.}$ Hinc ergo obtinemus conſtantem quaeſitam $= 2AO - c - \sqrt{(1+cc)}$ ob $\sqrt{n} = \sqrt{(1+cc)}$. Quo valore ſubſtituto erit pro quibusuis punctis M et N diuerſis, ita ſumtis, vt ſit $u = \sqrt{\frac{nxx-1}{nxx-n}}$ ſumma arcuum $AM + AN = ux\sqrt{n} + 2AO - c - \sqrt{(1+cc)}$ ſeu $ON - OM = ux\sqrt{n} - c - \sqrt{(1+cc)}$. Sic igitur duos arcus nacti ſumus ON et OM, quorum differentia $ON - OM$ geometrice aſſignari poteſt.

17. Quo autem facilius pateat, quomodo tam
Fig. 7. punctum O, quam ex puncto M punctum N definiri queat; erigatur in A perpendiculum $AD = c$, eritque recta CD hyperbolae aſymtota; tum poſitis $CP = x$; $PM = y$, ducatur tangens MT, erit ob $y = c\sqrt{(xx-1)}$ et $dy = \frac{cxdx}{\sqrt{(xx-1)}}$ ſubtangens $PT = \frac{y\sqrt{(xx-1)}}{cx} = x - \frac{1}{x}$; et $CT = \frac{1}{x}$; et ipſi tangens $MT = \frac{y\sqrt{(nxx-1)}}{cx}$. Hinc prodit $\sqrt{\frac{xx-1}{nxx-1}} = \frac{PT}{MT}$, ideoque $u = \frac{MT}{PT\sqrt{(1+cc)}} = \frac{CA^2 . MT}{CD . PT} = CQ$.

18. Ducatur ex centro C tangenti TM parallela $CR = CD$, demiſſoque ex R in axem perpendiculo RS, erit $CS = \frac{CD . PT}{MT}$, ideoque $CQ = \frac{CA^2}{CS}$. Quare CQ capienda erit tertia proportionalis ad CS et CA. Commodius

modius autem res ſequenti modo ſine tangentium adminiculo expedietur: nam cum ſit $QN = \frac{cc}{\sqrt{n(xx-1)}} = \frac{c^3}{y\sqrt{n}}$ erit $PM.QN = \frac{c^3}{\sqrt{(1+cc)}} = \frac{AD^3}{CD}$ vel demiſſo ex A in aſymtotam perpendiculo AE erit $PM.QN = AD.DE$ ob $DE = \frac{AD^2}{CD}$, vnde ſequens Theorema conficitur.

Theorema 3.

19. Exiſtente AOZ hyperbola, C eius centro, A vertice, et CDZ eius aſymtota, ad quam ex A axi perpendiculariter ducta ſit recta AD, itemque AE ad aſymtotam perpendicularis; ſi applicata conſtituatur IO media proportionalis inter AD et DE, atque vtrinque applicatae PM et QN ita ſtatuantur, vt inter eas ſit IO media proportionalis; tum arcuum ON et OM differentia geometrice aſſignari poterit. Erit enim Fig. 8.

$$ON - OM = \frac{CP.CQ - CI.CT}{CE}.$$

Demonſtratio ex §. praec. eſt manifeſta. Cum enim punctis M et N in O coëuntibus ſit $IO.TO = AD.DE$, erit IO media proportionalis inter AD et DE; hacque inuenta eſſe oportet $PM.QN = OI.OT$. Tum vero ex §. 16. intelligitur eſſe $ON - OM = (CP.CQ - CI.CI)\sqrt{n}$, et ob $\sqrt{n} = CD$, erit homogeneitatem implendo $ON - OM = (CP.CQ - CI.CT)\frac{CD}{CA^2}$. At eſt $\frac{CA^2}{CD} = CE$, ſicque conſtat theorematis veritas.

III. De Curua Lemniscata.

20. Haec curua ob plurimas, quibus praedita eſt, inſignes proprietates inter Geometras eſt celebrata,

I 2 im-

Tab. II. Fig. 1. imprimis autem quod eius arcus arcubus curuae elaſticae ſint aequales. Natura autem huius curuae ita eſt comparata, vt poſitis coordinatis orthogonalibus $CP = x$, $PM = y$, iſta aequatione exprimatur $(xx+yy)^2 = xx-yy$. Vnde patet hanc curuam eſſe lineam quarti ordinis, quae in C, quod punctum eius centrum dicitur, cum axe CA angulum ſemirectum conſtituit, in A autem ſumta $CA = 1$, axem normaliter traiicit. Figura autem CMNA quartam partem totius lemniscatae exhibet, cui tres reliquae partes circa centrum C aequales ſunt concipiendae; id quod inde liquet, quod ſiue abſciſſa x, ſiue applicata y, ſiue vtraque, negatiuum valorem induat, aequatio eadem manet.

21. Quod igitur ad expreſſionem arcus cuiusque CM huius curuae attinet, is commodiſſime ex corda CM definitur. Si enim hanc cordam ponamus $CM = z$, ob $xx+yy = zz$ habebimus:

$$z^4 = xx-yy = 2xx-zz = zz-2yy$$

vnde elicimus

$$x = z\sqrt{\frac{1+zz}{2}} \text{ et } y = z\sqrt{\frac{1-zz}{2}}$$

et differentiando

$$dz = \frac{dz(1+2zz)}{\sqrt{2(1+zz)}} \text{ et } dy = \frac{dz(1-2zz)}{\sqrt{2(1-zz)}}$$

Hinc ergo elementum arcus CM colligitur

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dz\sqrt{\frac{(1-zz)(1+2zz)^2+(1+zz)(1-2zz)^2}{2(1+zz)(1-zz)}}$$

ſiue $\sqrt{(dx^2+dy)^2} = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$.

22. Si ergo corda quaecunque ex centro C educta ponatur $CM = z$, erit arcus ab ea ſubtenſus $CM =$

$CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$. Simili ergo modo ſi alia quaevis corda CN dicatur $= u$, erit arcus ab ea ſubtenſus $CN = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$; cuius complementum ad totum quadrantem eſt arcus AN. Iam Ill. Comes *Fagnani* docuit, cuiusmodi functio ipſius z capi debeat pro u, vt vel arcus AN aequalis fiat arcui CM, vel vt arcus CN ſit duplus arcus CM, vel etiam vt arcus AN ſit aequalis duplo arcui CM. Hos ergo caſus primo exponam, deinceps autem, quae mihi circa alias huiusmodi arcuum proportiones eruere contigit, in medium ſum allaturus.

Theorema 4.

23. In curua lemniscata hactenus deſcripta, ſi applicetur corda quaecunque $CM = z$, aliaque inſuper applicetur, quae ſit $CN = u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; erit arcus CM aequalis arcui AN, vel etiam arcus CN aequalis arcui AM.

Demonſtratio.

Cum ſit corda $CM = z$, erit arcus $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$, et ob cordam $CN = u$ erit arcus $CN = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. At eſt $u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; vnde fit $du = \frac{-2zdz}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$. Praeterea vero eſt $u^4 = \frac{1-2zz+z^4}{1+2zz+z^4}$, ideoque $1-u^4 = \frac{4zz}{(1+zz)^2}$ et $\sqrt{(1-u^4)} = \frac{2z}{1+zz}$. Quibus valoribus ſubſtitutis habebitur arcus $CN = -\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = -$ arc. CM + Conſt. ita vt ſit arc. CN + arc. CM = Conſt. Ad hanc conſtantem definiendam, perpendatur caſus quo $z = 0$, ideoque et arcus $CM = 0$, hoc autem caſu fit corda

 CN=

$CN = u = 1 = CA$; ideoque arcus CN abit in quadrantem CMNA, ex quo habebitur pro hoc caſu $CMNA + o =$ Conſt. Hoc ergo valore ſubſtituto prodibit in genere

arc. CN + arc. CM = arc. CMNA

hincque arc. CM = arc. AN, et arcum MN vtrinque addendo arc. CMN = arc. ANM. Q. E. D.

Coroll. 1.

24. Dato ergo quocunque arcu CM in centro C terminato, cuius corda eſt $CM = z$, ei ab altera parte ſeu vertice A abſcindetur arcus aequalis AN, ſumendo cordam $CN = u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, ſeu $CN = CA \sqrt{\frac{CA^2 - CM^2}{CA^2 + CM^2}}$, homogeneitatem ſupplendo per axem $CA = 1$.

Coroll. 2.

25. Cum ſit $u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, erit viciſſim $z = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$; vnde cordas CM et CN inter ſe permutare licet, ita vt ſi ambae cordae $CM = z$ et $CN = u$ ita fuerint comparatae, vt ſit $uuzz + uu + zz = 1$; etiam puncta M et N inter ſe permutari queant, indeque prodeat tam arcus CM = arc. AN, quam arc. CN = arc. AM.

Coroll. 3.

26. Cum ſit $CN = u = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, erit $\sqrt{\frac{1+uu}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$ et $\sqrt{\frac{1-uu}{2}} = \frac{z}{\sqrt{(1+zz)}}$. Vnde cum ex natura curuae lemniſcatae pro puncto N coordinatae ſint $CQ = u\sqrt{\frac{1+uu}{2}}$ et $QN = u\sqrt{\frac{1-uu}{2}}$, erit $CQ = \frac{u}{\sqrt{(1+zz)}}$ et

et $QN = \frac{uz}{\sqrt{(1+zz)}}$, ideoque $\frac{QN}{CQ} = z$. Quare ſi in A ad axem CA erigatur normalis AT, donec cordae CN productae occurrat in T, erit $AT = z = CM$.

Coroll. 4.

27. Ex dato ergo puncto M alterum punctum N ita facillime definitur: capiatur tangens AT aequalis cordae CM, ductaque recta CT curuam in puncto quaeſito N ſecabit. Ob eandem autem rationem patet, ſi corda CM producatur, donec tangenti in A occurrat in S, erit pariter $AS = CN$.

Coroll. 5.

28. Manifeſtum etiam eſt puncta M et N in vnum punctum O coire poſſe, in quo propterea totus quadrans COA in duas partes aequales diuiditur. Inuenietur ergo hoc punctum O, ſi ponatur $u = z$, vnde fit $z^4 + 2zz = 1$, hincque $zz + 1 = \sqrt{2}$; prodit ergo corda $CO = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$, cui ſimul tangens AI erit aequalis, vnde ſimul poſitio huius puncti O facile aſſignatur.

Coroll. 6.

29. Notato ergo hoc puncto O, quo totus quadrans COA in duas partes aequales CMO et ANO diuiditur, erit quoque punctis M et N per regulam expoſitam definitis arc. $MO =$ arc. ON: ita vt idem hoc punctum O omnes arcus MN in duas partes aequales diſpeſcat.

Theore-

Theorema. 5.

Tab. II. Fig. 2. 30. In curua lemniscata cuius axis $CA = 1$, ſi applicata ſit corda quaecunque $CM = z$, aliaque inſuper chorda applicetur $CM^2 = u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, erit arcus a corda hac u ſubtenſus CM^2 duplo maior quam arcus ab illa corda ſubtenſus CM.

Demonſtratio.

Cum ſit corda $CM = z$, erit arcus $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ ſimiliterque ob cordam $CM^2 = u$ erit arcus $CM^2 = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Quia autem eſt $u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, erit $uu = \frac{4zz-4z^6}{1+2z^4+z^8}$ ideoque $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1-2zz-z^4}{1+z^4}$ et $\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+2zz-z^4}{1+z^4}$ vnde fit $\sqrt{(1-u^4)} = \frac{1-6z^4+z^8}{(1+z^4)^2}$. Tum vero differentiando colligitur $du = \frac{2dz(1-z^8)-4z^4dz(1+z^4)-8z^4dz(1-z^4)}{(1+z^4)^2\sqrt{(1-z^4)}}$ ſeu $du = \frac{2dz-12z^4dz+2z^8dz}{(1+z^4)^2\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{2dz(1-6z^4+z^8)}{(1+z^4)^2\sqrt{(1-z^4)}}$

Hinc ergo nanciſcimur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{2dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ et integrando arc. $CM^2 = 2$ arc. $CM +$ Conſt. Cum autem poſito $z = 0$ fiat etiam $u = 0$, ideoque ambo arcus CM et CM^2 euaneſcant, conſtans quoque in nihilum abit. Sicque ſumta corda $CM^2 = u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$ erit arcus $CM^2 = 2$ *arc.* CM. Q. E. D.

Coroll. 1.

31. Si capiatur corda $CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, erit arcus $AN =$ arc. CM, hincque etiam arcus CM^2 erit $= 2$ arc. AN. Simili modo ſi capiatur corda $CN^2 = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$, erit arcus $AN^2 =$ arc. CM^2, ſicque etiam a ver-

a vertice A erit arc. $AN^2 = 2$ arc. AN. Hoc ergo modo obtinentur quatuor arcus inter ſe aequales ſcilicet arc. CM, arc. MM^2, arc. AN, et arc. NN^2.

Coroll. 2.

32. Cum autem ſit $u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$; $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1-2zz-z^4}{1+z^4}$ et $\sqrt{(1+uu)} = \frac{1+2zz-z^4}{1+z^4}$, hae quatuor cordae ita habebuntur expreſſae vt ſit:
$CM = z$; $CN = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; $CM^2 = \frac{2z\sqrt{(1-z^4}}{1+z^4}$, $CN^2 = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$

Coroll. 3.

33. Conueniant ambo puncta M^2 et N^2 in curvae puncto medio O, pro quo ſupra vidimus eſſe cordam $CO = \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$ atque hoc caſu tota curua COA in quatuor partes aequales diſpeſcetur in punctis M. O et N. Hoc igitur euenit ſi ſit $CM^2 = CN^2 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$: ita vt poſito breuitatis gratia $\sqrt{(\sqrt{2}-1)} = \alpha$, habeamus $1-2zz-z^4 = \alpha + 2\alpha zz - \alpha z^4$ ſeu $z^4 = \frac{-2(1+\alpha)zz+1-\alpha}{1-\alpha}$ et $zz = \frac{-(1+\alpha)+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1-\alpha}$ vel $zz = \frac{-1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{1-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}$. Vnde colligimus $CM = z = \sqrt{\frac{-1-\alpha+\sqrt{2(1+\alpha\alpha}}{1-\alpha}}$ et $CN = \sqrt{\frac{-1+\alpha+\sqrt{2(1+\alpha\alpha)}}{1+\alpha}}$. Tab. II Fig. 3.

Coroll. 4.

34. Coaleſcant ambo puncta M^2 et N, et puncta M et N^2 pariter coibunt, ſicque tota curua CMNA in punctis M et N trifariam ſecabitur. Pro hoc ergo caſu habebitur vel $\frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4} = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$ vel $z = \frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$ quarum poſterior dat $1-z-2zz-2z^3-z^4+z^5 = 0$, Fig. 4.

 haec-

haecque per $1+z$ diuiſa $1-2z-2z^3+z^4=0$; cuius concipiantur factores $(1-\mu z+zz)(1-\nu z+zz)=0$, eritque $\mu+\gamma=2$ et $\mu\nu=-2$, vnde fit $\mu-\nu=2\sqrt{3}$, hincque $\mu=1+\sqrt{3}$ et $\nu=1-\sqrt{3}$. Erit ergo $z=\frac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=CM$, et ob $zz=\frac{4+4\sqrt{3}\pm2(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}{4}$ orietur $CN=\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}=\sqrt{\frac{-2\sqrt{3}\mp(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}\pm(1+\sqrt{3})\sqrt{2\sqrt{3}}}}=\sqrt{\frac{\mp\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}}$. Eſt itaque $CM=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ et $CN=\sqrt{\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}}$.

Coroll. 5.

Tab. II. Fig. 2. 35. Dato etiam quocunque arcu CM^2, inueniri poteſt eius ſemiſſis CM: ſi enim arcus illius ponatur corda $CM^2=u$, et arcus quaeſiti corda $CM=z$, erit $u=\frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$ et $1-\frac{4zz}{uu}+2z^4+\frac{4z^6}{uu}+z^8=0$, cuius factores concipiantur $(1-\mu zz-z^4)(1-\nu zz-z^4)=0$: vnde obtinetur $\mu+\nu=\frac{4}{uu}$ et $\mu\nu=4$; erit ergo $\mu-\nu=4\sqrt{(\frac{1}{u^4}-1)}=\frac{4}{uu}\sqrt{(1-u^4)}$ hincque $\mu=\frac{2+2\sqrt{(1-u^4)}}{uu}$ et $\nu=\frac{2-2\sqrt{(1-u^4)}}{uu}$: ergo $zz=\frac{-1-\sqrt{(1-u^4)}+\sqrt{2(1+\sqrt{(1-u^4)})}}{uu}$: vnde pro z duplex valor realis elicitur:

alter $z=\frac{\sqrt{(-1-\sqrt{(1-u^4)}+\sqrt{2(1+\sqrt{(1-u^4)})})}}{u}=\frac{\sqrt{(1-\sqrt{(1-uu)})(\sqrt{(1+uu)}-1)}}{u}$

alter $z=\frac{\sqrt{(-1+\sqrt{(1-u^4)}+\sqrt{2(1-\sqrt{(1-u^4)})})}}{u}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{(1-uu)})(\sqrt{(1+uu)}-1)}}{u}$

Coroll. 6.

Fig. 5. 36. Duplex hic valor reuera locum obtinet, cum enim eadem corda CM^2 et Cm^2 duos arcus diverſos CM^2 et CM^2m^2 ſubtendat, alter valor ipſius z praebebit cordam arcus CM, qui eſt ſemiſſis arcus CM^2, alter autem valor ipſius z dat cordam arcus CM, qui eſt

eſt ſemiſſis arcus CM^2m^2: ac prior quidem valor pro illo caſu, poſterior vero pro hoc locum habet.

Coroll. 7.

37. Hoc modo etiam lemniſcata CA in quinque partes aequales diuidi poteſt. Sit enim corda partis ſimplicis $C1 = z$; corda partis duplicatae $C2 = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4} = u$, erit corda partis quadruplicatae $C4 = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4} = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$, quia eſt $A4 = C1$; vnde corda z definitur, qua inuenta cum ſit $C2 = A3$, erit corda $C3 = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$. Fig. 6.

Coroll. 8.

38. Cum hinc poſita corda cuiuspiam $= z$, reperiri poſſint cordae arcuum dupli, quadrupli, octupli, ſedecupli, etc. manifeſtum eſt hoc modo etiam lemniſcatam in tot partes diuidi poſſe, quarum numerus ſit $2^m + 2^n$. In hac autem formula continentur ſequentes numeri

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 17, 18, 20, 24, 32, 33 etc.

Verum hinc non ſemper omnia diuiſionum puncta aſſignare licet.

Scholion.

39. Haec igitur ſunt, quae Ill. Comes *Fagnani* de curua lemniſcata obſeruauit, vel quae ex eius inuentis deriuare licet. Etſi enim tantum propoſito arcu quocunque eius duplum aſſignare docuit, tamen hunc arcum iterum continuo duplicando, etiam cordae arcuum

 quadrupli,

quadrupli, octupli, ſedecupli etc. inde colligentur. Namque ſi corda arcus ſimpli ſtatuatur $= z$, arcus dupli $= u$, quadrupli $= p$; octupli $= q$, ſedecupli $= r$ etc. erit:

$$u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$$

$$p = \frac{2u\sqrt{(1-u^4)}}{1+u^4} = \frac{4z(1+z^4)(1-6z^4+z^8)\sqrt{(1-z^4)}}{(1+z^4)^4+16z^4(1-z^4)^2}$$

$$q = \frac{2p\sqrt{(1-p^4)}}{1+p^4};\quad r = \frac{2q\sqrt{(1-q^4)}}{1+q^4} \text{ etc.}$$

Aliorum autem arcuum multiplorum cordas ex his aſſignare non licet. Quemadmodum ergo arcuum quorumuis multiplorum cordae exprimantur, hic inueſtigabo, vt hoc argumentum, quantum limites analyſeos id quidem permittunt, penitus perficiatur. Primum quidem tentando elicui, ſi arcus ſimpli corda ſit $= z$, tum arcus tripli cordam fore $= \frac{z(3-6z^4-z^8)}{1+6z^4-3z^8}$ verum poſtea rem ſequenti modo generaliter expediri poſſe intellexi.

Theorema 6.

Fig. 7. 40. Si corda arcus ſimplicis CM ſit $= z$, et corda arcus n cupli $CM^n = u$, erit corda arcus $(n+1)$ cupli $CM^{n+1} = \dfrac{z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} + u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}}{1 - uz\sqrt{\frac{(1-uu)(1-zz)}{(1+uu)(1+zz)}}}$.

Demonſtratio.

Erit ergo ipſe arcus ſimplex $CM = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$; et arcus n cuplus $CM^n = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}} = n\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$: ideoque habemus $du = \frac{n\,dz\sqrt{(1-u^4)}}{\sqrt{(1-z^4)}}$. Ponamus breuitatis gratia $z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} = P$, et $u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} = Q$, vt ſit corda pro arcu $(n+1)$ cuplo

cuplo exhibita $CM^{n+1} = \frac{P+Q}{1-PQ}$, quae dicatur $= s$ atque demonſtrari oportet, eſſe arcum huic cordae reſpondentem $\int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = (n+1)\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ ſeu $\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{(n+1)dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$. Cum autem ſit $s = \frac{P+Q}{1-PQ}$ erit $ds = \frac{dP(1+QQ)+dQ(1+PP)}{(1-PQ)^2}$: tum vero reperitur

$$1 - s^4 = \frac{(1-PQ)^4-(P+Q)^4}{(1-PQ)^4} = \frac{(1+PP+QQ+PPQQ)(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}{(1-PQ)^4}$$

ergo $\sqrt{(-s^4)} = \frac{\sqrt{(1+PP)(1+QQ)(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}}{(1-PQ)^2}$ ex quo elicitur:

$$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{dP\sqrt{\frac{1+QQ}{1+PP}} + dQ\sqrt{\frac{1+PP}{1+QQ}}}{\sqrt{(1-PP-QQ-4PQ+PPQQ)}}$$

cuius expreſſionis ergo valorem inueſtigemus:

Ac primo quidem eſt $1+PP = \frac{1+uu+zz+uuzz}{1+uu}$ et $1+QQ = \frac{1+uu+zz-uuzz}{1+zz}$, ita vt ſit $\frac{1+PP}{1+QQ} = \frac{1+zz}{1+uu}$, ideoque $\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{dP\sqrt{\frac{1+uu}{1+zz}} + dQ\sqrt{\frac{1+zz}{1+uu}}}{\sqrt{(1-PP-QQ+PPQQ-4PQ)}}$.

Deinde vero ob

$1-PP = \frac{1+uu-zz+uuzz}{1+uu}$ et $1-QQ = \frac{1+zz-uu+uuzz}{1+zz}$ erit

$(1-PP)(1-QQ) = 1-P^2-Q^2+P^2Q^2 = \frac{1-z^4-u^4+4uuzz+u^4z^4}{(1+zz)(1+uu)}$ et $4PQ = \frac{4uz\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}}{(1+zz)(1+uu)}$; hincque concluditur denominator $\sqrt{(1-PP-QQ+PPQQ-4PQ)}$

$= \frac{\sqrt{(1-z^4-u^4+4uuzz+u^4z^4-4uz\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)})}}{\sqrt{(1+zz)(1+uu)}}$

$= \frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}{\sqrt{(1+zz)(1+uu)}}$, ex quo obtinebitur

$$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{dP(1+uu)+dQ(1+zz)}{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}.$$

Iam vero differentiando elicimus

$$dP = dz\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} - \frac{2zudu}{(1+uu)\sqrt{(1-u^4)}}$$

$$dQ = du\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} - \frac{2zudz}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$$

 quare

quare ob $du = \frac{n\,dz\sqrt{(1-u^4)}}{\sqrt{(1-z^4)}}$, erit

$$dP = dz\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} - \frac{2nuz\,dz}{(1+uu)\sqrt{(1-z^4)}}$$

$$dQ = \frac{n\,dz\sqrt{(1-u^4)}}{1+zz} - \frac{2uz\,dz}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$$

vnde conficitur numerator $dP(1+uu)+dQ(1+zz)$ $= dz\sqrt{(1-u^4)} - \frac{2nuz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}} + n\,dz\sqrt{(1-u^4)} - \frac{2uz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ ſiue $dP(1+uu)+dQ(1+zz) = (n+1)dz\sqrt{(1-u^4)} - \frac{2(n+1)uz\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ $= \frac{(n+1)dz}{\sqrt{(1-z^4)}}\left(\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)} - 2uz\right)$ vnde perſpicuum eſt, eſſe

$$\frac{ds}{\sqrt{(1-s^4)}} = \frac{(n+1)dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$$ et arc. $CM^{n+1} = (n+1)$ arc. CM Q. E. D.

Coroll. 1.

41. Si a vertice A abſcindantur arcus Am, Am^n, Am^{n+1} arcubus CM, CM^n, CM^{n+1} reſpectiue aequales, erit Cm corda complementi arcus CM, Cm^n corda complementi arcus CM^n; Cm^{n+1} corda complementi arcus CM^{n+1}. Erunt autem ob cordas $CM = z$; $CM^n = u$; $CM^{n+1} = s$, complementorum cordae $Cm = \sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$; $Cm^n = \sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}}$; $Cm^{n+1} = \sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}}$.

Cum autem ſit $s = \frac{z\sqrt{\frac{1-uu}{1+uu}} + u\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}}{1 - zu\sqrt{\frac{(1-uu)(1-zz)}{(1+uu)(1+zz)}}} = \frac{P+Q}{1-PQ}$ erit

$$\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}} = \sqrt{\frac{1-PP-QQ-4PQ+PPQQ}{(1+PP)(1+QQ)}} = \frac{\sqrt{(1-z^4)(1-u^4)}-2uz}{1+uu+zz-uuzz}$$

quae ad hanc formam reducitur

$$\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}} = \frac{\sqrt{\frac{(1-zz)(1-uu)}{(1+zz)(1+uu)}} - uz}{1+uz\sqrt{\frac{(1-zz)(1-uu)}{(1+zz)(1+uu)}}}.$$

COROL.

Coroll. 2.

42. Si igitur ponatur:
corda arcus ſimplicis $= z$; corda complementi $= Z$.
corda arcus n cupli $= u$; corda complementi $= V$
vt ſit $Z = \sqrt{\frac{1 - zz}{1 + zz}}$ et $V = \sqrt{\frac{1 - uu}{1 + uu}}$; erit
corda arcus $(n + 1)$ cupli $= \frac{zV + uZ}{1 - zuZV}$
corda complementi $= \frac{ZV - zu}{1 + zuZV}$.

Coroll. 3.

43. Inuentio ergo cordarum arcuum quorumuis multiplorum vna cum cordis complementi ita ſe habebit:

Corda arcus		corda complementi
ſimpli	$= a$	ſimpli $= A$
dupli	$= b = \frac{aA + aA}{1 - aaAA}$	dupli $= \frac{AA - aa}{1 + aaAA} = B$
tripli	$= c = \frac{aB + bA}{1 - abAB}$	tripli $= \frac{AB - ab}{1 + abAB} = C$
quadrupli	$= d = \frac{aC + cA}{1 - acAC}$	quadrupli $= \frac{AC - ac}{1 + acAC} = D$
quintupli	$= e = \frac{aD + dA}{1 - adAD}$	quintupli $= \frac{AD - ad}{1 + adAD} = E$

Coroll. 4.

44. Simili modo ſi corda arcus m cupli ſit $= r$, corda complementi $= R$; et corda arcus n cupli $= s$ eiusque corda complementi $= S$, vt ſit $R = \sqrt{\frac{1 - rr}{1 + rr}}$ et $S = \sqrt{\frac{1 - ss}{1 + ss}}$, erit corda arcus $(m+n)$ cupli $= \frac{rS + sR}{1 - rsRS}$ et corda complementi $= \frac{RS - rs}{1 + rsRS}$. Quin etiam ſumendo pro n numerum negatiuum, quia tum corda s abit

in

in ſui negatiuum, corda differentiae illorum arcuum exhiberi poterit, erit ſcilicet corda arcus $(m-n)$ cupli $=\frac{rS-sR}{1+rsRS}$ et corda complementi eius $=\frac{RS+rs}{1-rsRS}$.

Coroll. 5.

45. Sumtis ergo denominationibus, quae in coroll. 3 ſunt adhibitae, erit quoque

$$d=\frac{2bB}{1-bbBB}\qquad\text{et}\quad D=\frac{BB-bb}{1+bbBB}$$

$$e=\frac{bC+cB}{1-bcBC}\qquad\text{et}\quad E=\frac{BC-bc}{1+bcBC}$$

Coroll. 6.

46. Ex his colligitur ſi corda arcus ſimplicis ſtatuatur $=z$; valores cordarum in coroll 3 adhibitarum fore

$$a=z;\qquad A=\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$$

$$b=\frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4};\qquad B=\frac{1-2zz-z^4}{1+2zz-z^4}$$

$$c=\frac{z(3-6z^4-z^8)}{1+6z^4-3z^8};\qquad C=\frac{(1+z^4)^2-4zz(1-zz)^2}{(1+z^4)^2+4zz(1-zz)^2}\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$$

$$d=\frac{4z(1+z^4)(1-6z^4+z^8)\sqrt{(1-z^4)}}{(1+z^4)^4+16z^4(1-z^4)^2};\quad D=\frac{(1-6z^4+z^8)^2-8zz(1-z^4)(1+z^4)^2}{(1-6z^4+z^8)^2+8zz(1-z^4)(1+z^4)^2}$$

Scholion 1.

47. Ratio compoſitionis formularum $\frac{rS+sR}{1-rsRS}$ et $\frac{RS-rs}{1+rsRS}$ imprimis ideo notari meretur, quod ſimilis eſt regulae, qua tangens ſummae vel differentiae duorum angulorum definiri ſolet. Si enim ſit $rS=\text{tang.}\,\alpha$, et $sR=\text{tang.}\,\beta$ erit $\frac{rS+sR}{1-rsRS}=\text{tang.}\,(\alpha+\beta)$, et pro diffe-

differentia in coroll. 4 exhibita $\frac{rS - sR}{1 + rsRS} = \text{tang.}\,(\alpha - \beta)$. Similique modo ſi ponatur $RS = \text{tang.}\,\gamma$ et $rs = \text{tang.}\,\delta$ erit $\frac{RS - rs}{1 + rsRS} = \text{tang.}\,(\gamma - \delta)$ et $\frac{RS + rs}{1 - rsRS} = \text{tang.}\,(\gamma + \delta)$. Commodius autem iſta compoſitionis ratio repraeſentabitur, ſi ponatur

Corda arcus m cupli $r = M\,\text{ſin}\,\mu$, corda complementi $R = M\,\text{coſ.}\,\mu$

Corda arcus n cupli $s = N\,\text{ſin}\,\nu$; corda compl. $S = N\,\text{coſ.}\,\nu$ tum enim erit

Corda arcus $(m + n)$ cupli $= \frac{MN\,\text{ſin}\,(\mu + \nu)}{1 - M^2N^2\,\text{ſin}\,\mu\,\text{ſin}\,\nu\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{coſ.}\,\nu}$

Corda eius complementi $= \frac{MN\,\text{coſ.}\,(\mu + \nu)}{1 + M^2N^2\,\text{ſin}\,\mu\,\text{ſin}\,\nu\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{coſ.}\,\nu}$

Corda arcus $(m - n)$ cupli $= \frac{MN\,\text{ſin}\,(\mu - \nu)}{1 + M^2N^2\,\text{ſin}\,\mu\,\text{ſin}\,\nu\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{coſ.}\,\nu}$

Corda eius complementi $= \frac{MN\,\text{coſ.}\,(\mu - \nu)}{1 - M^2N^2\,\text{ſin}\,\mu\,\text{ſin}\,\nu\,\text{coſ.}\,\mu\,\text{coſ.}\,\nu}$

Cum autem ſit $1 - rr - RR = rrRR$, erit $1 - MM = M^4\,\text{ſin}\,\mu^2\,\text{coſ}\,\mu^2$, ideoque $M^2\,\text{ſin}\,\mu\,\text{coſ.}\,\mu = \sqrt{(1 - MM)}$ et $N^2\,\text{ſin}\,\nu\,\text{coſ}\,\nu = \sqrt{(1 - NN)}$, vnde iſtarum formularum denominatores abibunt in

$$1 - \sqrt{(1 - MM)(1 - NN)} \text{ et } 1 + \sqrt{(1 - M^2)(1 - NN)}$$

Praeterea vero ex illa aequatione $1 - MM = M^4\,\text{ſin}\,\mu^2\,\text{coſ.}\,\mu^2$ fit $\frac{1}{MM} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1 + \text{ſin}\,2\mu.\,\text{ſin}\,2\mu)}$ ob $\text{ſin}\,2\mu = 2\,\text{ſin}\,\mu\,\text{coſ.}\,\mu$. Verum hinc illae formulae non concinniores euadunt.

Scholion 2.

48. Ex his obſeruationibus calculus integralis non contemnenda augmenta conſequitur, ſiquidem hinc plu-

rimarum aequationum differentialium integrales particulares exhibere valemus, quarum integratio in genere vix ſperari poteſt. Sic propoſita aequatione differentiali

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

praeterquam quod caſus integralis $u = z$ per ſe eſt obvius, nouimus ei quoque ſatisfacere $u = -\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$. In genere igitur cum integratio conſtantem arbitrariam puta C inuoluat, erit u aequalis functioni cuipiam, quantitatum z et C; quae tamen nihilominus ita erit comparata, vt pro certo quodam ipſius C valore fiat $u = z$, itemque pro alio quodam ipſius C valore, $u = -\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}}$. Duo ergo dantur valores, quae conſtanti huic C tributi functionem illam in expreſſionem algebraicam adeo ſimplicem conuertunt.

Simili modo propoſita hac aequatione

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{2dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

duos habemus valores, quos ei ſatisfacere nouimus:

$$u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4} \text{ et } u = \frac{-1+2zz+z^4}{1+2zz-z^4}$$

pariterque geminos valores exhibere docuimus, qui in genere huic aequationi ſatisfaciant

$$\frac{m\,du}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{n\,dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

vnde

vnde via ad harum formularum integralia generalia inuenienda non parum praeparata videtur.

Deinde quae ſupra de ellipſi et hyperbola ſunt allata, ſequentes aequationum differentialium integrationes ſpeciales ſuppeditant.

Propoſita enim ex §. 3 hac aequatione

$$dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}+du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}=(xdu+udx)\sqrt{n}$$

nouimus ei ſatisfacere hanc aequationem integralem

$$1-nxx-nuu+nuuxx=0$$

Iſti autem aequationi ex § 5 petitae

$$dx\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}+du\sqrt{\frac{1-nuu}{1-uu}}=n(xdu+udx)$$

ſatisfacere inuenta eſt haec aequatio

$$1-xx-uu+nuuxx=0$$

Deinde ſequenti aequationi ex hyperbola §. 14 petitae

$$dx\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}+du\sqrt{\frac{nuu-1}{uu-1}}=(xdu+udx)\sqrt{n}$$

ſatisfacit quoque $1-nxx-nuu+nuuxx=0$, quae quidem cum priore ex ellipſi petita congruit cum ſit

$$\sqrt{\frac{nxx-1}{xx-1}}=\sqrt{\frac{1-nxx}{1-xx}}.$$

Hinc autem facile concludere licet, huic aequationi

$$dx\sqrt{\frac{f-gxx}{h-kxx}}+du\sqrt{\frac{f-guu}{h-kuu}}=(xdu+udx)\sqrt{\frac{g}{k}}$$

ſatisfacere hanc integralem ſpecialem

 $fh-gh$

$$fh - gh(xx + uu) + gkxxuu = o$$

Iſti autem aequationi alteri

$$dx\sqrt{\frac{f - gxx}{h - kxx}} + du\sqrt{\frac{f - guu}{h - kuu}} = (xdu + udx)\frac{g}{\sqrt{fk}}$$

ſatisfacere hanc integralem ſpecialem

$$fh - fk(xx + uu) + gkxxuu = o$$

Haec igitur ideo proponenda cenſui, quod anſam mihi praebere videntur ſubſidia Analyſeos vlterius excolendi.

DE

DE PROBLEMATIBVS INDETERMINATIS QVAE VIDENTVR PLVS QVAM DETERMINATA.

Auctore

L. EVLERO.

Omnia problemata, quae in Analyſi Diophantaea proponi ſolent, eſſe indeterminata, vel ipſa rei natura declarat; etſi enim plures eiusmodi quaeſtiones occurrant, quae non niſi vnicam ſolutionem admittunt, veluti ſi quaeratur cubus, qui vnitate auctus faciat quadratum, cui quaeſtioni praeter cubum 8 alius nullus ſatisfacere reperitur; tamen ne tales quidem quaeſtiones ad problemata determinata referri conuenit, propterea quod methodus eas reſoluendi tota ex ratione problematum indeterminatorum eſt petita, atque caſui potiſſimum ſingulari tribuendum videtur, ſi vnica ſolutio tantum locum habeat. Quemadmodum etiam non deſunt eiusmodi quaeſtiones, quae plane nullam ſolutionem admittunt, quae tamen nihilo minus quaeſtionibus indeterminatis recte annumerantur: ante enim quam certiores fuerimus facti, nullam dari ſolutionem, id quod operatio vſusque methodorum demum declarat, eas pro indeterminatis omnino habere debemus, noſtramque inveſtigationem perinde adornare, ac ſi infinita ſolutionum multitudo daretur. Ita ſi quaeri debeant tria qua-

drata, quorum ſumma faciat ſeptem, nemo dubitabit, quin haec quaeſtio indeterminatis ſit accenſenda, etiamſi deinceps inueſtigatione peracta impoſſibilitas ſolutionis manifeſto ſe prodat. Quando igitur hic de problematibus indeterminatis tractare conſtitui, quae plusquam determinata videantur; ne quis putet haec inuicem pugnare, fierique non poſſe, vt quod indeterminatum ſit, idem plus quam determinatum videri queat, inſtituti rationem clarius exponi oportere ſentio. Ac primo quidem nullum eſt dubium, quin cuilibet quaeſtioni Diophantaeae eiusmodi inſuper conditiones adiici queant, quibus ea non tam determinata, quam impoſſibilis reddatur. Veluti ſi quaeſtioni, qua duo quadrata petuntur, quorum ſumma ſit quadratum, inſuper haec conditio adiiciatur, vt eorundem quadratorum differentia quoque ſit quadratum, quaeſtio, quae primum erat maxime indeterminata, hac vnica conditione adiuncta fit impoſſibilis, ideoque merito pro plusquam determinata habetur. Simili modo tria quadrata quaerere in progreſſione arithmetica problema eſt indeterminatum et innumerabiles ſolutiones admittens, ſtatim vero ac quatuor quadrata in arithmetica progreſſione requiruntur, problema non determinatur, ſed prorſus ſit impoſſibile et plus quam determinatum.

Ex his exemplis manifeſtum eſt quaeſtionem indeterminatam per additionem vnicae conditionis reddi poſſe plus quam determinatam, ideoque impoſſibilem. E contrario vero dantur eiusmodi quoque quaeſtiones, quae iam tot conditiones continent, vt vnica noua conditione ſuper addita, pari iure, ac commemoratae, plus-

quam

quam determinatae fieri debere videantur, quibus tamen nihilo minus non vna, ſed plures, ſaepe conditiones adiungi poſſunt, ita vt iis non obſtantibus infinitae adhuc ſolutiones exhiberi queant; cuiusmodi caſus ex hoc problemate clariſſime intelligetur.

Quaerantur tres numeri, vt binorum productum addito tertio fiat quadratum

Scilicet vocando hos tres numeros x, y, z, requiritur vt ſit:

$$xy + z = \text{Quadr.}\quad xz + y = \text{Qu.}\quad yz + x = \text{Qu.}$$

Haec quaeſtio tentanti, niſi ſingularia artificia adhibeantur, iam ſolutu tam difficilis apparebit, vt ſi noua conditio ſuper adderetur, de ſolutione plane ſit deſperaturus. Si enim ponat $xy + z = aa$, vt habeat $z = aa - xy$, ambae reliquae formulae quadratum efficiendae erunt:

$$aax - xxy + y \quad \text{et} \quad aay - xyy + x$$

quarum priorem ſi ponat $= bb$, habebit quidem $y = \frac{aax - bb}{xx - 1}$; at hoc valore in tertia ſubſtituto, quadratum reddi debebit haec expreſſio;

$$x^5 - 2x^3 + aabbxx - (a^4 + b^4 - 1)x + aabb$$

quae certe iam eſt tam complicata, vt omnem ſolutoris ſollertiam requirat, neque de nouis conditionibus inſuper adimplendis ſit cogitandum.

Interim tamen huic quaeſtioni has inſuper conditiones adiicere licet, vt binorum numerorum productum cum eorundem ſumma quoque faciat quadratum, ſeu vt ſit:

$$xy + x + y = \square;\ xz + x + z = \square;\ yz + y + z = \square$$

Quis

Quis igitur non putaret, his tribus conditionibus adiectis, problema propoſitum iam per ſe ſatis difficile fieri plus quam determinatum? Interim tamen certum eſt, et hoc caſu problema adhuc eſſe indeterminatum, atque adeo in numeris integris infinitas ſolutiones admittere.

Quin etiam inſuper hae conditiones adiici poſſunt, manente ſolutionum numero, et quidem in numeris integris, infinito: 1°. vt ſumma productorum ex binis ſit quadratum, 2°. vt eadem ſumma productorum ex binis vna cum ipſorum numerorum ſumma fiat quadratum.

Nec vero nunc quidem conditionum multitudo exhauſta eſt cenſenda; nam poſtulari inſuper poteſt, vt trium quaeſitorum numerorum vel vnus, vel adeo duo, ſint ipſi quadrati, et quidem integri. Quodſi autem omnes tres debeant eſſe quadrati, ne nunc quidem problema ſit plus quam determinatum, ſed infinitas adhuc ſolutiones, etſi non in numeris integris, admittit; ac fortaſſe adhuc plures conditiones addi poſſent, quibus quoque ſatisfieri liceret.

En ergo problema, quod merito cuique plus quam determinatum videri debet.

Inuenire tres numeros integros x, y, z, *vt ſequentes formulae omnes fiant quadrata:*

$$xy+z=\square;\quad xy+x+y=\square;\quad xy+xz+yz=\square$$
$$xz+y=\square;\quad xz+x+z=\square;\quad xy+xz+yz+x+y+z=\square.$$
$$yz+x=\square;\quad yz+y+z=\square;$$

cuius ſimpliciſſima ſolutio ſine dubio eſt:

$$x=1;\ y=4,\ \text{et}\ z=12$$

tum

tum vero etiam ſequentes ſolutiones in promptu ſunt:

$$\begin{array}{llllll} x=1\,; & x=4\,; & x=4\,; & x=1\,; & x=1\,; & x=4 \\ y=12\,; & y=9\,; & y=12\,; & y=24\,; & y=40\,; & y=33 \\ z=24\,; & z=28\,; & z=33\,; & z=40\,; & z=60\,; & z=64 \end{array}$$

Verum ſi haec conditio inſuper ſit adiecta, vt ipſi tres numeri quaeſiti debeant eſſe quadrati, in fractis ecce has ſolutiones:

$$\begin{array}{llll} x=\frac{9}{64}\,; & x=\frac{49}{64}\,; & x=\frac{25}{9}\,; & x=\frac{9}{25} \\ y=\frac{25}{64}\,; & y=\frac{225}{64}\,; & y=\frac{64}{9}\,; & y=\frac{64}{25} \\ z=\frac{49}{16}\,; & z=\frac{169}{16}\,; & z=\frac{196}{9}\,; & z=\frac{196}{25} \end{array}$$

Huiusmodi autem quaeſtio, inquam, merito pro plusquam determinata habetur, has enim conditiones non pro arbitrio adiecimus, atque in ipſa indagatione huiusmodi conditionum, quas indoles problematis patitur, praecipua pars artificii continetur. Namque ſi quis ad arbitrium conditiones ſuperaddere vellet, admodum probabile eſſet, problema, vel vnica adiecta, re vera fieri plus quam determinatum; quam ob rem talia problemata, tot conditionibus onerata, recte ſtatim tanquam plus quam determinata ſpectantur, niſi aliunde conſtet, conditiones eas ab inſigni artifice eſſe adiectas.

Talia problemata autem iam in ipſo Diophanto occurrunt, quae commentatoribus non parum negotii fecerunt, cum quaedam tantum conditiones calculum tantopere occupent, vt reliquarum ratio neutiquam haberi poſſe videatur. Praemittuntur autem eiusmodi problematibus certae quaedam propoſitiones, quae ibi Porismata vocantur, in quibus tota ſolutionis vis continetur. Oſtenditur ſcilicet, ſi quibusdam conditionibus certo

quodam modo ſatisfiat, tum ſimul aliis quoque conditionibus quaſi ſponte ſatisfieri, ita vt non opus ſit calculum ſeorſim ad eas applicare. Ita pro quaeſtione exempli loco allegata, qua tres numeri $x, y,$ et z quaeruntur, vt conditiones praeſcriptae impleantur, poriſma praemittendum ita ſe habet:

Si quaerantur duo numeri x *et* y, *vt* $xy+x+y$ *fiat quadratum, puta* $=uu$, *atque tertius numerus* z *ita capiatur, vt ſit* $z=1+x+y\pm 2u$, *tum non ſolum hae formulae*,

$$xz+x+z \text{ et } yz+y+z \textit{ fient quadrata}:$$

ſed etiam hae,

$$xy+z;\ xz+y \text{ et } yz+x$$

vna cum iſtis

$$xy+xz+yz \text{ et } xy+xz+yz+x+y+z$$

ſponte fient quadrata.

Cum igitur huic vnicae conditioni, qua formula $xy+x+y$ quadratum reddi debet, facillime ſatisfiat, ope huius poriſmatis quaeſtio tam multis conditionibus circumſcripta, vt plus quam determinata videatur, nullo plane labore infinitis modis reſoluitur, et quidem in numeris integris.

Ponatur enim $xy+x+y=uu$, et cum ſit

$$xy+x+y+1=(x+1)(y+1)=uu+1$$

pro uu tale ſumatur quadratum, quod vnitate auctum habeat factores; ſit ſcilicet $uu+1=mn$, et numeri problemati ſatisfacientes erunt:

$$x=m-1;\ y=n-1;\ \text{et } z=m+n-1\pm 2u$$

In

In huiusmodi igitur problematibus totum negotium vertitur in inuentione idoneorum illorum porismatum, quibus tota ſolutio ita contineatur, vt ſtatim atque aliquibus conditionibus ſatisfecerimus, ſimul reliquas adimpleuerimus. Cum igitur ratio. talium porismatum a nemine adhuc ſit explicata, ſi eam accuratius expoſuero, non exiguum incrementum vniuerſa Analyſis Diophantaea inde accepiſſe erit exiſtimanda. Tota autem horum porismatum ratio ſequenti lemmati per ſe perſpicuo inniti videtur.

Lemma.

I. Si inuenti fuerint valores litterarum z, y, x *etc. quibus aequationi* $W = o$ *ſatisfiat, exiſtente* W *functione quacunque illarum litterarum* z, y, x *etc. atque* P, Q, R *etc. eiusmodi fuerint quantitates, vt* $P \pm W$, $Q \pm W$, $R \pm W$ *etc. fiant quadrata: tum iisdem valoribus pro* z, y, x *etc. aſſumtis, fient quoque quantitates* P, Q, R, *etc. quadrata.*

Ratio huius lemmatis eſt manifeſta, quia pro litteris z, y, x etc. tales valores aſſumi ponuntur, vt fiat $W = o$, ideoque ſi $P \pm W$, $Q \pm W$, $R \pm W$ ſint quadrata, etiam quantitates P, Q, R, ipſae quadrata ſint neceſſe eſt.

Coroll. 1.

2. Formulae quoque P, Q, R etc. reddentur quadrata, ſi fuerint $P + \alpha W$; $Q + \beta W$; $R + \gamma W$ etc. quadrata, vel etiam generalius, ſi iſtae expreſſiones:

$$P + \alpha W + \zeta W^2; \quad Q + \beta W + \eta W^2; \quad R + \gamma W + \theta W^2$$

fuerint quadrata.

Coroll. 2.

3. Viciſſim ergo etiam ſi litteris z, y, x etc. tales aſſignati fuerint valores, vt fiat $W = o$, tum etiam omnes huius generis formulae $PP + \alpha W$; $QQ + \beta W$; $RR + \gamma W$ etc. fient quadrata.

Coroll. 3.

4. Quodſi ergo aequationi $W = o$ infinitis diuerſis modis ſatisfieri queat, tum iisdem modis omnes huius generis formulae $PP + \alpha W$; $QQ + \beta W$; $RR + \gamma W$ etc. quadrata efficientur.

Coroll. 4.

5. Cum igitur numerus huiusmodi formularum in infinitum augeri poſſit, manifeſtum eſt, quomodo etiam infinitae conditiones praeſcribi poſſint, quibus omnibus ſatisfiat, ſimul atque vnicae conditioni, ſcilicet aequationi $W = o$, fuerit ſatisfactum.

Coroll. 5.

6. Simili modo hoc lemma ad cubos aliasue poteſtates altiores quascunque extendetur. Si enim factum fuerit $W = o$, tum quoque omnes huiusmodi formulae $P^3 + \alpha W$ fient cubi, et hae $P^4 + \alpha W$ biquadrata et ita porro, quaecunque etiam quantitates pro P accipiantur.

Scholion. 1.

7. Ratio quidem huius lemmatis tam eſt obuia, vt id nihil in receſſu habere videatur: ſi enim P, Q, R, etc.

etc. cum W fuerint functiones quaecunque litterarum z, y, x etc. harumque valores quaerantur, quibus ſequentes formulae:

$$PP + \alpha W; \; QQ + \beta W; \; RR + \gamma W \text{ etc.}$$

fiant quadrata, ſtatim vtique in oculos incurrit, his omnibus conditionibus ſatisfieri, dum modo haec vna $W = 0$ adimpleatur: verum plerumque ratio talis compoſitionis in formulis propoſitis tam eſt occulta, vt difficillimum ſit eam quantitatem W aſſignare, qua deleta partes reſiduae formularum ſponte fiant quadrata. Quin etiam non adeo foret difficile hanc compoſitionem ita abſcondere, vt eius inueſtigatio iam per ſe arduum problema conſtitueret. Viciſſim autem data aequatione $W = 0$, operam haud inutiliter collocari arbitror, ſi formulae ſimpliciores inueſtigentur, quae tum in quadrata abibunt; hoc enim modo plurima inſignia et concinna reperientur problemata, quorum ſolutio erit in promtu, cuiusmodi eſt id, cuius ſupra mentio eſt facta. Hunc in finem aequationem $W = 0$ talem aſſumi conueniet, vt litterae z, y, etc. in eam aequaliter ingrediantur, atque inter ſe permutari patiantur; tum enim ſi PP eiusmodi fuerit quadratum, vt ſit $PP + \alpha W$ quadratum, permutandis litteris z, y, x etc. in PP, vnde prodeant QQ, RR etc. etiam $QQ + \alpha W$, et $RR + \alpha W$ fient quadrata.

Scholion. 2.

8. Duplex ergo hinc naſcitur tractationis noſtrae partitio, primam ſcilicet conſtituet litterarum z, y, x etc

circa quas quaeſtio verſatur, numerus, prouti duo, vel tres, vel plures quaeruntur numeri, qui datis conditionibus ſint praediti. Alteram partitionem ſuppeditabit dimenſionum numerus, ad quem litterae z, y, x etc. in aequatione $W = 0$ aſſurgunt; quae aequatio cum ita debeat eſſe comparata, vt reſolutionem admittat, nullius quantitatum altior poteſtas quam ſecunda occurrere debet, quia alioquin reſolutio in numeris rationalibus abſolui non poſſet. Quare generalis forma aequationis $W = 0$, quam hic tractabimus erit:

$$0 = \alpha + \beta(z + y + x + \text{etc.}) + \gamma(zy + zx + yx + \text{etc.}) + \delta(zz + yy + xx + \text{etc.}) + \varepsilon(zzy + zyy + zzx + zxx + \text{etc.}) + \zeta(zyx + \text{etc.}) + \eta(zzyy + zzxx + yyxx + \text{etc.}) + \theta(zzyx + zyyx + \text{etc.})$$

etc.

quandoquidem numeri z, y, x, etc. in ea debent eſſe permutabiles. Secundum hanc duplicem ergo partitionem ſequentia problemata contemplemur, ab iis inchoaturi, in quibus duo numeri z et y quaerendi proponuntur.

Problema I.

9. *Propoſita hac aequatione reſoluenda:*

$$\alpha = \beta(z + y)$$

inuenio formulas ſimpliciores, quae per eius reſolutionem redduntur quadrata.

SOLV-

Solutio.

Cum huic aequationi $\alpha = \beta(z+y)$ fuerit ſatisfactum, manifeſtum eſt, ſimul hanc formam generalem

$$PP + M(-\alpha + \beta(y+z))$$

fieri quadratum, quaecunque quantitates pro P et M accipiantur. Quia β euaneſcere nequit, ponamus $\beta = 1$, vt inter y et z haec ſubſiſtat relatio $y + z = a$, ſitque

$$PP + M(y+z-a) = \text{Quadrato}$$

vnde ſequentes caſus notatu dignos euoluamus.

I. Sit $M = 2$ erit $PP + 2y + 2z - 2a =$ Quadrato. Capiatur $P = y - 1$ erit

1) $yy + 2z + 1 - 2a = \square$ et permutatione facta

2) $zz + 2y + 1 - 2a = \square$.

Capiatur $P = y + z - 1$ erit

3) $(y+z)^2 + 1 - 2a = \square$.

Capiatur $P = y - z + 1$ erit

4) $(y-z)^2 + 4y + 1 - 2a = \square$.

5) $(y-z)^2 + 4z + 1 - 2a = \square$.

II. Sit $M = -2$ vnde $PP - 2y - 2z + 2a =$ Quadrato. Capiatur $P = y + 1$ ſeu $P = z + 1$ erit

6) $yy - 2z + 1 + 2a = \square$.

7) $zz - 2y + 1 + 2a = \square$.

Capiatur $P = y + z + 1$ erit

8) $(y+z)^2 + 1 + 2a = \square$.

Capiatur $P = y - z + 1$ erit

9) $(y-z)^2 - 4z + 1 + 2a = \square$.

10) $(y-z)^2 - 4y + 1 + 2a = \square$.

III. Sit $M = 2n$, vnde $PP + 2ny + 2nz - 2na =$ Quadrato, atque non ſolum formulae praecedentes, ſed infinitae aliae, orientur.

Capiatur $P = y - n$ et $P = z - n$ erit

11) $yy + 2nz + nn - 2na = \square$.

12) $zz + 2ny + nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y - 2n$ et $P = z - 2n$ erit

13) $yy - 2ny + 2nz + 4nn - 2na = \square$.

14) $zz - 2nz + 2ny + 4nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y + z - n$ erit

15) $(y+z)^2 + nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y + z - 2n$ erit

16) $(y+z)^2 - 2n(y+z) + 4nn - 2na = \square$.

Capiatur $P = y - z - n$ erit

17) $(y-z)^2 + 4nz + nn - 2na = \square$.

18) $(y-z)^2 + 4ny + nn - 2na = \square$.

IV. Sit $M = -y$ vnde $PP - yy - yz + ay =$ Quadrato.

Capiatur $P = y$ erit

19) $-yz + ay = \square$.

20) $-yz + az = \square$.

Capiatur $P = y - \frac{1}{2}a$ erit

21) $-yz + \frac{1}{4}aa = \square$.

Capia-

Capiatur $P = y + z$, erit

22) $zz + yz + ay = \square$

23) $yy + yz + az = \square$

Capiatur $P = y + z - \frac{1}{4}a$, erit

24) $zz + yz + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa = \square$

25) $yy + yz + \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{16}aa = \square$

V. Sit $M = -z - y$, vnde $PP - (y+z)^2 + a(y+z) =$ Quadrato.

Capiatur $P = y + z$, erit

26) $ay + az = \square$

Capiatur $P = y + z - a$, erit

27) $aa - ay - az = \square$

Capiatur $P = y - z$, erit

28) $-4yz + a(y+z) = \square$

Capiatur $P = y - z - \frac{1}{2}a$, erit

29) $-4yz + 2az + \frac{1}{4}aa = \square$

30) $-4yz + 2ay + \frac{1}{4}aa = \square$

Capiatur $P = y - \frac{1}{2}a$, erit

31) $-zz - 2yz + az + \frac{1}{4}aa = \square$

32) $-yy - 2yz + ay + \frac{1}{4}aa = \square$

VI. Sit $M = (y+z+a)$; vnde $PP + (y+z)^2 - aa =$ Quadrato.

Capiatur $P = yz - 1$, erit

33) $yyzz + yy + zz + 1 - aa = \square$

VII. Sit $M = n(y+z+a)$; vnde $PP + n(y+z)^2 - naa =$ Quadrato.

Capiatur $P = yz - n$, erit

34) $yyzz + nyy + nzz + nn - naa = \square$

VIII. Sit $M = (y+z+a)(y-z+a)(z-y+a)$, vnde fit

$$PP - y^4 - z^4 - a^4 + 2yyzz + 2aayy + 2aazz = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = yy - zz$, erit

35) $2yy + 2zz - aa = \square$

Capiatur $P = yy + zz + aa$, erit

36) $yyzz + aayy + aazz = \square$

IX. Sit $M = 3(y+z+a)(y-z+a)(z-y+a)$, vnde fit

$$PP - 3y^4 - 3z^4 - 3a^4 + 6yyzz + 6aayy + 6aazz = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = 2yy + 2zz + 2aa$, erit

37) $y^4 + z^4 + 14yyzz + 14aayy + 14aazz + a^4 = \square$

Capiatur $P = 2yy + 2zz - 2aa$, erit

38) $y^4 + z^4 + a^4 + 14yyzz - 2aayy - 2aazz = \square$

39) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz + 14aayy - 2aazz = \square$

40) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy + 14aazz = \square$

X. Sit generalius $M = (nn-1)(y+z+a)(y-z+a)$ $(z-y+a)$, vnde fit

$$PP - (nn-1)(y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy - 2aazz) = \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P = n(yy + zz + aa)$, erit

41) $y^4 + z^4 + a^4 + 2(2nn-1)(yyzz + aayy + aazz) = \square$

Capiatur $P = n(yy + zz - aa)$, erit

42) $y^4 + z^4 + a^4 + 2(2nn-1)yyzz - 2aayy - 2aazz = \square$

43) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz + 2(2nn-1)aayy - 2aazz = \square$

44) $y^4 + z^4 + a^4 - 2yyzz - 2aayy + 2(2nn-1)aazz = \square$.

COROL.

Coroll. 1.

10. Ex his ſatis intelligitur infinitas exhiberi poſſe formulas, quae omnes per eandem relationem aequatione $y+z=a$ contentam in numeros quadratos abeant. Quotcunque ergo formulae proponantur ad quadrata reducendae, dummodo illae in his erutis contineantur, omnibus ſimul ſatisfiet ponendo $y+z=a$.

Coroll. 2.

11. Ita ſi a ſit $=1$: ſequentibus formulis omnibus: $yy+4z=\square$; $yy-y+z=\square$; $y+z=\square$; $y-yz=\square$ $zz+4y=\square$; $zz-z+y=\square$; $(y+z)^2-1=\square$; $z-yz=\square$ $yyzz+yy+zz=\square$; $2yy+2zz-1=\square$ ſatis fit ponendo $y+z=1$ ſeu $y=1-z$.

Coroll. 3.

12. Imprimis hic notanda eſt forma $yyzz+yy+zz$, quae in quadratum tranſit, ſi capiatur $y=1-z$; vel magis generaliter $y=\pm 1\pm z$. Solutio haec apud Diophantum frequentiſſime occurrit, cuius fundamentum in porismate quodam conſtituit, pluraque affert problemata, quae eius beneficio reſoluuntur.

Coroll. 4.

13. Simili modo haec forma latius patens $yyzz+aayy+aazz$ redditur quadratum, ponendo $y=\pm a\pm z$. Atque haec eadem poſitio facit etiam

N 2 hanc

hanc formam $yyzz + nyy + nzz + nn - naa$ quadratum, quicunque numerus pro n aſſumatur. Vnde ſi $a = 1$, haec forma $yyzz + nyy + nzz + nn - n$ ſiue haec: $(yy + n)(zz + n) - n$, fit quadratum, ponendo $z = y \pm 1$. Quod etiam eſt inſigne porisma Diophanti.

Scholion.

14. Omni attentione vtique dignum eſt, quod tam leui opera pluribus conditionibus ſimul ſatisfieri poſſit, cum quaelibet conditio peculiarem operationem exigere videatur. Quin etiam hic eiusmodi formulae occurrunt, quae ſi ſolae proponerentur, per methodos conſuetas non niſi difficulter reſolui poſſent, cuiusmodi eſt haec:

$$y^4 + z^4 + a^4 + 14yyzz + 14aayy + 14aazz = \text{Quadrato.}$$

cuius ſolutio ſi more conſueto tentetur, non exiguis difficultatibus implicata deprehenditur: ex quo ſi praeterea aliae conditiones praeſcribantur, quibus ſimul ſatisfieri oporteat, quaeſtio non immerito plus quam determinata, ac vires analyſeos transcendens videri debet. Continetur ergo in euolutione huius problematis iam porisma ampliſſimum, quod in Analyſi Diophantaea ſummum habet vſum, quod cum natum ſit ex poſitione ſimpliciſſima $z + y = a$; ita formulae magis compoſitae nos ad profundiora ac magis recondita porismata manuducent.

Problema 2.

15. Propoſita hac aequatione reſoluenda:

$$yz - a(y + z) + b = 0$$

inue-

inuenire formulas notabiliores, quae per eius reſolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

Sumta relatione inter numeros y et z ex hac aequatione

$$yz-a(y+z)+b=0$$

haec forma generalis $PP+M(yz-a(y+z)+b)$ euadet quadratum: cuius ergo ſpecies notabiliores euoluamus.

I. Sit $M=2$, vt habeatur

$$PP+2yz-2a(y+z)+2b= \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P=y-z$, eritque

1) $yy+zz-2a(y+z)+2b=\square$

Capiatur $P=y-z+a$, erit

2) $yy+zz-4az+2b+aa=\square$

3) $yy+zz-4ay+2b+aa=\square$

II. Sit $M=-2$, vt habeatur

$$PP-2yz+2a(y+z)-2b= \text{Quadrato.}$$

Capiatur $P=y+z$, erit

4) $yy+zz+2a(y+z)-2b=\square$

Capiatur $P=y+z-a$, erit

5) $yy+zz+aa-2b=\square$

III. Sit $M=2n$, vt habeatur

$$PP+2nyz-2na(y+z)+2nb= \text{Quadrato.}$$

 Capia-

Capiatur $P = yz - n$, erit

$$6)\ yyzz - 2n\,a(y+z) + 2nb + nn = \square$$

Capiatur $P = y + z + na$, erit

$$7)\ yy + zz + 2(n+1)yz + nnaa + 2nb = \square$$

IV. ſit $M = yz + a(y+z) - \mathfrak{b}$, vt habeatur

$$PP + yyzz - aa(y+z)^2 + (\mathfrak{b} - b)y + a(b+\mathfrak{b})(y+z) - b\mathfrak{b} = \text{Quadrato}.$$

Capiatur $P = m(y+z) + n$, vt ſit

$$yyzz + (mm-aa)(y+z)^2 + (\mathfrak{b}-b)yz + 2mn(y+z) + nn = \text{Quadrato}.$$
$$+ a(b+\mathfrak{b})(y+z) - b\mathfrak{b}$$

Fiat $mn = -\tfrac{1}{2}a(b+\mathfrak{b})$ et $2(mm-aa) + \mathfrak{b} - b = 0$, ſiue

$n = \frac{a}{m}(aa - mm - b)$ et $\mathfrak{b} = b + 2(mm - aa)$, erit

$$8)\ yyzz + (mm - aa)(yy + zz) + \frac{aa - mm}{mm}(bb + (aa - 2b)(aa - mm)) = \square.$$

Coroll. 1.

16. Hinc in aequatione canonica $yz - a(y+z) + b = 0$ litterae a et b ita determinari poſſunt, vt haec forma

$$yyzz + cc(yy + zz) \text{ fiat quadratum.}$$

Capiatur enim $mm = aa + cc$, et fiat $bb + 2bcc - aacc = 0$ ſeu $b = -cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}$. Quare pro a eiusmodi ſumatur numerus, vt $aa + cc$ fiat quadratum, tumque erit

$$yz - a(y+z) - cc \pm c\sqrt{(aa+cc)} = 0, \text{ ſiue}$$
$$(y-a)(z-a) = aa + cc \pm c\sqrt{(aa+cc)}$$

At vero hinc conficietur:

$$\sqrt{(yyzz + ccyy + cczz)} = (y+z)\sqrt{(aa+cc)} - ac$$

COROL.

Coroll. 2.

17. Ad formam ergo $yyzz+ccyy+cczz$ quadratum reddendam ſumatur primum numerus a, vt $\sqrt{(aa+cc)}$ fiat rationale, eritque tum

$$z=\frac{ay+cc\pm c\sqrt{(aa+cc)}}{y-a}$$

Haec autem ſolutio ſimul praecedentem eiusdem formae in ſe complectitur, caſu, quo a capitur infinitum, tum enim oritur $z=-y\pm c$, omnino vt ante, ideoque haec ſolutio latius patet quam illa.

Coroll. 3.

18. Si in forma (8) nulla limitatio fiat, ita vt aequatio propoſita $yz-a(y+z)+b=o$ generatim valeat, ea etiam hoc modo referri poteſt

$$(yy+mm-aa)(zz+mm-aa)-\frac{(mm-aa)}{mm}(mm-aa+b)^2=\text{Quadrato}.$$

Quare poſito $mm-aa=p$ et $b+p=m=\sqrt{(aa+p)}$, haec aequatio: $(yy+p)(zz+p)=VV+p$ reſoluetur hac determinatione $yz-a(y+z)-p+\sqrt{(aa+p}=o$ dummodo pro a talis accipiatur numerus, quo $aa+p$ fiat quadratum.

Coroll. 4.

19. Si ſtatuatur $\frac{b+p}{m}=q$ ſeu $b=-p+q\sqrt{(aa+p)}$, vt ſit

$$yz-a(y+z)-p+q\sqrt{(aa+p)}=o$$

hac

hac determinatione, ſi modo $aa+p$ fuerit quadratum, ſatisfiet huic conditioni

$$(yy+p)(zz+p)=VV+pqq$$

erit autem $V=(y+z)\sqrt{(aa+p)}-aq$

Coroll. 5.

20. Hinc ſi dato numero p quaerantur numeri y et z vt fiat $(yy+p)(zz+p)=$ Quadrato, poſito $q=o$, huic conditioni ſatisfiet ſtatuendo $yz-a(y+z)-p=o$, exiſtente $aa+p$ numero quadrato. Seu ſumatur $(y-a)(z-a)=aa+p$, vnde ſi $aa+p$ in factores reſoluatur, commode ambo numeri y et z definiuntur.

Coroll. 6.

21. Si ſit $a=o$, forma (8) fiet:

$$yyzz+mm(yy+zz)-bb-2mmb=\square$$

quae conditio ergo adimplebitur hac aequatione $yz+b=o$. Facto ergo $b=-2mm$, iſta formula

$yyzz+mmyy+mmzz$ reddetur quadratum,

ſumendo $yz=2mm$, quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

Problema 3.

22. Propoſita aequatione reſoluenda

$$yy+zz-2nyz-a=o$$

Inuenire formulas notabiliores, quae per eam redduntur quadrata

SOLV-

Solutio.

Hinc ergo iſta forma generalis erit quadratum
$PP + M(yy + zz - 2nyz - a) =$ Quadrato.

I. Sit $M = -1$ et $P = y \pm z$, erit
1) $2(n+1)yz + a = \square$
2) $2(n-1)yz + a = \square$

II. Sit $M = m$ et $P = yz + mn$, erit
3) $yyzz + myy + mzz - ma + mmnn = \square$

III. Sit $M = 2nyz$ et $P = 2nyz$, erit
4) $2nyz(yy + zz) - 2nayz = \square$

IV. Sit $M = -zz$ et $P = zz + nyz + \frac{1}{2}a$, erit
5) $(nn-1)yyzz + nayz + \frac{1}{4}aa = \square$

Coroll. 1.

23. Si ponamus $a = mnn$, peruenimus ad hanc formam:

$$yyzz + myy + mzz$$

quae ergo redditur quadratum, per hanc aequationem:

$$yy + zz - 2nyz - mnn = 0$$

vnde fit $z = ny \pm \sqrt{((nn-1)yy + mnn)}$
Quare pro y talis numerus aſſumi debet, vt $(nn-1)yy + mnn$ fiat quadratum.

Coroll. 2.

24. Quoniam hic numerus n arbitrio noſtro relinquitur, ſumatur talis, vt $nn-1$ prodeat quadratum,

 ſic

ſic enim commodiſſime forma $(nn-1)yy+mnn$ ad quadratum reducetur: capiatur ſcilicet $n=\frac{kk+1}{2k}$.

Scholion.

25. Hiſce formulis, quae duas indeterminatas inuoluunt, fuſius non immoror, quoniam ex allatis perſpicuum eſt, quomodo huiusmodi formularum inueſtigationem in infinitum extendere liceat. Pergo ergo ad tres indeterminatas, vbi plurima egregia porismata occurrunt, quorum praecipua hic explicabo.

Problema 4.

26. Propoſita hac aequatione reſoluenda:

$$a=x+y+z$$

definire formulas notabiliores, quae per eius reſolutionem quadrata redduntur.

Solutio.

Quadratum ergo generatim erit haec forma:

$$PP+M(x+y+z-a)$$

Sit $M=2n$, vt fiat

$$PP+2n(x+y+z)-2na=\square$$

Capiatur $P=x-n$, erit

1) $xx+2n(y+z)+nn-2na=\square$

2) $yy+2n(x+z)+nn-2na=\square$

3) $zz+2n(x+y)+nn-2na=\square$

Capiatur $P=x+y-n$, erit

4) $(x+y)^2+2nz+nn-2na=\square$

5) $(x+z)^2+2ny+nn-2na=\square$

6) $(y+z)^2+2nx+nn-2na=\square$

Sit

Sit $M = 2nxy$ et $P = xy - nx - ny$, erit

7) $xxyy + 2nxyz + nnxx + nnyy + 2nnxy - 2naxy = \square$

8) $xxzz + 2nxyz + nnxx + nnzz + 2n(n-a)xz = \square$

9) $yyzz + 2nxyz + nnyy + nnzz + 2n(n-a)yz = \square$

Sit $M = -(a + x + y + z)$ et $P = x + y - z$, erit

10) $aa - 4xz - 4yz = \square$

11) $aa - 4xy - 4yz = \square$

12) $aa - 4xy - 4xz = \square$

Sit $M = -n(a + x + y + z)$ et $P = xy + xz + yz + n$, erit

13) $(xy + xz + yz)^2 - n(xx + yy + zz) + nn + naa = \square$.

Coroll. 1.

27. Sit $n = 2a$; et $a = \frac{1}{2}$, atque his conditionibus:

$xx + y + z = \square \quad (x + y)^2 + z = \square$

$yy + x + z = \square \quad (x + z)^2 + y = \square$

$zz + x + y = \square \quad (y + z)^2 + x = \square$

ſatisfiet ponendo $x + y + z = \frac{1}{2}$.

Coroll. 2.

28. Sit $n = 1 = a$, atque his conditionibus:

$xxyy + 2xyz + xx + yy = \square$

$xxzz + 2xyz + xx + zz = \square$

$yyzz + 2xyz + yy + zz = \square$

ſatisfiet ponendo $x + y + z = 1$.

Coroll. 3.

29. Sit $a=2$, atque his conditionibus

$$1-xz-yz=\square$$
$$1-xy-yz=\square$$
$$1-xy-xz=\square$$

ſatisfiet ponendo $x+y+z=2$.

Problema 5.

30. Propoſita hac aequatione reſoluenda

$$xy+xz+yz=a(n+y+z)+b$$

definire formulas notabiliores, quae per eius reſolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

Erit ergo in genere haec formula:

$$PP+M(xy+xz+yz)-a(x+y+z)-b)=\text{Quadrato}.$$

Sit $M=2$, vt habeatur:

$$PP+2(xy+xz+yz)-2a(x+y+z)-2b=\text{Quadrato}.$$

Capiatur $P=x+y+z+a$, erit

1) $xx+yy+zz+4(xy+xz+yz)+aa-2b=$ Quadrato.

Capiatur $P=x+y-z+a$, erit

2) $xx+yy+zz+4xy-4az+aa-2b=\square$

3) $xx+yy+zz+4xz-4ay+aa-2b=\square$

4) $xx+yy+zz+4yz-4ax+aa-2b=\square$

Capiatur $P=x-y$, erit

5) $xx+yy+2(x+y)z-2a(x+y+z)-2b=\square$

6) $xx+zz+2(x+z)y-2a(x+y+z)-2b=\square$

7) $yy+zz+2(y+z)x-2a(x+y+z)-2b=\square$

Sit

Sit $M = -2$ et $P = x + y + z - a$, erit

8) $xx + yy + zz + aa + 2b = \square$.

Problema 6.

31. Propoſita hac aequatione

$$xx + yy + zz = 2xy + 2xz + 2yz + a$$

definire formulas ſimpliciores, quae per eius reſolutionem quadrata redduntur.

Solutio.

In genere ergo haec formula erit:

$$PP + M(xx + yy + zz - 2xy - 2xz - 2yz - a) = \text{Quadrato}.$$

Sit $M = -1$, ac ponatur $P = x + y + z$, erit

1) $4xy + 4xz + 4yz + a = \square$

Sit $M = -1$ et $P = x \mp y - z$, erit

2) $4xy + a = \square$

3) $4xz + a = \square$

4) $4yz + a = \square$

Sit $M = -1$ et $P = x - y$, erit

5) $a + 2(x + y)z - zz = \square$

6) $a + 2(x + z)y - yy = \square$

7) $a + 2(y + z)x - xx = \square$.

Coroll. 1.

32. Poſito $a = 4n$, vt ſit $xx + yy + zz = 2xy + 2xz + 2yz + 4n$, fient ſimul ſequentes formulae quadrata.

$$xy+n=\square$$
$$xz+n=\square \quad \text{et} \quad xy+xz+yz+n=\square$$
$$yz+n=\square$$

Vnde haec elegans quaeſtio Diophantea reſoluitur

Dato numero quocunque n, *inuenire tres numeros, vt producta ex binis ſingula, illo numero aucta, fiant quadrata, quibus conditionibus adiungi poteſt haec, vt ſumma productorum ex binis eodem numero aucta quoque fiat quadratum.*

Coroll. 2.

33. Cum enim ex aequatione ſit:

$$z=x+y\pm 2\sqrt{(xy+n)}$$

ſumantur pro x et y tales numeri, quibus $xy+n$ reddatur quadratum, puta $xy+n=uu$; indeque elicietur duplex valor pro numero z, ſcilicet $z=x+y\pm 2u$, quorum vterque cum x et y omnibus conditionibus aeque ſatisfacit,

Coroll. 3.

34. Cum autem ſit $\sqrt{(xy+n)}=u$, erunt, ſumto tertio numero $z=x+y+2u$, reliquae formulae

$$\sqrt{(xz+n)}=\frac{x+z-y}{2}=x+u$$
$$\sqrt{(yz+n)}=\frac{y+z-x}{2}=y+u$$
$$\sqrt{(xy+xz+yz+n)}=\frac{x+y+z}{2}=x+y+u.$$

Problema 7.

35. Propoſita hac aequatione:

$$xx+yyzz=2xy+2yz+2xz+2a(x+y+z)+b$$

definire

definire formulas notabiliores, quae per eius reſolutionem redduntur quadrata.

Solutio.

In genere ergo quadratum erit haec forma:

$$PP+M(xx+yy+zz-2xy-2yz-2xz-2a(x+y+z)-b)$$

Sit $M=-1$ et capiatur $P=x+y+z+a$, erit

1) $4xy+4xz+4yz+4a(x+y+z)+aa+b=\Box$

Capiatur $P=x+y+z-a$, erit

2) $4xy+4xz+4yz+aa+b=\Box$

Capiatur $P=x+y-z+a$, erit

3) $4xy+4a(x+y)+aa+b=\Box$

4) $4xz+4a(x+z)+aa+b=\Box$

5) $4yz+4a(y+z)+aa+b=\Box$

Capiatur $P=x+y-z-a$, erit

6) $4xy+4az+aa+b=\Box$

7) $4xz+4ay+aa+b=\Box$

8) $4yz+4ax+aa+b=\Box$.

Coroll. 1.

36. Ad formulas has facillime ſoluendas, ponatur tertia $4xy+4a(x+y)+aa+b$, aequalis quadrato cuipiam uu et ob $4(x+a)(y+a)=uu-b+3aa$,

ſeu $(x+a)(y+a)=\frac{1}{4}(uu-b+3aa)$

Ex factoribus numeri $\frac{1}{4}(uu-b+3aa)$ commodiſſime definiuntur numeri duo x et y; tertius autem z colligitur

ex

ex formae tertiae radice quadrata $x+y-z+a$, quae ergo eſt $=u$, vnde fit $z=x+y+a\pm u$.

Coroll. 2.

37) Si ſit $b=-aa$, per reſolutionem huius aequationis

$$xx+yy+zz=2xy+2yz+2xz+2a(x+y+z)-aa$$

ſequentes formulae omnes in quadrata abibunt:

$$xy+a(x+y)=\square;\ xy+az=\square$$
$$xz+a(x+z)=\square;\ xz+ay=\square$$
$$yz+a(y+z)=\square;\ yz+ax=\square$$
$$xy+xz+yz=\square$$
$$xy+xz+yz+a(x+y+z)=\square$$

Satisfiet autem ſumendo:

$$z=x+y+a\pm 2\surd(xy+a(x+y))=x+y+a\pm 2u$$

poſito $(x+a)(y+a)=uu+aa$.

Coroll. 3.

38. In hoc Coroll. continetur illud ipſum Problema, cuius initio feci mentionem; ſi quidem ponatur $a=1$. Atque ex iisdem formulis ſolui quoque poteſt quaeſtio, in qua ipſi numeri x, y, z quadrati eſſe debent, cuius ſolutionem hic ſubiungam.

Quaeſtio.

39. *Inuenire tres numeros quadratos, vt ad productum binorum, ſiue eorumdem ſumma, ſiue reliquus addatur, quadratum prodeat, atque vt inſuper tam ſumma*

ſumma productorum ex binis ipſa, quam eadem, ſumma numerorum aucta, fiat quadratum.

Poſitis ergo xx, yy, zz quadratis, qui quaeruntur, ſequentes formulas quadrata reddi oportet.

$$xxyy + xx + yy = \square; \quad xxyy + zz = \square$$
$$xxzz + xx + zz = \square; \quad xxzz + yy = \square$$
$$yyzz + yy + zz = \square; \quad yyzz + xx = \square$$
$$xxyy + xxzz + yyzz = \square$$
$$xxyy + xxzz + yyzz + xx + yy + zz = \square.$$

His autem omnibus ſatisfit, dummodo ſtatuatur

$$zz = xx + yy + 1 \pm 2\sqrt{(xxyy + xx + yy)}.$$

Supra autem vidimus, formam $xxyy + xx + yy$ quadratum fieri, ſi ponatur $y = x + 1$. Sit igitur $y = x + 1$, eritque

$$zz = 2xx + 2x + 2 \pm 2\sqrt{(x^4 + 2x^3 + 3xx + 2x + 1)} \text{ ſeu}$$
$$zz = 4(xx + x + 1).$$

Tantum ergo ſupereſt, vt $xx + x + 1$ reddatur quadratum, quod poſita radice $-x + t$ praebet

$$x = \frac{tt - 1}{2t + 1}; \text{ et } \sqrt{(xx + x + 1)} = \frac{tt + t + 1}{2t + 1}$$

vnde fit $z = 2\sqrt{(xx + x + 1)} = \frac{2(tt + t + 1)}{2t + 1}$.

Quadratorum ergo trium quaeſitorum radices ſunt:

$$x = \frac{tt - 1}{2t + 1}, \; y = \frac{tt + 2t}{2t + 1}; \; z = \frac{2tt + 2t + 2}{2t + 1}$$

Vel quo facilius pro t fractiones capi queant, ſtatuatur $t = \frac{r - q}{2q}$, eruntque hae radices

$$x = \frac{3qq + 2qr - rr}{4qr}; \; y = \frac{rr + 2qr - 3qq}{4qr}; \; z = \frac{rr + 3qq}{2qr}$$

vnde ſumto $r = 2$ et $q = 1$, oriuntur hi valores

$$x = \tfrac{3}{8};\ y = \tfrac{5}{8},\ z = \tfrac{7}{4}$$

quibus ſolutio ſupra tradita continetur. Simplicior fortaſſe ſolutio eſt:

$$x = \tfrac{8}{5},\ y = \tfrac{8}{3}\ \text{et}\ z = \tfrac{14}{6}.$$

Scholion.

40. His praeceptis obſeruandis facile erit numerum talium formularum pro lubitu multiplicare, easque tam ad quatuor indeterminatas, quam ad formas magis compoſitas, extendere. Quin etiam ſimili modo plures formae exhiberi poterunt, quae per certam poſitionem cubi redduntur; ſed quoniam in iis non amplius tanta cernitur concinnitas, hanc meditationem finiendam eſſe cenſeo, cum id, quod mihi praecipue erat propoſitum, vt nouum Analyſeos Diophanteae ſupplementum producerem, abunde explicauerim.

DE

DE EXPRESSIONE INTEGRALIVM PER FACTORES.

Auctore

L. EVLERO.

In integralibus ad ſeries infinitas reuocandis Geometrae adhuc plurimum fuere occupati, cum ad naturam ſerierum accuratius perſpiciendam, tum ob ſummum vſum, quem ſeries praeſtant ad integralium valores proxime cognoſcendos. Iam vero oſtendi in Tomo Comment. Petrop. XI. ob easdem rationes reductionem integralium ad producta ex infinitis factoribus conſtantia non minus eſſe dignam, quae omni cura excolatur, ibique plurima iam huius reductionis dedi ſpecimina, quae in Analyſi haud contemnendum vſum afferre videntur; etiamſi ipſa pertractatio nondum ſatis fuerit polita atque in ordinem digeſta. Quam ob rem hoc argumentum denuo ita reſumere eſt viſum, vt primo fundamenta, quibus innititur, luculentius exponerem, tum vero plures caſus, qui inprimis memorabiles videntur, accuratius euoluerem.

Ante omnia autem notari conuenit, hunc modum, integralia per factores exprimendi, non in genere ita tradi poſſe, vt ad omnes quantitatis variabilis valores aeque pateat, ad quod inſtitutum ſeries infinitae potiſſimum ſunt accommodatae, ſed factores tum ſolum

commode in vſum vocari poſſunt, quando is integralis tantum valor inueſtigatur, cum variabili valor quidem determinatus tribuitur. Neque vero hunc valorem pro lubitu aſſumere licet, ſed potius ita comparatum eſſe oportet, vt iam in formula differentiali ſingulari gaudeat proprietate, dum eam, vel ad nihilum, vel ad infinitum, redigit.

Huiusmodi autem caſus iam prae ceteris notatu inprimis digni, atque in applicatione ad praxin potiſſimum quaeri ſolent, ita vt plerumque quaeſtio verſari ſoleat in valore integralium pro huiusmodi quodam caſu inueniendo. Ita ſi de circuli quadratura agitur, vel huius formulae $\int \frac{dx}{\surd(1-xx)}$ valor deſideratur, caſu, quo $x = 1$, vel huius formulae $\int \frac{dx}{1+xx}$, caſu, quo $x = \infty$: ibi autem hoc caſu differentiale ipſum euadit infinitum, hic vero euaneſcit.

Quo igitur rem generalius complectar, duplicis generis formulas integrales hic euoluam: quae ſint $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ et $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^k}$, quarum vtramque ita integrari aſſumo, vt euaneſcat poſito $x = o$. Tum vero prioris integralis $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ eum tantum valorem determinare in animo eſt, quem accipit ſi ponatur $x = 1$: poſterioris vero integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^k}$ illum valorem, quem caſu $x = \infty$ ſortitur, tantum inueſtigabo. Euidens autem eſt hos integralium caſus prae reliquis tali eminenti praerogatiua gaudere, vt inprimis euolui mereantur.

Quan-

Quanquam hic elegantiae conſulens coefficientes omiſi, tamen perſpicuum eſt, has formulas aeque late patere, ac ſi tales coefficientes eſſent adiecti. Formula namque huiusmodi $\int \gamma y^{m-1} dy (\alpha - \beta y^n)^k$, poſito $\frac{\beta y^n}{\alpha} = x^n$ manifeſto ad allatam $\int x^{m-1} dx (1-x^n)^k$, reducitur, neque propterea latius patere eſt cenſenda, ac ſimili reductione haec formula $\int \frac{\gamma y^{m-1} dy}{(\alpha + \beta y^n)^k}$ in altera $\int \frac{x^{m-1} dx}{(1+x^n)^k}$ continetur, vnde omnino ſuperfluum eſſet, loco formularum noſtrarum ſimpliciori ſpecie expreſſarum, has magis complicatas adhibere velle.

Verum etiam altera formularum ſumtarum in altera continetur, ita vt ſufficiat alterutram tantummodo, quam ſum traditurus, tractaſſe.

Si enim ponatur $x = \frac{y}{(1+y^n)^{\frac{1}{n}}}$, erit $1 - x^n = \frac{1}{1+y^n}$: $x^m = \frac{y^m}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}$ et $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1+y^n)}$: quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur

$$\int x^{m-1} dx (1-x^n)^k = \int \frac{y^{m-1} dy}{(1+y^n)^{k+1+\frac{m}{n}}},$$

his integralibus ita ſumtis, vt euaneſcant poſito $x = 0$ et $y = 0$; quae conditio hic ſemper ſubintelligi debet. Cum igitur poſito $y = \infty$, fiat $x = 1$, habebimus ſequens Theorema.

Theorema I.

I. *Valor formulae integralis* $\int x^{m-1}dx\sqrt[n]{(1-x^n)^k}$ *caſu* $x=1$, *aequalis eſt valori huius formulae integralis* $\int \frac{y^{m-1}dy}{(1+y^n)^{k+1+\frac{m}{n}}}$ *caſu* $y=\infty$.

Cuius aequalitatis ratio eſt, quod illa forma actu transmutatur in hanc, ſi ponatur $x=\frac{y}{(1+y^n)^{\frac{1}{n}}}$

Sequens Theorema, quod per ſimilem reductionem oritur, non parum quoque vtilitatis habebit, quod ideo cum ſua demonſtratione apponam.

Theorema 2.

2. Valor huius formulae integralis $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ caſu $x=1$, aequalis eſt valori huius formulae integralis $\int y^{nk+n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$ etiam caſu $y=1$.

Demonſtratio.

Ponatur $x=(1-y^n)^{\frac{1}{n}}$, vt ſit $1-x^n=y^n$; $x^m=(1-y^n)^{\frac{m}{n}}$ et $\frac{dx}{x}=\frac{-y^{n-1}dy}{1-y^n}$, quibus valoribus ſubſtitutis habebitur

$$x^{m-1}dx(1-x^n)^k=-y^{nk+n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

Sit $Y=\int y^{nk+n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$, integrali ita ſumto, vt euaneſcat, poſito $y=0$; tum poſito $y=1$, abeat Y in A. Iam cum illas formulas ita integrari oporteat, vt euaneſcant poſito $x=0$, quo caſu fit $y=1$, erit:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k=A-Y.$$

Pona-

Ponatur nunc $x = 1$, quo caſu fit $y = 0$ ideoque et $Y = 0$, et formula noſtra integralis fiet $= A$: ſeu integrale $\int x^{m-1} dx\, (1 - x^n)^k$ caſu $x = 1$ aequale erit integrali $\int y^{nk+n-1} dy\, (1 - y^n)^{\frac{m-n}{n}}$ caſu $y = 1$. Q. E. D.

Coroll. 1.

3. Cum igitur hae tres formulae:

I. $\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^k$; II. $\int \frac{y^{m-1} dy}{(1 + y^n)^{k+1+\frac{m}{n}}}$; III. $\int z^{nk+n-1} dz$ $(1 - z^n)^{\frac{m-n}{n}}$ ita a ſe inuicem pendeant, vt prima tranſeat in ſecundam poſito $x = \frac{y}{(1 + y^n)^{\frac{1}{n}}}$, at vero poſito $x = (1 - z^n)^{\frac{1}{n}}$ ea abeat in tertiam negatiue ſumtam, manifeſtum eſt, quoties vna harum fuerit abſolute integrabilis, toties et binas reliquas fore abſolute integrabiles.

Coroll. 2.

4. Prima autem abſolute eſt integrabilis, vti per ſe eſt perſpicuum, ſi ſit k numerus integer affirmatiuus: quicunque numerus pro m ſtatuatur. Excipiuntur tamen caſus, quibus m aequatur cuipiam numero huius progreſſionis: 0; $-n$; $-2n$; $-3n$; . . . . . . $-kn$; his enim caſibus pars integralis pendebit a logarithmis. Caſus ergo hi excipiendi huc redeunt, vt integratio abſoluta ſuccedat, exiſtente k numero integro affirmatiuo, niſi $-\frac{m}{n}$ ſit numerus integer affirmatiuus, vel minor, quam k, vel ipſi k aequalis. Vel niſi $k + \frac{m}{n}$ ſit numerus integer affirmatiuus non maior quam k.

Coroll.

Coroll. 3.

5. Simili modo forma ſecunda erit integrabilis, ſi $-k-1-\frac{m}{n}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, puta i; caſus autem excipiuntur, quibus $-\frac{m}{n}$ pariter eſt numerus integer affirmatiuus non maior quam i. Vel ſi denotet ω numerum quemcunque affirmatiuum integrum ex hac ſerie:

$$0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots i,$$

caſus excipiuntur, quibus $-\frac{m}{n}=\omega$.

Coroll. 4.

6. Tertia autem formula abſolute erit integrabilis, ſi $\frac{m-n}{n}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, puta i; excipiuntur autem caſus, quibus $-k-1=\omega$, denotante ω numerum quemcunque integrum affirmatiuum, non maiorem, quam i.

Coroll. 5.

7. His ergo notatis formula $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ abſolute erit integrabilis, caſibus ſequentibus, in quibus i numerum affirmatiuum integrum quemcunque denotat, ω autem quemlibet numerum integrum affirmatiuum ipſo i non maiorem.

I. Si $k=i$ neque tamen $-\frac{m}{n}=\omega$.

II. Si $k-1-\frac{m}{n}=i$ neque tamen $-\frac{m}{n}=\omega$ (vel $-k-1=\omega$)

III. Si $\frac{m-r}{n}=i$ neque tamen $-k-1=\omega$.

Coroll. 6.

8. Manifeſtum autem eſt, hos eosdem integrabilitatis caſus locum eſſe habituros in formula hac latius paten-

patente $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^k$, pro quo demonſtratio pari modo adornatur. Atque ex his tribus conditionibus caſus integrabilitatis omnium huiusmodi formularum diiudicari ſolent.

Quanquam hacc ad meum inſtitutum non pertinent, tamen quia tam facile ex binis Theorematibus praemiſſis fluunt, non incongruum eſt viſum, ea his adiicere. Nunc igitur ad verum fundamentum dicendorum progredior, quod reductione integralium ad alias formas nititur. Quam quo diſtinctius exponam, hanc formam algebraicam contemplor: $x^\alpha (1 - x^n)^\gamma = P$, qua differentiata obtineo:

$$dP = \alpha x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^\gamma - \gamma n x^{\alpha+n-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1}$$

quae adhuc aliis modis in duo membra diſpeſci poteſt, veluti:

$$dP = \alpha x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1} - (\alpha + \gamma n) x^{\alpha+n-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1}$$

Tum vero, ſi in membro poſteriori pro x^n ſcribatur $1 - (1 - x^n)$, prior forma dabit

$$dP = (\alpha + \gamma n) x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^\gamma - \gamma n x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1}$$

poſterior vero eodem redit. Vnde integrando obtinemus

$$P = \alpha \int x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^\gamma - \gamma n \int x^{\alpha+n-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1}$$

$$P = \alpha \int x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1} - (\alpha + \gamma n) \int x^{\alpha+n-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1}$$

$$P = (\alpha + \gamma n) \int x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^\gamma - \gamma n \int x^{\alpha-1} dx (1 - x^n)^{\gamma-1}$$

Quae integralia cum euaneſcere debeant poſito $x = 0$, neceſſe eſt, vt eodem caſu $P x^\alpha (1 - x^n)^\gamma$ euaneſcat, quod quidem ſemper fit, ſi α ſit numerus poſitiuus quicunque. Iam ſi γ quoque fuerit numerus poſitiuus, eui-

dens eſt poſito $x=1$, et hoc caſu fieri $P=0$: vnde ſequentia elicimus Theoremata:

Theorema. 3.

9. *Si* α et γ fuerint numeri poſitiui, ac poſt integrationem ponatur $x=1$, habebuntur ſequentes formularum integralium aequalitates.

I. $\alpha\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}=\gamma n\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

II. $\alpha\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}=(\alpha+\gamma n)\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

III. $(\alpha+\gamma n)\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}=\gamma n\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$.

Demonſtratio.

Cum enim poſt integrationem ponatur $x=1$, pro hoc caſu in ſuperioribus formulis fit $P=0$, indeque aperte ſequuntur aequationes hic propoſitae. Q. E. D.

Coroll. 1.

10. Harum trium aequationum quaelibet iam in duabus reliquis continetur, vnde eae in hac forma comprehendentur:

$$\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}=\frac{\alpha}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

ſeu ſequentes tres formulae integrales inter ſe aequabuntur:

$$\frac{1}{\alpha}\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}=\frac{1}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

ſi quidem α et γ fuerint numeri poſitiui.

Coroll. 2.

11. Cum ſit per Theor. 2. $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^k$ $=\int x^{nk+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ poſito itidem $x=1$, aequalitas

litas habebitur inter ſex ſequentes formulas integrales:

$$\text{I. } \tfrac{1}{\alpha}\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1};\ \text{II. } \tfrac{1}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma};\ \text{III. } \tfrac{1}{\alpha+\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

$$\text{IV. } \tfrac{1}{\alpha}\int x^{n\gamma-1}dx(1-x^n)^{\frac{\alpha}{n}};\ \text{V. } \tfrac{1}{\gamma n}\int x^{n\gamma+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{\alpha-n}{n}};\ \text{VI. } \tfrac{1}{\alpha+\gamma n}\int x^{n\gamma-1}dx(1-x^n)^{\frac{\alpha-n}{n}}$$

dummodo exponentes α et γ fuerint affirmatiui.

Coroll. 3.

12. Si α fuerit numerus infinitus,

erit $\int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

atque ob eandem rationem,

erit $\int x^{\alpha+2n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha+n-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

vnde generatim colligitur fore $\int x^{\alpha+\mu-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$

dummodo μ fuerit numerus finitus exiſtente α infinito.

Coroll. 4.

13. Pari modo ſi γ fuerit numerus infinitus, erit

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1}$$

eodemque modo erit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma+1} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$, vnde generatim colligitur fore:

$$\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma\pm\mu} = \int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$$

ſiquidem μ ſit numerus finitus exiſtente γ infinito.

Problema 1.

14. Si m et k ſint numeri poſitiui, atque i denotet numerum integrum affirmatiuum quemcunque, definire rationem formulae $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}$ ad formulam $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}$ caſu $x=1$.

Solutio.

Cum ſit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma-1} = \frac{\alpha+\gamma n}{\gamma n}\int x^{\alpha-1}dx(1-x^n)^{\gamma}$, erit ponendo m *et* k pro α et γ:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{m+kn}{kn}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k}$$

ſi nunc manente $\alpha=m$ ponatur $\gamma=k+1$, erit γ multo magis numerus affirmatiuus, cum k ſit talis; ideoque pari modo habebitur

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k} = \frac{m+(k+1)n}{(k+1)n}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+1}$$

ac pari modo progrediendo, erit

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+1} = \frac{m+(k+2)n}{(k+2)n}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+2}.$$

Hinc ergo ingenere concluditur fore, denotante i numerum integrum quemcunque:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}} = \frac{m+kn}{kn}\cdot\frac{m+kn+n}{kn+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{kn+2n}\cdot\frac{m+kn+3n}{kn+3n}\cdots\frac{m+kn+in}{k+in}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

15. Cum ſit $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \int x^{nk-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ ideoque etiam:

$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i} = \int x^{kn+in+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$, erit quoque

$$\frac{\int x^{kn-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int x^{kn+in+n-1}dx(2\ x^n)^{\frac{m-1}{n}}} = \frac{m+kn}{kn}\cdot\frac{m+kn+n}{kn+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{kn+2nn}\cdots\cdots\frac{m+kn+in}{kn+in}$$

Coroll. 2.

16. Si hic ponatur $kn=\mu$; et $\frac{m}{n}=x$, ſeu $m=xn$, ita vt iam μ et x ſint numeri affirmatiui, habebitur haec reductio:

$\int x$

$$\frac{\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{x-1}}{\int x^{\mu+in-n-1}dx(1-x^n)^{x-1}} = \frac{\mu+xn}{\mu}\cdot\frac{\mu+xn+n}{\mu+n}\cdot\frac{\mu+xn+2n}{\mu+2n}\cdots\frac{\mu+xn+in}{\mu+in}$$

ſcriptis autem pro μ et x litteris m et k, erit:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m+in+n-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{m+kn}{m}\cdot\frac{m+kn+n}{m+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{m+2n}\cdots\frac{m+kn+in}{m+in}.$$

Coroll. 3.

17. Si haec expreſſio per expreſſionem in problemate inuentam diuidatur, prodibit:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}}{\int x^{m+in+n-1}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{kn}{m}\cdot\frac{kn+n}{m+n}\cdot\frac{kn+2n}{m+2n}\cdots\cdots\frac{kn+in}{m+in}$$

in quibus factoribus tam numeratores quam denominatores in arithmetica progreſſione progrediuntur, cuius differentia eſt $=n$.

Problema 2.

18 Valorem formulae $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}$, quem accipit caſu $x=1$, per factores infinitos exprimere, ſiquidem exponentes m et k ſint poſitiui.

Solutio.

Statuatur in forma praecedentis problematis numerus i infinitus; et habebitur:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}} = \frac{m+kn}{kn}\cdot\frac{m+kn+n}{kn+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{kn+2n}\cdot\frac{m+kn+3n}{kn+3n}.\text{etc in infinitum.}$$

Iam manente i eodem numero infinito, loco k alius ſumatur numerus finitus x quicunque; et habebitur ſimili modo:

 $\int x^{m-1}$

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x+i}}=\frac{m+xn}{xn}\cdot\frac{m+xn+n}{xn+n}\cdot\frac{m+xn+2n}{xn+2n}\cdot\frac{m+xn+3n}{xn+3n}\text{ etc.}$$

vbi numerus factorum aequalis eſt numero factorum praecedentis expreſſionis, vtrinque ſcilicet infinitus $=i+1$. At ob i infinitum, eſt vti §. 13. notauimus $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k+i}=\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x+i}$ quare priori forma per poſteriorem diuiſa orietur:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x-1}}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}=\frac{x(m+kn)}{k(m+xn)}\cdot\frac{(x+1)(m+kn+n)}{(k+1)(m+xn+n)}\cdot\frac{(x+2)(m+kn+2n)}{(k+2)(m+xn+2n)}\text{ etc.}$$

ſtatuatur iam $x=1$, eritque $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{x-1}=\frac{x^m}{n2}=\frac{1}{m}$ poſito $x=1$, vnde fiet

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{1}{m}\,\frac{1(m+kn)}{k(m+n)}\cdot\frac{2(m+kn+n)}{(k+1)(m+2n)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)}{(k+2)(m+3n)}\cdot\frac{4(m+kn+3n)}{(k+3)(m+4n)}\text{ etc.}$$

Q. E. I.

Aliter.

Tractetur ſimili modo forma §. 16. inuenta, ſtatuendo i numerum infinitum, eritque:

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{m+in-1}dx(1-x^n)^{k-1}}=\frac{m+kn}{m}\cdot\frac{m+kn+n}{m+n}\cdot\frac{m+kn+2n}{m+2n}\cdot\frac{m+kn+3n}{m+3n}\text{ etc.}$$

Iam poſito pro m alio numero finito, μ erit pari modo

$$\frac{\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu+in-1}dx(1-x^n)^{k-1}}=\frac{\mu+kn}{\mu}\cdot\frac{\mu+kn+n}{\mu+n}\cdot\frac{\mu+kn+2n}{\mu+2n}\cdot\frac{\mu+kn+3n}{\mu+3n}\text{ etc.}$$

Cum autem ſit ob i numerum infinitum:

$\int x^{m+in-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\int x^{\mu+in-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\int x^{in}dx(1-x^n)^{k-1}$

euaneſcentibus quantitatibus finitis prae infinitis; et quia vtrinque idem factorum numerus habetur, formam priorem per poſteriorem diuidendo orietur:

$\int x^{m-}$

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x)^{k-1}} = \frac{\mu(m+kn)}{m(\mu+kn)} \cdot \frac{(\mu+n)(m+nk+n)}{(m+n)(\mu+kn+n)} \cdot \frac{(\mu+2n)(\mu+kn+2n)}{(m+2n)(\mu+kn+2u)} \text{ etc.}$$

ſtatuatur iam $\mu = n$, fiet $\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{1-(1-x^n)^k}{nk}$ integratione ita peracta, vt euaneſcat poſito $x=0$. Poſito nunc $x=1$, iſte valor abit in $\frac{1}{nk}$, vnde obtinebitur:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1} = \frac{1}{nk} \cdot \frac{1(m+kn)}{m(1+k)} \cdot \frac{2(m+kn+n)}{(m+n)(2+k)} \cdot \frac{3(m+kn+2n)}{(m+2n)(3+k)} \text{ etc.}$$

En ergo aliud productum ex infinitis factoribus conſtans, priori non admodum diſſimile, eique adeo aequale, quo valor quaeſitus formulae integralis propoſitae exprimitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

19. Has autem duas formas in infinitum excurrentes inter ſe eſſe aequales, per ſe perſpicuum eſt: poſteriori enim per priorem diuiſa, ob ſingulorum membrorum numeratores aequales, prodit:

$$1 = \frac{m}{nk} \cdot \frac{k(m+n)}{m(k+1)} \cdot \frac{(k+1)(m+2n)}{(m+n)(k+2)} \cdot \frac{(k+2)(m+3n)}{(m+2n)(k+3)} \text{ etc.}$$

At duo factores primi dant $\frac{m+n}{n(k+1)}$; tres $\frac{m+2n}{n(k+2)}$; quatuor $\frac{m+3n}{n(k+3)}$ et infiniti dant $\frac{m+in}{n(k+i)} = \frac{in+m}{in+kn} = 1$.

Coroll. 2.

20. Huiusmodi formae factorum infinitorum innumerabiles formari poſſunt, quarum valor $=1$. Cum enim ſit

$$\frac{p}{p+q}\cdot\frac{p+q}{p+2q}\cdot\frac{p+2q}{p+3q}\cdot\frac{p+3q}{p+4q}\cdots=\frac{p}{p+iq}=\frac{p}{iq}$$

$$\frac{r+s}{r}\cdot\frac{r+2s}{r+s}\cdot\frac{r+3s}{r+2s}\cdot\frac{r+4s}{r+3s}\cdots=\frac{r+is}{r}=\frac{is}{r}$$

multiplicando has duas formas habebimus

$$1=\frac{qr}{ps}\cdot\frac{p(r+s)}{r(p+q)}\cdot\frac{(p+q)(r+2s)}{(r+s)(p+2q)}\cdot\frac{(p+2q)(r+3s)}{(r+2s)(p+3q)}\cdot\text{ etc.}$$

Coroll. 3.

21. Si ergo valor formulae integralis inuentus per hanc expreſſionem $=1$ multiplicetur, prodibit expreſſio latius patens eidem aequalis, ſcilicet:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{qr}{knps}\cdot\frac{1(m+kn)p(r+s)}{m(k+1)r(p+q)}\cdot\frac{2(m+kn+n)(p+q)(r+2s)}{(m+n)(k+2)(r+s)(p+2q)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)(p+2q)(r+3s)}{(m+2n)(k+3)(r+2s)(p+3q)}\cdot\text{ etc.}$$

vbi pro p, q, r, s numeros quoscunque aſſumere licet. Pluribus modis ergo ita accipi poſſunt, vt quilibet factor ad formam ſimpliciorem redigatur.

Coroll. 4.

22. Sit $p=m$, et $q=n$, eritque:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{r}{mks}\cdot\frac{1(m+kn)(r+s)}{(m+n)(k+1)r}\cdot\frac{2(m+kn+n)(r+2s)}{(m+2n)(k+2)(r+s)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)(r+3s)}{(m+3n)(k+3)(r+2s)}\cdot\text{ etc.}$$

ſi porro ponatur $r=k$, et $s=1$, erit,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1(m+kn)}{(m+n)k}\cdot\frac{2(m+kn+n)}{(m+2n)(k+1)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)}{(m+3n)(k+2)}\cdot\text{ etc.}$$

quae eſt expreſſio primum inuenta. Sin autem ſit $r=m+kn$, et $s=n$, erit,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{m+kn}{mkn}\cdot\frac{1(m+kn+n)}{(m+n)(k+1)}\cdot\frac{2(m+kn+2n)}{(m+2n)(k+2)}\cdot\frac{3(m+kn+3n)}{(m+3n)(k+3)}\cdot\text{ etc.}$$

Coroll. 5.

23. Si ponatur $p=k+1$, et $q=1$, erit:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}=\frac{r}{k(k+1)ns}\cdot\frac{1(m+kn)(r+s)}{mr(k+2)}\cdot\frac{2(m+kn+n)(r+2s)}{(m+n)(r+s)(k+3)}\cdot\frac{3(m+kn+2n)(r+3s)}{(m+2n)(r+2s)(k+4)}$$

ſit porro $r = 1$, et $s = 1$, erit :

$$\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{k-1} = \frac{1}{k(k+1)n} \cdot \frac{2(m+kn)}{m(k+2)} \cdot \frac{3(3m+kn+n)}{(m+n)(k+3)} \cdot \frac{4(m+kn+2n)}{(m+2n)(k+4)} \text{ etc.}$$

ſin auten ponatur $r = m + kn$, et $s = n$, erit :

$$\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{k-1} = \frac{m+kn}{k(k+1)nn} \cdot \frac{1(m+kn+n)}{m(k+2)} \cdot \frac{2(m+kn+2n)}{(m+n)(k+3)} \cdot \frac{3(m+kn+3n)}{(m+2n)(k+4)} \text{ etc.}$$

Coroll. 6.

24. Si manente exponente k reliquos exponentes m et n mutemus, habebimus

$$\int x^{\mu-1} dx (1 - x^\nu)^{k-1} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1(\mu+k\nu)}{(\mu+\nu)k} \cdot \frac{2(\mu+k\nu+\nu)}{(\mu+2\nu)(k+1)} \cdot \frac{3(\mu+k\nu+2\nu)}{(\mu+3\nu)(k+2)} \text{ etc.}$$

dummodo μ, ν et k ſint numeri affirmatiui. Diuiſa ergo illa forma per hanc obtinebimus :

$$\frac{\int x^{m-1} dx (1 - x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1} dx (1 - x^\nu)^{k-1}} = \frac{\mu}{m} \cdot \frac{(\mu+\nu)(m+kn)}{(m+n)(\mu+k\nu)} \cdot \frac{(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(m+2n)(\mu+k\nu+\nu)} \cdot \frac{(\mu+2\nu)(m+kn+2n)}{(m+3n)(\mu+k\nu+2\nu)} \text{ etc.}$$

Coroll. 7.

25. Sin autem etiam in altera forma k in $\varkappa$ mutetur, habebitur :

$$\frac{\int x^{n-1} dx (1 - x^n)^{k-1}}{\int x^{n-1} dx (1 - x^n)^{\varkappa-1}} = \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\varkappa(\mu+\nu)(m+kn)}{k(m+n)(\mu+\varkappa\nu)} \cdot \frac{(\varkappa+1)(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(k+1)(m+2n)(\mu+\varkappa\nu+\nu)} \cdot \frac{(\varkappa+2)(\mu+3\nu)(m+kn+2n)}{(k+2)(m+3n)(\mu+\varkappa\nu+2\nu)} \text{ etc.}$$

poſito poſt integrationem $x = 1$, et exiſtentibus omnibus exponentibus m, n, k ac $\mu, \nu, \varkappa$ affirmatiuis.

Scholion.

26. His conuerſionibus formularum integralium in factores infinitos expoſitis, videamus viciſſim quomodo propoſita huiusmodi expreſſio infinita per factores procedens, ad integrationes formularum caſu, quo $x = 1$, reduci

reduci debeat. Hic autem ante omnia ſpectari debent membra, quae illud productum infinitum conſtituunt, ex quot illa factoribus ſint compoſita: quae membra primum ita comparata eſſe debent, vt infiniteſima in vnitatem abeant. In hunc finem erunt fracta, et ex certo, tam numeratorum, quam denominatorum, numero conſtabunt, et vtrique per ſingula membra ſecundum progreſſionem arithmeticam procedent, ita vt in illis eadem habeatur differentia; etiamſi enim variae partes diuerſas obtineant differentias, eae tamen facile ad eandem reducentur. Cum igitur nihil obſtet, quo minus haec differentia vnitati aequalis conſtituatur, pro diuerſo factorum cuiusque membri numero, ſequentes huiusmodi productorum infinitorum ordines habebimus:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdot\frac{a+3}{b+3}\cdot\frac{a+4}{b+4}\cdot\frac{a+5}{b+5}\cdot\text{ etc.}$$

$$\frac{ac}{be}\cdot\frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)(e+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)}{(b+2)(e+2)}\cdot\frac{(a+3)(c+3)}{(b+3)(e+3)}\cdot\text{ etc.}$$

$$\frac{acf}{beg}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)}\cdot\text{ etc.}$$

$$\frac{acfh}{begk}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(f+1)(h+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)(k+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(f+2)(h+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)(k+2)}\cdot\text{ etc.}$$

Quomodo ergo cuiusque horum productorum valor per formulas integrales exprimendus ſit, videamus.

Pro-

Problema 3.

27. Per formulas integrales definire valorem huius producti infiniti ex membris ſimplicibus conſtantis:

$$P = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{a+2}{b+2} \cdot \frac{a+3}{b+3} \cdot \frac{a+4}{b+4} \cdot \frac{a+5}{b+5} \cdot \text{etc.}$$

Solutio.

Denotante i numerum infinitum vidimus eſſe

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{in}dx(1-x^n)^{k-1}} = \frac{m+kn}{m} \cdot \frac{m+kn+n}{m+n} \cdot \frac{m+kn+2n}{m+2n} \cdot \text{etc.}$$

quae forma ad propoſitam reducetur ponendo $n=1$; $m+k=a$, et $m=b$, vnde fit $k=a-b$. Cum ergo k debeat eſſe numerus affirmatiuus, ſi fuerit $a>b$, erit

$$P = \frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{a-b-1}}{\int x^i dx(1-x)^{a-b-1}} = \frac{\int x^{a-b-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{a-b-1}dx(1-x)^i}$$

ſin autem ſit $b>a$, erit inuerſe:

$$P = \frac{\int x^i dx(1-x)^{b-a-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a-1}} = \frac{\int x^{b-a-1}dx(1-x)^i}{\int x^{b-a-1}dx(1-x)^{a-1}}. \text{ Q. E. I.}$$

Corollarium.

28. Manifeſtum autem eſt, ſi ſit $a>b$, valorem P fore infinitum, ſin autem ſit $b>a$, fore $P=0$. Caſu autem $a=b$ fit $P=1$: qui caſus cum ad vtrumque expoſitorum aeque pertineat, euidens eſt, eſſe $\int\frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \int\frac{x^i dx}{1-x}$ quae integralia caſu $x=1$ vtique fiunt ita infinita, vt rationem aequalitatis obtineant. Eſt autem in genere $\int\frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \int\frac{x^{b-1}dx}{1-x}$.

Problema 4.

29. Per formulas integrales definire valorem huius producti infiniti ex membris duplicatis conſtantis:

$$P = \frac{ac}{be} \cdot \frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)(e+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)}{(b+2)(e+2)} \cdot \frac{(a+3)(c+3)}{(b+3)(e+3)} \cdot \text{etc.}$$

Solutio.

Cum ſit per §. 24. denotantibus m, n, k, μ, ν numeros poſitiuos

$$\frac{(\mu+\nu)(m+kn)}{(m+n)(\mu+k\nu)} \cdot \frac{(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(m+2n)(\mu+k\nu+\nu)} \text{ etc.} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{k-1}}$$

ponatur $n=1$; $\nu=1$; $\mu+1=a$; $m+k=c$, $m+1=b$; $\mu+k=e$; erit $\mu=a-1$; $m=b-1$; et $k=c-b+1$ $=e-a+1$. Quare, quo haec forma ad propoſitam poſſit reuocari, neceſſe eſt, vt ſit $c-b=e-a$; niſi enim haec conditio locum habeat, valor producti propoſiti P eſſet vel infinitus, vel euaneſcens. Quod incommodum ne locum habeat, ſit $c-b=e-a$, ſeu $a+c=b+e$; atque dum ſint $a-1$; $b-1$; et $c-b$, vel $e-a$, numeri affirmatiui, erit:

$$P = \frac{b-1}{a-1} \cdot \frac{\int x^{b-2}dx(1-x)^{c-b}}{\int x^{a-2}dx(1-x)^{e-a}}.$$

Vel conſideretur haec forma:

$$\frac{\mu(m+kn-n)}{m(\mu+k\nu-\nu)} \cdot \frac{(\mu+\nu)(m+kn)}{(m+n)(\mu+k\nu)} \cdot \text{etc.} = \frac{m+kn-n}{\mu+k\nu-\nu} \cdot \frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^n)^{k-1}}$$

quae ex illa luculenter naſcitur, ac ponatur $n=1$; $\nu=1$, $\mu=a$; $m=b$; $c=m+k-1$; et $e=\mu+k-1$;

erit-

eritque $k-1=c-b=e-a$; iterum ergo eſſe debet $a+c=b+e$. Nunc ergo, dummodo ſint a, b, et $c-b+1$, vel $e-a+1$, numeri poſitiui, erit

$$P=\frac{c}{e}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a}}.$$

Quoties ergo fuerit $a+c=b+e$, valor quaeſitus P eſt finitus: ac per has formulas integrales caſu $x=1$ innoteſcit. Q. E. I.

Coroll. 1.

30. Cum ſit $a+c=b+e$, ſi ſit $c>b$, erit quoque $e>a$, et a et b in primo membro $\frac{ac}{be}$ denotant factores minores numeratoris et denominatoris. Requiritur autem tantum, vt $c-b+1$ ſit numerus poſitiuus. Quare ſi etiam $c-e+1$ ſit numerus poſitiuus, alio inſuper modo valor quaeſitus P exprimi poterit: ſcilicet permutandis b et e hoc modo:

$$P=\frac{c}{b}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{c-e}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a}}.$$

Coroll. 2.

31. Atque quaelibet harum formularum locum habebit:

$$P=\frac{c}{b}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{c-e}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a}}=\frac{c}{e}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{a-e}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{b-c}}=\frac{a}{e}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{a-b}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{e-c}}$$

Quarum prima locum habet, ſi $c-e+1=b-a+1$ ſit >0, ſecunda ſi $c-b+1=e-a+1>1$, tertia ſi $a-e+1=b-c+1>0$, et quarta, ſi $a-b+1=e-c+1>0$.

Coroll. 3.

32. Prima forma et quarta ſimul valebunt, ſi differentia inter a et b ſit vnitate minor, ideoque et inter c et e. Atque omnes quatuor ſimul locum habebunt, ſi inſuper differentia inter a et e fuerit vnitate minor.

Coroll. 4.

33. Si ergo ponatur $a=p+m$; $b=p+n$; $c=p-m$ et $e=p-n$, vt ſit $a+c=b+e=2p$, fueritque $m+n<1$, erit

$$P=\frac{p-m}{p+n}\cdot\frac{\int x^{p-n-1}dx(1-x)^{n-m}}{\int x^{p+m-1}dx(1-x)^{n-m}}=\frac{p+m}{p+n}\,\frac{\int x^{p-n-1}dx(1-x)^{n+m}}{\int x^{p-m-1}dx(1-x)^{n+m}}$$

$$P=\frac{p-m}{p-n}\cdot\frac{\int x^{p+n-1}dx(1-x)^{-n-m}}{\int x^{p+m-1}dx(1-x)^{-n-m}}=\frac{p+m}{p-n}\,\frac{\int x^{p+n-1}dx(1-x)^{m-n}}{\int x^{p-m-1}dx(1-x)^{m-n}}.$$

Atque hae quatuor formulae inter ſe erunt aequales.

Problema 5.

34. Per formulas integrales exprimere valorem huius producti infiniti ex membris triplicatis conſtantes.

$$P=\frac{acf}{beg}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)}\cdot\text{etc.}$$

Solutio.

Cum inuenerimus §. 25.

$$\frac{\kappa(\mu+\nu)(m+kn)}{k(m+n)(\mu+\kappa\nu)}\cdot\frac{(\kappa+1)(\mu+2\nu)(m+kn+n)}{(k+1)(m+2n)(\mu+\kappa\nu+\nu)}\cdot\text{etc.}=\frac{m}{\mu}\,\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\kappa-1}}$$

erit

erit membrum anterius adhuc adiiciendo:

$$\frac{(\varkappa-1)\mu(m+kn-n)}{(k-1)m(\mu+\varkappa\nu-\nu)}\cdot\frac{\varkappa(\mu+\nu)(m+kn)}{k(m+n)(\mu+\varkappa\nu)}\cdot\text{etc.}=\frac{(\varkappa-1)(m+kn-n)}{(k-1)(\mu+\varkappa\nu-\nu)}\cdot\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\varkappa-1}}$$

quae forma quo ad propoſitam reducatur, ſtatuatur:

$\varkappa-1=a$; $k-1=b$; $\mu=c$; $m=e$; $n=1$; $\nu=1$;
ac $m+k-1=e+b+f$; $\mu+\varkappa-1=c+a=g$.
Cum ergo haec reductio non ſuccedat, niſi iſta conditione ſit $f=b+e$ et $g=a+c$; vt habeatur hoc productum infinitum:

$$P=\frac{ac(b+e)}{be(a+c)}\cdot\frac{(a+1)(c+1)(b+e+1)}{(b+1)(e+1)(a+c+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)(b+e+2)}{(b+2)(e+2)(a+c+2)}\text{etc.}$$

Quare cum hoc caſu ſit $m=e$; $k=b+1$; $\mu=c$ et $\varkappa=a+1$, exiſtentibus $n=\nu=1$, erit

$$P=\frac{a(b+e)}{b(a+c)}\cdot\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^b}{\int x^{c-1}dx(1-x)^a}$$

dummodo ſint c, e, $b+1$ et $a+1$ numeri poſitiui. Q. E. I.

Coroll. 1.

35. Cum per §. 9. ſit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x)^{\gamma-1}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}\int x^\alpha dx(1-x)^{\gamma-1}$, erit
$\int x^{e-1}dx(1-x)^b=\frac{b+e+1}{e}\int x^e dx(1-x)^b$, ideoque

$$P=\frac{ac(b+e)(b+e+1)}{be(a+c)(a+c+1)}\cdot\frac{\int x^e dx(1-x)^b}{\int x^c dx(1-x)^a}$$

Et cum ſit $\int x^{\alpha-1}dx(1-x)^\gamma=\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\int x^{\alpha-1}dx(1-x)^{\gamma-1}$, erit
$\int x^{e-1}dx(1-x)^b=\frac{b}{b+e}\int x^{e-1}dx(1-x)^{b-1}$, habebitur quoque

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

Coroll.

Coroll. 2.

36. Formula haec autem locum habet, dummodo a, b, c et e ſint numeri affirmatiui: et quia iam a et c item b et e inter ſe permutari poſſunt, erit quoque $P = \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{c-1}}$: quae conuerſio autem ex Th. 2. per ſe eſt manifeſta.

Scholion 1.

37. Problema ergo propoſitum non in genere eſt ſolutum, ſed tantum caſu, quo $f = b + e$; et $g = a + c$; ſicque ſolutio noſtra duplici limitatione reſtringitur. Vnica vero tantum reſtrictione eſt opus, ne valor ipſius P vel fiat infinitus, vel euaneſcens, qua requiritur, vt ſit $a + c + f = b + e + g$. Quo autem problema pro hac vnica limitatione ſoluatur, neceſſe eſt plures formulas integrales in computum ducere, quod hoc modo praeſtari poterit. Poſito igitur $a + c + f = b + e + g$, cum ſit

$$P = \frac{acf}{beg} \cdot \frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)} \cdot \text{ etc.}$$

ſtatuatur $P = QR$, ſitque

$$Q = \frac{(p+q)(p-q)}{(p+r)(p-r)} \cdot \frac{(p+q+1)(p-q+1)}{(p+r+1)(p+r+1)} \cdot \text{etc.} \frac{p+q}{p+r} \cdot \frac{\int x^{p-r-1} dx (1-x)^{q+r}}{\int x^{p-q-1} dx (1-x)^{q+r}}$$

$$\text{et } R = \frac{\alpha\gamma(\beta+\varepsilon)}{\beta\varepsilon(\alpha+\gamma)} \cdot \frac{(\alpha+1)(\gamma+1)(\beta+\varepsilon+1)}{(\beta+\varepsilon)(\varepsilon+1)(\alpha+\gamma+1)} \text{ etc.} = \frac{\int x^{\beta-1} dx (1-x)^{\varepsilon-1}}{\int x^{\alpha-1} dx (1-x)^{\gamma-1}}$$

Fiat iam primum membrum producti QR aequale primo membro formae propoſitae P, ſcilicet

$\frac{\alpha\gamma}{\beta\varepsilon}$

$\frac{\alpha\gamma(\beta+\varepsilon)(p+q)(p-q)}{\beta\varepsilon(\alpha+\gamma)(p+r)(p-r)}=\frac{acf}{beg}$, quod pluribus modis fieri poteſt. Primum enim illud pluribus modis ad tres factores poteſt reduci, ponatur ſcilicet $\beta+\varepsilon=p+r$ et $\alpha+\gamma=p+q$; vt habeatur $q=\alpha+\gamma-p$; et $r=\beta+\varepsilon-p$; eritque:

$$\frac{\alpha\gamma(2p-\alpha-\gamma)}{\beta\varepsilon(2p-\beta-\varepsilon)}=\frac{acf}{beg}.$$

Quod ſi ergo ſtatuatur $\alpha=a$; $\beta=b$; $\gamma=c$; $\varepsilon=e$; et $2p=a+c+f=b+e+g$; erit $q=a+c-p$; et $r=b+e-p$. Sicque nulla alia reſtrictio hic involuitur, niſi vt ſit $a+c+f=b+e+g=2p$. Pro hoc ergo caſu erit producti infiniti propoſiti valor

$$P=\frac{a+c}{b+e}\cdot\frac{\int x^{2p-b-e-1}dx(1-x)^{a+b+c+e-2p}}{\int x^{2p-a-c-1}dx(1-x)^{a+b+c+e-2p}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

vbi iam tam litteras a et c, quam b et e pro lubitu inter ſe permutari licet.

Alio modo ſtatuatur $\gamma=p+r$ et $\varepsilon=p-q$, vt ſit

$$\frac{\alpha(\beta+\varepsilon)(p+q)}{\beta(\alpha+\gamma)(p-r)}=\frac{acf}{beg}.$$

Iam ſit $\alpha=a$; $\beta=b$; $\varepsilon=c-b$; $\gamma=e-a$; erit $q=p-c+b$ et $r=e-a-p$; hincque $f=2p-c+b$ et $g=2p-e+a$. Sin autem ponatur ſumma $a+c+f$ $=b+e+g=s$; erit $a+b+2p=s$, et $2p=s-a-b$; ſicque $p+q\mp s-a-c=f$; $p-q=c-b$; $p+r=e-a$; $p-r=s-b-e=g$; et $q+r=b+e-a-c$. Atque hinc oritur:

$$P=\frac{s-a-c}{e-a}\cdot\frac{\int x^{s-b-e-1}dx(1-x)^{b+e-a-c}}{\int x^{c-b-1}dx(1-x)^{b+e-a-c}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a-1}}$$

Vbi iterum tam litteras a et c, quam b et e inter ſe permutare licet. Vel erit etiam ob plures valores ipſius Q

$$P = \frac{c-b}{e-a} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{c+e-s}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{c+e-s}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

At formula prius inuenta, ponendo s pro $2p$, abit in hanc,

$$P = \frac{a+c}{b+e} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{b+e-f}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{b+e-f}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{c-1}}.$$

Scholion 2.

38. Quodſi iam omnes iſtae permutationes adhibeantur, quae pro formula Q obtinent, atque formula propoſita fuerit:

$$P = \frac{acf}{beg} \cdot \frac{(a+1)(c+1)(f+1)}{(b+1)(e+1)(g+1)} \cdot \frac{(a+2)(c+2)(f+2)}{(b+2)(e+2)(g+2)} \cdot \text{etc.}$$

fueritque $a+c+f = b+e+g$, reperientur ſequentes valores pro valore P, ſcilicet:

$$P = \frac{f}{g} \cdot \frac{\int x^{e-a-1} dx (1-x)^{a+f-e}}{\int x^{c-b-1} dx (1-x)^{a+f-e}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{f}{e-a} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{f-g}}{\int x^{c-b-1} dx (1-x)^{f-g}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{c-b}{g} \cdot \frac{\int x^{e-a-1} dx (1-x)^{g-f}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{g-f}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{c-b}{e-a} \cdot \frac{\int x^{g-1} dx (1-x)^{e-a-f}}{\int x^{f-1} dx (1-x)^{e-a-f}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{f}{g} \cdot \frac{\int x^{b+e-1} dx (1-x)^{f-b-e}}{\int x^{a+c-1} dx (1-x)^{f-b-e}} \cdot \frac{\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1} dx (1-x)^{c-1}}$$

P =

$$P=\frac{f}{b+e}\cdot\frac{\int x^{g-1}dx(1-x)^{f-g}}{\int x^{a+c-1}dx(1-x)^{f-g}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

$$P=\frac{a+c}{g}\cdot\frac{\int x^{b+e-1}dx(1-x)^{g-f}}{\int x^{f-1}dx(1-x)^{g-f}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

$$P=\frac{a+c}{b+e}\cdot\frac{\int x^{g-1}dx(1-x)^{b+e-f}}{\int x^{f-1}dx(1-x)^{b+e-f}}\cdot\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}$$

Porro autem hic tam ternas litteras a, c, f, quam has b, e, g, pro lubitu inter ſe permutare licet, ex quo maxima copia formularum, quae omnes eidem valori P ſunt aequales, enaſcetur.

Scholion 3.

39. Hinc etiam pro producto ſimpliciori

$$P=\frac{ac}{be}\cdot\frac{(a+1)(c+1)}{(b+1)(e+1)}\cdot\frac{(a+2)(c+2)}{(b+2)(e+2)}\cdot \text{etc.}$$

ſi fuerit $a+c=b+e$, praeter valores ſupra inuentos plures alii exhiberi poterunt. Primum enim quia $a+c=b+e$ valor in problemate 5 inuentus huc pertinet: $P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}$. Deinde ſi in ſerie §. praec. vna litterarum a, c, f vni ex b, e, g aequalis ſtatuatur, vel haec eadem expreſſio, vel aliae obtinebuntur, quae cum praecedentibus erunt:

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{a-e-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{b-c-1}};\quad P=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{a-b-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{e-c-1}}$$

$$P=\frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{c-e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{b-a-1}};\quad P=\frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a-1}}$$

$$P = \frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}; \quad P = \frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{a-1}dx(1-x)^{e-a-1}}$$

vbi eſt $e-a=c-b$ et $c-e=b-a$.

In ſequentibus eſt n numerus arbitrarius:

$$P = \frac{\int x^{e-n-1}dx(1-x)^{n+a-e-1}}{\int x^{c-n-1}dx(1-x)^{n+b-c-1}} \cdot \frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{c-n-1}}{\int x^{n-1}dx(1-x)^{e-n-1}}$$

$$P = \frac{\int x^{n+b-1}dx(1-x)^{c-b-n-1}}{\int x^{n+a-1}dx(1-x)^{c-b-n-1}} \cdot \frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{n-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

$$P = \frac{\int x^{e-1}dx(1-x)^{n+b-e-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{n+b-e-1}} \cdot \frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{b-1}}{\int x^{n-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

$$P = \frac{\int x^{n-1}dx(1-x)^{a-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}} \cdot \frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{a-1}ax(1-x)^{n-1}} = \frac{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}{\int x^{c-1}dx(1-x)^{a-1}}$$

quae poſtrema iam in praecedentibus continetur. Hic autem monendum eſt, ſuperfluum eſſe hic rationem exponentium definire, vti ſupra factum eſt. Cum enim valor P certo ſit finitus, ſi $a+c=b+e$; ſi quaepiam formularum integralium habeat exponentes negativos infra -1; tum eam ad exponentes maiores reducere licet, ac tum verus valor ipſius P obtinebitur. Formulae autem ſimpliciores continentur in hoc Theoremate:

Theorema 4.

40. Si fuerit $a+c=b+e=s$; tum erit

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}} = \frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}$$

ſi quidem poſt integrationem ſtatuatur $x=1$.

Demon-

Demonſtratio.

Eſt enim ex praecedentibus formulis

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}}=\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-b-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{e-a-1}}.$$

At ob $a+c=b+e=s$, eſt $c=s-a$; et $e=s-b$; vnde erit $c-b=e-a=s-a+b$, vnde forma propoſita conficitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

41. Hic licet tam numeros a et c, quam b et e inter ſe permutare, vnde quatuor obtinentur formulae primae aequales; ſcilicet ſingulae harum formularum:

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}};\quad\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-e-1}}{\int x^{e-1}dx(1-x)^{s-a-e-1}}$$

$$\frac{\int x^{c-1}dx(1-x)^{s-b-c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{s-b-c-1}};\quad\frac{\int x^{c-1}dx(1-x)^{s-c-e-1}}{\int x^{e-1}dx(1-x)^{s-c-e-1}}$$

aequales ſunt huic formae $\frac{\int x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int x^{b-1}dx(1-x)^{\ -1}}$.

Coroll. 2.

42. Valor autem vniuscuiusque harum formularum aequalis eſt huic producto ex factoribus infinitis conſtanti:

$$\frac{be}{ac}\cdot\frac{(b+1)(e+1)}{(a+1)(c+1)}\cdot\frac{(b+2)(e+2)}{(a+2)(c+2)}\cdot\text{ etc.}$$

Coroll. 3.

43. Si ſit $e = 1$; ideoque $b = s - 1$; $a = s - c$; erit, poſito

$$P = \frac{1(s-1)}{c(s-c)} \cdot \frac{2s}{(c+1)(s-c+1)} \cdot \frac{3(s+1)}{(c+2)(s-c+2)} \cdot \text{etc.}$$

ob $\int x^{b-1} dx (1-x)^{e-1} = \int x^{s-2} dx = \frac{1}{s-1}$.

$$P = (s-1) \int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-1}$$

$$P = (c-1) \int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-2} = (s-1)$$

$$P = (s-c-1) \int x^{c-1} dx (1-x)^{s-c-2}$$

$$P = \frac{\int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-s}}{\int x^{s-2} dx (1-x)^{c-s}} = \frac{\int x^{c-1} dx (1-x)^{-c}}{\int x^{s-2} dx (1-x)^{-c}} = (s-1) \int x^{s-c-1} dx (1-x)^{c-1}.$$

Scholion.

44. Quoniam vero huiusmodi formularum integralium comparationes iam plures expoſui, hic imprimis nonnullos valores prae reliquis notabiles perſequar, et quemadmodum ii per formulas integrales exprimi queant, oſtendam. Notatu autem potiſſimum digna ſunt illa producta infinita, quibus ſinus et coſinus cuiusque anguli exprimitur. Denotante enim ϱ angulum rectum, et Φ angulum quemcunque, conſtat eſſe

$$\text{ſin.}\,\Phi = \Phi \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{4\varrho\varrho}\right) \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{16\varrho\varrho}\right) \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{36\varrho\varrho}\right) \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{64\varrho\varrho}\right) \text{etc.}$$

et $\text{coſ.}\,\Phi = \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{\varrho\varrho}\right) \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{9\varrho\varrho}\right) \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{25\varrho\varrho}\right) \left(1 - \frac{\Phi\Phi}{49\varrho\varrho}\right)$ etc.

Quodſi iam ponatur $\Phi = \frac{m}{n} \varrho$, erit

$$\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{16nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{36nn}\right) \text{etc.} = \frac{n}{m\varrho}\, \text{ſin.}\, \frac{m}{n} \varrho$$

$$\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{9nn}\right) \left(1 - \frac{mm}{25nn}\right) \text{etc.} = \text{coſ.}\, \frac{m}{n} \varrho$$

Vel

Vel ſi angulus duobus rectis aequalis π introducatur, et ob $\varrho = \frac{1}{2}\pi$ pro m ſcribatur $2m$; erit factores euolvendo

$$\frac{(n-m)(n+m)}{n\,.\,n}\cdot\frac{(2n-m)(2n+m)}{2n\,.\,2n}\cdot\frac{(3n-m)(3n+m)}{3n\,.\,3n}\ \text{etc.} = \frac{n}{m\pi}\ \text{ſin.}\ \frac{m}{n}\,\pi.$$

$$\frac{(n-2m)(n+2m)}{n\,.\,n}\cdot\frac{(3n-2m)(3n+2m)}{3n\,.\,3n}\cdot\frac{(5n-2m)(5n+2m)}{5n\,.\,5n}\ \text{etc.} = \text{coſ.}\ \frac{m}{n}\,\pi.$$

Reducendo autem differentias ad vnitatem, erit

$$\frac{(1-\frac{m}{n})(1+\frac{m}{n})}{1\,.\,1}\cdot\frac{(2-\frac{m}{n})(2+\frac{m}{n})}{2\,.\,2}\cdot\frac{(3-\frac{m}{n})(3+\frac{m}{n})}{3\,.\,3}\ \text{etc.} = \frac{\pi}{m\pi}\ \text{ſin.}\ \frac{m}{n}\,\pi$$

$$\frac{(\frac{1}{2}-\frac{m}{n})(\frac{1}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}}\cdot\frac{(\frac{3}{2}-\frac{m}{n})(\frac{3}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{3}{2}\,.\,\frac{3}{2}}\ \text{etc.} = \text{coſ.}\ \frac{m}{n}\,\pi.$$

Problema 6.

45. Inuenire formulam integralem, cuius valor caſu $x = 1$ praebeat ſin. $\frac{m}{n}\pi$.

Solutio.

Cum ſit

$$\frac{n}{m\pi}\ \text{ſin}\ \frac{m}{n}\,\pi = \frac{(1-\frac{m}{n})(1+\frac{m}{n})}{1\,.\,1}\cdot\frac{(2-\frac{m}{n})(2+\frac{m}{n})}{2\,.\,2}\ \text{etc.}$$

comparetur hoc productum infinitum cum forma generali.

$$P = \frac{be}{ac}\cdot\frac{(b+1)(e+1)}{(a+1)(c+1)}\cdot\frac{(b+2)(e+2)}{(a+2)(c+2)}\ \text{etc.}$$

cuius valor ante §. 41. pluribus modis in formulis integralibus, eſt exhibitus. Statui ergo oportet $a = 1$; $c = 1$; $b = 1 - \frac{m}{n}$; et $e = 1 + \frac{m}{n}$: eritque $s = a + c = b + e = 2$; tum vero

$$s-a-b-1 = -1 + \frac{m}{n};\quad s-a-e-1 = -1 - \frac{m}{n},$$

$$s-b-c-1 = -1 + \frac{m}{n};\quad s-c-e-1 = -1 - \frac{m}{n}.$$

Hinc

Hinc ergo pro P prodit ſequens expreſſio:

$$P = 1 \frac{\int dx(1-x)^0}{\int x^{\frac{-m}{n}} dx(1-x)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\int x^{\frac{-m}{n}} dx(1-x)^{\frac{m}{n}}},$$

ad quam reliquae omnes facile reducuntur. Haec igitur forma dat

$$\int x^{\frac{-m}{n}} dx(1-x)^{\frac{m}{n}} = \int \frac{x^{\frac{m}{n}} dx}{(1-x)^{\frac{m}{n}}} = \frac{m\pi}{n \sin. \frac{m}{n}\pi}.$$

et poſito $x = y^n$, habebitur

$$\int \frac{y^{m+n-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{m\pi}{nn \sin. \frac{m}{n}\pi} \text{ ſeu } \int \frac{y^{m-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n}\pi}.$$

Inuenimus ergo $\sin. \frac{m}{n}\pi = \frac{\pi}{n} : \int \frac{y^{m-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

46. Per Theorema ergo primum haec forma $\int y^{m-1} dy (1-y^n)^{\frac{-m}{n}}$ ob $k = -\frac{m}{n}$ conuertitur in hanc $\int \frac{y^{m-1} dy}{1+y^n}$ ideoque habebitur

$$\int \frac{y^{m-1} dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n}\pi} \text{ caſu } y = \infty,$$

quae forma ob ſimplicitatem imprimis eſt notatu digna.

Coroll. 2.

47. Habemus ergo has duas aequalitates admodum notabiles:

$$\frac{m\pi}{n \sin. \frac{m}{n}\pi} = \int \frac{m y^{m-1} dy}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} \text{ poſito } y = 1$$

$$\text{et } \frac{m\pi}{n \sin. \frac{m}{n}\pi} = \int \frac{m y^{m-1} dy}{1+y^n} \text{ poſito } y = \infty$$

quibus

quibus igitur caſibus vtriusque formulae integrale ſatis commode exhiberi poteſt.

Coroll. 3.

48. Cum ergo poſito $x=1$, et $y=\infty$, ſit

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi}=\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}=\int \frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}$$

ſi pro m ſcribatur $2in+m$, ob ſin. $\frac{2in+m}{n}\pi=\sin.\frac{m}{n}\pi$, erit quoque

$$\int \frac{x^{2in+m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{2in+m}{n}}}=\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}=\int \frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi} \text{ et}$$

$$\int \frac{y^{2in+m-1}dy}{1+y^n}=\int \frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}=\frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi}$$

denotante i numerum integrum quemcunque.

Coroll. 4.

49. Quia porro denotante i numerum integrum quemcunque, ſi pro m ſcribatur $2in-m$, eſt ſin. $\frac{2in-m}{n}\pi$ $=-\sin.\frac{m}{n}\pi$, erit

$$\int \frac{x^{2in-m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{2in-m}{n}}}=-\int \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}=-\frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi} \text{ et}$$

$$\int \frac{y^{2in-m-1}dy}{1+y^n}=-\int \frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}=-\frac{\pi}{n \sin.\frac{m}{n}\pi}.$$

Deinde ſi pro m ſcribatur $(2i-1)n-m$, ob ſin. $\frac{(2i-1)n-m}{n}\pi$ $=$ ſin $\frac{m}{n}\pi$, erit

$$\int \frac{x^{(2i-1)n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{(2i-1)n-m}{n}}} = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi}$$

$$\int \frac{y^{(2i-1)n-m-1}\,dy}{1+y^n} = \int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi}.$$

Denique erit eodem modo

$$\int \frac{x^{(2i-1)n+m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{(2i-1)n+m}{n}}} = -\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}} = -\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi}$$

$$\int \frac{y^{(2i-1)n+m-1}\,dy}{1+y^n} = -\int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n} = -\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi}.$$

Coroll. 5.

50. Cum formula integralis $\int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n}$ ſaepius occurrat, operae pretium erit, eius valores pro praecipuis caſibus exponere, poſito $y=\infty$. Erit ergo

$$\int \frac{dy}{1+yy} = \frac{\pi}{2\,\text{ſin.}\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ob ſin.}\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\int \frac{dy}{1+y^3} = \frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{ob ſin.}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int \frac{y\,dy}{1+y^3} = \frac{\pi}{3\,\text{ſin.}\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{ob ſin.}\ \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\int$

$$\int \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{4 \operatorname{ſin.} \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{4 \operatorname{ſin.} \frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^5} = \int \frac{y^3 dy}{1+y^5} = \frac{\pi}{5 \operatorname{ſin.} \frac{\pi}{5}}$$

$$\int \frac{y dy}{1+y^5} = \int \frac{y^2 dy}{1+y^5} = \frac{\pi}{5 \operatorname{ſin.} \frac{2\pi}{5}}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^6} = \int \frac{y^4 dy}{1+y^6} = \frac{\pi}{6 \operatorname{ſin.} \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

et ita porro.

Problema 2.

51. Inuenire formulam integralem, cuius valor caſu $x=1$ praebeat $\operatorname{coſ.} \frac{m}{n}\pi$.

Solutio.

Cum ſit

$$\operatorname{coſ.} \frac{m}{n}\pi = \frac{(\frac{1}{2}-\frac{m}{n})(\frac{1}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{3}{2}-\frac{m}{n})(\frac{3}{2}+\frac{m}{n})}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} \cdot \text{etc.}$$

comparetur cum hoc producto infinito forma generalis

$$P = \frac{b e}{a c} \cdot \frac{(b+1)(e+1)}{(a+1)(c+1)} \cdot \text{etc.}$$

 hinc

hincque ſtatuatur $a = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2} - \frac{m}{n}$; $e = \frac{1}{2} + \frac{m}{n}$ ita, vt ſit $s = a + c = b + e = 1$, atque

$$s-a-b-1 = -1 + \frac{m}{n}; \qquad s-a-e-1 = -1 - \frac{m}{n};$$
$$s-b-c-1 = -1 + \frac{m}{n}; \qquad s-c-e-1 = -1 - \frac{m}{n};$$

Eritque idcirco:

$$P = \frac{\int x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\int x^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}} = \frac{\int dx : \sqrt{(x-xx)}}{\int \frac{x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}.$$

At eſt $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-xx)}} = \pi$, poſito $x = 1$.

Vnde fit $P = \cos. \frac{m}{n} \pi = \frac{\pi}{\int \frac{x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$

Per reliquas vero formulas ipſius P habebitur:

$$P = \cos. \frac{m}{n}\pi = \frac{\int x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-1+\frac{m}{n}}}{\int x^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}} dx (1-x)^{-1+\frac{m}{n}}} = \frac{\int x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-1-\frac{m}{n}}}{\int x^{-\frac{1}{2}+\frac{m}{n}} dx (1-x)^{-1-\frac{m}{n}}}$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

52. Ponatur $x = y^2$, et prior forma abit in hanc:

$$\cos. \frac{m}{n} \pi = \frac{\pi}{2\int \frac{y^{\frac{2m}{n}} dy}{(1-yy)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$$

ita vt ſit $\int \frac{x^{\frac{2m}{n}} dx}{(1-xx)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{2 \operatorname{coſ.} \frac{m}{n}\pi}$.

Coroll. 2.

53. Eſt vero etiam per Theorema primum

$$\int x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}} = \int \frac{y^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} dy}{1+y}, \text{ poſito } y = \infty,$$

Cum igitur ſit $\int \frac{y^{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} dy}{1+y} = \frac{\pi}{\operatorname{coſ.} \frac{m}{n}\pi}$ ponatur y^n pro y et erit

$$\int \frac{y^{m+\frac{1}{2}n-1} dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{coſ.} \frac{m}{n}\pi} = \int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1} dy}{1+y^n}.$$

Coroll. 3.

54. Si et reliquae formulae per Theorema primum conuertantur, prodibit:

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-1+\frac{m}{n}} = \int \frac{y^{-\frac{1}{2}} dy}{(1+y)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}} = \int \frac{y^{\frac{m}{n}-1} dy}{(1+y)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}} dx (1-x)^{-1+\frac{m}{n}} = \int \frac{y^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{n}} dy}{\sqrt{(1+y)}} = \int \frac{y^{\frac{m}{n}-1} dy}{\sqrt{(1+y)}}$$

poſito $y = \infty$. Poſito ergo y^n pro y, erit

$$\operatorname{coſ.} \frac{m\pi}{n} = \frac{\int \frac{y^{m-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}.$$

Coroll. 4.

54. Si pro m ſcribatur $\frac{1}{2}n-m$, ob $\operatorname{coſ}(\frac{1}{2}n-m)\frac{\pi}{n} = \operatorname{ſin.} \frac{m}{n}\pi$, obtinebitur primum $\frac{\pi}{n \operatorname{ſin} \frac{m}{n}\pi} = \int \frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}$ vt ante; reliquae vero formulae dabunt:

$$\operatorname{ſin.} \frac{m}{n}\pi = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

at quia pro coſinu licet m negatiue ſumere erit quoque

$$\operatorname{ſin.} \frac{m}{n}\pi = \frac{\int \frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}} = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

Coroll.

Coroll. 5.

55. At vero etiam ex praeced. problemate aliam formulam pro coſinu licet elicere: Cum enim, poſito $2m$ pro m, ſit

$$\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{2m}{n}\pi} = \frac{\pi}{2n\,\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi\cdot\text{coſ}\frac{m}{n}\pi} = \int\frac{y^{2m-1}dy}{1+y^n},$$

et $\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n} = \frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi}$ ſi haec forma per illam dividatur, habebimus:

$$2\,\text{coſ.}\frac{m}{n}\pi = \frac{\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}}{\int\frac{y^{2m-1}dy}{1+y^n}} \text{ ſeu coſ.}\frac{m}{n}\pi = \frac{\frac{1}{2}\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}}{\int\frac{y^{2m-1}dy}{1+y^n}}$$

Coroll. 6.

56. En ergo plures formas integrales, quae caſu $y=\infty$ praebent $\text{ſin.}\frac{m}{n}\pi$

I. $\dfrac{\pi}{n\int\frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}}$;

II. $\dfrac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{1+y^n}}{2\int\frac{y^{n-2m-1}dy}{1+y^n}}$;

III. $\dfrac{\int\frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{n-m-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$;

IV. $\dfrac{\int\frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int\frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$

V.

$$\text{V.}\quad \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}, \qquad \text{VI.}\quad \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}},$$

vbi notandum eſt, in formis III et IV, item in V et VI, ſeorſim numeratores et denominatores inter ſe eſſe aequales.

Coroll. 7.

57. Simili modo totidem habebimus formulas pro cof. $\frac{m}{n}\pi$ quae ſunt;

$$\text{I.}\quad \frac{\pi}{n\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{1+y^n}}; \qquad \text{II.}\quad \frac{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n}}{2\int \frac{y^{2m-1}\,dy}{1+y^n}};$$

$$\text{III.}\quad \frac{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}; \qquad \text{IV.}\quad \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}$$

$$\text{V.}\quad \frac{\int \frac{y^{-m-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{-m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}; \qquad \text{VI.}\quad \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n+m-1}\,dy}{\sqrt{(1+y^n)}}}.$$

Scho-

Scholion.

58. Hinc vero etiam plures formulas pro tangente anguli $\frac{m}{n}\pi$ deducere licet, quarum quae ſunt ſimpliciores, hic exhibebo.

$$\text{tang.}\ \frac{m}{n}\pi = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{1+y^n}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{1+y^n}};$$

$$\text{tang.}\ \frac{m}{n}\pi = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{m-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}} = \frac{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}\,dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}\,dy}{(1+y^n)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{n}}}}$$

Deinde vero ex combinatione harum formularum inſignes proprietates innoteſcent, veluti ſi $n=4$ et $m=1$, erit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\int\frac{dy}{1+y^4}} = \frac{\int\frac{dy}{1+y^4}}{2\int\frac{y\,dy}{1+y^4}} = \frac{\int\frac{y\,dy}{\sqrt{(1+y^4)}}}{\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1+y^4)}}}$$

$$= \frac{\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(1+y^4)^3}}}{\int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)}}} = \frac{\int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)^3}}}{\int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)}}}$$

vnde colligitur fore $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(1+y^4)^3}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(1+y^4)^3}}$ caſu $y=\infty$, ſeu eſſe $\int \frac{(1-y)\,dy}{\sqrt{(1+y^4)^3}} = 0$; talibus autem proprietatibus eruendis hic non immoror.

SOLVTIO GENERALIS QVORVNDAM PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM QVAE VULGO NONNISI SOLVTIONES SPECIALES ADMITTERE VIDENTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Analyſis Diophantaea, quae in problematibus indeterminatis per numeros rationales vel etiam integros ſoluendis verſatur, duplicis generis problemata tractare ſolet; quorum diſcrimen in ratione ſolutionis maxime eſt poſitum. Alia enim problemata ita ſunt comparata, vt ſolutiones generales exhiberi queant, quae omnes plane numeros ſatisfacientes in ſe complectuntur: alia vero nonniſi ſolutiones particulares admittunt, vel ſaltem per methodos cognitas nonniſi tales ſolutiones eruere licet, ita vt praeter numeros, qui forte reperiuntur, infiniti alii problemati ſatisfacientes exiſtant, qui in ſolutione inuenta non contineantur. Vbi quidem in genere notari conuenit, prioris ordinis problemata multo facilius reſolui, quam ea, quae ad alterum ordinem referuntur, quippe quae plerumque ſingularem ſagacitatem cum eximiis artificiis coniunctam requirunt, in quibus maxima vis huius Analyſis cernitur. Quare

ob hanc cauſam problemata Diophantaea in has duas claſſes diſtribui debere videntur.

2. Diophantus quidem ipſe omnium quaeſtionum, quas tractat, ſolutiones tantum ſpecialiſſimas tradit, numerosque, quibus vnica ſolutio continetur, plerumque indicaſſe eſt contentus. Neque vero eius methodus ad has ſolutiones ſpecialiſſimas adſtricta eſt putanda; quia enim tunc temporis vſus litterarum, quibus numeri indefiniti deſignentur, nondum erat receptus, huiusmodi ſolutiones latius patentes, quales nunc quidem exhiberi ſolent, ab ipſo expectari non poterant; interim tamen ipſae methodi, quibus ad quaelibet problemata ſoluenda vtitur, aeque late patent, quam eae, quae hodie ſunt in vſu: quin etiam fateri cogimur, vix vllam in hoc analyſeos genere adhuc eſſe inuentam, cuius veſtigia ſatis luculenta non iam in ipſo Diophanto deprehendantur. Non obſtante igitur hac apparente particularitate ſolutionum Diophantaearum, diſparitas problematum ſupra memorata, in ipſo iam Diophanto manifeſto cernitur, ſiquidem ad methodos eius reſpiciamus: quarum aliae ita ſunt comparatae, vt omnes omnino ſolutiones, quae problemati ſatisfacere poſſunt, ſuppeditare queant, aliae vero nonnullas tantum ſolutiones praebeant, vel etiamſi earum numerus in infinitum augeri poſſit, tamen in iis innumerabiles aliae, quae aeque ſatisfaciunt, non contineantur.

3. Exemplum problematis, cuius ſolutio generalis exhiberi poteſt, praebet quaeſtio vulgata, qua quaeruntur duo numeri quadrati, quorum ſumma ſit quadratum;

tum; ſiue ſumtis x et y pro radicibus iſtorum quadratorum, vt $xx+yy$ ſit numerus quadratus. Sumtis enim pro lubitu tribus numeris a, p et q, haec habebitur ſolutio generalis: $y=2apq$, et $x=a(pp-qq)$, ex his namque valoribus prodit $\sqrt{(xx+yy)}=a(pp+qq)$. De qua ſolutione tenendum eſt, nullos plane dari numeros pro x et y ſubſtituendos, quorum quadratorum ſumma fiat quadratum, qui non ſimul in formulis datis contineantur. Atque haec generalitas non ſolum inde perſpicitur, quod pro tribus litteris a, p, et q numeros quoscunque accipere liceat, vnde iam infinities infinita ſolutionum multitudo obtinetur; ſed etiam ipſa harum formularum inueſtigatio euincit, nullam plane dari ſolutionem, quae non in iis comprehendatur. At vero hoc poſterius criterium longe certius eſt priori, cum ſaepe multae litterae indefinitae in ſolutionem ingredi queant, neque tamen ſolutio propterea reddatur generalis.

4. Inueſtigationis autem ratio in hoc exemplo nobis ſolutionis vniuerſalitatem plane oſtendit: cum enim $\sqrt{(xx+yy)}$ debeat eſſe numerus rationalis, is certe erit maior quam x; ſtatuatur ergo $=x+z$. Tum vero quaecunque ſit ratio ipſius y ad z, poni poterit $z=\frac{q}{p}y$, neque hoc modo generalitas poſitionis limitatur. Poſito autem $\sqrt{(xx+yy)}=x+\frac{q}{p}y$ ſumtis quadratis habebimus: $xx+yy=xx+\frac{2q}{p}xy+\frac{qq}{pp}yy$. Deleto vtrinque termino xx, ac reſiduo per y diuiſo, prodibit,

$$y=\frac{2q}{p}x+\frac{qq}{pp}y \text{ ſeu } (pp-qq)y=2pqx.$$

V 3 Erit

Erit ergo $\frac{x}{y} = \frac{pp-qq}{2pq}$, hincque x et y ſunt vel aeque multipla, vel aeque ſubmultipla, numerorum $pp-qq$ et $2pq$. Sumta ergo a pro indice generali ſiue multiplorum, ſiue ſubmultiplorum, nanciſcemur

$$y = 2apq \text{ et } x = a(pp-qq)$$

et ob $z = \frac{q}{p}y = 2aqq$ erit $x+z = \sqrt{(xx+yy)} = a(pp+qq)$.

5. Problematis autem, cuius ſolutio per methodos cognitas generalis exhiberi nequit, exemplum eſto quaeſtio de inueniendis tribus cubis quorum ſumma ſit cubus: ſiue quaerendi ſint tres numeri x, y et z ita, vt ſit $x^3 + y^3 + z^3 =$ cubo. Quod problema cum ab ipſo Diophanto, tum a recentioribus, pluribus modis extat ſolutum, atque ita quidem, vt infinita multitudo ſolutionum ſit exhibita; neque tamen vlla ſolutio tam late patet, vt omnes plane caſus huic quaeſtioni ſatisfacientes in ſe complectatur. In hoc problemate etiam vel vnus cubus x^3, vel duo $x^3 + y^3$, tanquam dati ſpectari poſſunt, vnde vel duos reliquos cubos, vel vnicum quaeri oportet, vt ſumma fiat cubus: quomodocunque autem ſolutio inſtituatur, tamen maxime particularis euadit.

6. Quod quo clarius perſpiciatur, ſolutiones dari ſolitas hic breuiter commemoremus. Sint igitur primo dati duo cubi a^3 et b^3, tertiumque x^3 inueniri oporteat, vt omnium trium ſumma $a^3 + b^3 + x^3$ denuo fiat cubus: Manifeſtum iam quidem eſt, radicem huius cubi maiorem fore quam x, ſed etiamſi ſtatuatur $= x + v$, tamen aequatio quadratica pro inueniendo x prodit, ſicque

ſicque difficultas non diminuitur. Poni igitur ſolet $x = p - b$, vt ſumma trium cuborum fiat:

$$a^3 + 3bbp - 3bpp + p^3 = \text{Cubo} = v^3$$

atque hac quidem poſitione amplitudo ſolutionis non reſtringitur. Porro autem eiusmodi cubus aſſumi debet, vt incognita p per aequationem ſimplicem; ideoque rationaliter exhiberi queat. Manifeſtum autem eſt hoc duplici modo fieri poſſe: primo enim ſumto $v = a + p$, fiet

$$a^3 + 3bbp - 3bpp + p^3 = a^3 + 3aap + 3app + p^3$$

vbi cum termini a^3 et p^3 ſe deſtruant, reliquum per $3p$ diuiſum dat:

$$bb - bp = aa + ap, \text{ ideoque } p = \frac{bb - aa}{a + b} = b - a$$

vnde fit $x = p - b = -a$, quo caſu vtique fit:

$$a^3 + b^3 + x^3 = a^3 + b^3 - a^3 = b^3 = \text{cubo}$$

7. Hanc autem ſolutionem maxime particularem eſſe, ex aſſumtione valoris $v = a + p$ euidens eſt, cum vbique fieri poſſit, vt quantitas

$a^3 + 3bbp - 3bpp + p^3$, ſit cubus; cuius radix non ſit $a + p$,

ita vt hac reſtrictione ſolutio maxime ſit limitata, vnde factum eſt, vt etiam vnicum valorem pro p ac proinde pro x exhibuerit, qui adeo ne ſolutionem quidem idoneam ſuppeditaſſe eſt cenſendus, propterea quod inuenimus $x = -a$, qui caſus tam eſt obuius ſua ſponte, vt ne pro ſolutione quidem admitti queat. Pro v igitur alius valor fingi ſolet, talis tamen, vt inventio

ventio ipſius p ad aequationem ſimplicem perducat, quod vſu venit ponendo $v = a + \frac{b^2}{aa}p$; fiet enim:

$$a^3 + 3bbp - 3bpp + p^3 = a^3 + 3bbp + \frac{3b^4}{a^3}pp + \frac{b^6}{a^6}p^3$$

quae vtrinque deletis terminis $a^3 + 3bbp$ per pp diviſa dat:

$$-3b + p = \frac{3b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^6}p \text{ ſeu } p = \frac{3a^6 + 3a^3b^4}{a^6 - b^6}.$$

8. Cum igitur hinc inuenerimus $p = \frac{3a^3b(a^3+b^3)}{a^6-b^6} = \frac{3a^3b}{a^3-b^3}$, erit $x = p - b = \frac{2a^3b + b^4}{a^3-b^3} = \frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}$, quae eſt radix tertii cubi ad duos datos $a^3 + b^3$ addendi, vt ſumma fiat cubus. Erit autem ſummae radix cubica per hypotheſin $= v = a + \frac{bb}{aa}p = a + \frac{3ab^3}{a^3-b^3}$, ſiue $v = \frac{a^4+2ab^3}{a^3-b^3} = \frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}$. Quicunque ergo numeri pro a et b fuerint aſſumti, hinc habebuntur tres cubi, quorum ſumma eſt cubus. Hi ſcilicet erunt:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Verum et hanc ſolutionem maxime eſſe ſpecialem ex ipſa inueſtigatione perſpicuum eſt, cum plane pro arbitrio noſtro radicem trium cuborum finxerimus $v = a + \frac{bb}{aa}p$, cum ſine dubio infinitos quoque alios valores recipere poſſit.

9. Porro autem datis duobus cubis vnicus reperitur tertius cubus, qui cum iis coniunctus producat cubum; manifeſtum autem eſt, infinitos huiusmodi dari cubos. Si enim ſit $a = 4$ et $b = 3$, radix tertii cubi hinc prodit

$$x = \frac{3(2\cdot 64+27)}{64-27} = \frac{465}{37}, \text{ et } v = \frac{472}{37}, \text{ ita vt ſit}$$

$$4^3 + 3^3 + \left(\frac{465}{37}\right)^3 = \left(\frac{472}{37}\right)^3.$$

Noui-

Nouimus autem cubum quinarii ad hos cubos 4^3+3^3 additum quoque producere cubum ſcilicet ſenarii, ſeu eſſe $3^3+4^3+5^3=6^3$, qui tamen caſus in hac ſolutione non continetur. Quare ſi ad hoc problema ſoluendum, vt ſit $x^3+y^3+z^3=v^3$, quis dicat ſumi debere:

$$x=a;\ y=b;\ \text{et}\ z=\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}$$

tumque fore $v=\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}$, hae formulae quidem ſatisfaciunt, ſed etiamſi, ob duos numeros a et b, arbitrio noſtro relictos, infinities infiniti cuborum terniones hinc exhiberi poſſint, quorum ſumma faciat cubum, tamen infiniti alii exiſtunt cuborum terniones idem praeſtantes, qui in iſtis formulis non ſunt contenti; veluti hic caſus, $x=3$, $y=4$ et $z=5$, pro quo fit $v=6$.

10. Latius quidem patens reperitur ſolutio, ſi vnicus tantum trium cuborum quaſi datus aſſumatur, ita vt fieri oporteat

$$a^3+x^3+y^3=v^3.$$

Ponatur hunc in finem $x=pu+r$ et $y=qu-r$, qua quidem poſitione nulla reſtrictio inducitur, fietque

$$a^3+3rr(p+q)u+3r(pp-qq)uu+(p^3+q^3)u^3=v^3.$$

Iam vt quantitas u hinc rationaliter definiri queat, fingatur $v=a+\frac{rr}{aa}(p+q)u$, qua poſitione vtique ſolutio iam vehementer limitatur: ex ea autem obtinebitur:

$$v^3=a^3+3rr(p+q)u+\frac{3r^4}{a^3}(p+q)^2uu+\frac{r^6}{a^6}(p+q)^3u^3.$$

Deletis ergo vtrinque terminis $a^3+3rr(p+q)u$, et reſiduo $(p+q)uu$ diuiſo, emerget haec aequatio:

$$3r(p-q)+(pp-pq+qq)u=\frac{3r^4}{a^3}(p+q)+\frac{r^6}{a^6}(p+q)^2u$$

ex qua eruitur : $u=\frac{3a^3r^4(p+q)-3a^6r(p-q)}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$

11. Valore ergo hoc pro u inuento, erit

$$x=pu+r=\frac{3a^3pr^4(p+q)-a^6r(2pp-2pq-qq)-r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$$

$$y=qu-r=\frac{3a^3qr^4(p+q)-a^6r(pp+2pq-2qq)+r^7(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}$$

$$\text{et } v=a+\frac{rr}{aa}(p+q)u=\frac{a^7(pp-pq+qq)-3a^4r^3(pp-qq)+2ar^6(p+q)^2}{a^6(pp-pq+qq)-r^6(p+q)^2}.$$

Cum igitur quatuor litterae a, p, q et r pro arbitrio aſſumi queant, haec ſolutio vtique infinities latius patet, quam praecedens, vbi duae tantum litterae arbitrio noſtro relinquebantur. Verum tamen notandum eſt, rationem tantum litterarum p et q in computum ingredi, ita vt hinc litterae arbitrariae ad tres tantum reducantur: nihilo vero minus et haec ſolutio, ob limitationem circa radicem v adhibitam, pro particulari eſt habenda, ita vt terniones cuborum exiſtant in his formulis non contenti. Solutio autem antecedens ex hac emergit, ſumto $p=0$, ita vt haec infinities illa ſit generalior.

12. Adhuc generaliorem autem obtinebimus, ſi nullum trium cuborum tanquam cognitum aſſumamus, ſeu in genere quaeramus x, y et z, vt ſit $x^3+y^3+z^3=v^3$. In hunc finem ponatur

$$x=pt+u;\ y=-pt+qu,\ \text{et}\ z=t-qu$$

quibus poſitionibus nihil adhuc limitatur: facta autem ſubſtitutione, oritur

$$\begin{aligned}t^3&+3ppttu+3ptuu+u^3=v^3\\&+3ppqttu-3pqqtuu\\&-3qttu+3qqtuu.\end{aligned}$$

Iam

Iam fingatur $v=t+u$, vnde quidem maxima limitatio naſcitur, et aequatione per $3tu$ diuiſa, reperietur

$$(pp+ppq-q)t+(p-pqq+qq)u=t+u,$$ ſeu
$$\frac{t}{u}=\frac{-1+p+qq-pqq}{1+q-pp-ppq}$$: capi ergo poterit :

$$t=n(-pqq+qq+p-1) \text{ et } u=n(-ppq-pp+q+1)$$

vnde elicitur :

$$x=n(-ppqq+pqq-ppq-p+q+1)$$
$$y=n(p+q-pp+qq-ppq-pqq)$$
$$z=n(+ppqq-pqq+ppq+p-q-1)$$
$$av=n(-pqq-ppq-pp+qq+p+q).$$

Hinc autem fit $z=-x$ et $v=y$, qui eſt caſus per ſe obuius.

13. Sequenti autem modo ſolutio latius patens eruitur : Ponatur

$x=mt+pu$; $y=nt+qu$ et $z=-nt+ru$, eritque

$$x^3+y^3+z^3=m^3t^3+\left.\begin{matrix}+3mmp\\+3nnq\\+3nnr\end{matrix}\right\}ttu+\left.\begin{matrix}+3mpp\\+3nqq\\-3nrr\end{matrix}\right\}tuu+\left.\begin{matrix}+p^3\\+q^3\\+r^3\end{matrix}\right\}u^3,$$

quae ſumma cum debeat eſſe cubus $=v^3$ ponatur :

$$u=mt+\frac{mmp+nn(q+r)}{mm}u;$$ eritque diuidendo per uu

$$3t(mpp+n(qq-rr))+u(p^3+q^3+r^3)=$$
$$\frac{3t}{m^3}(mmp+nn(q+r))^2+\frac{u}{m^6}(mnp+nn(q+r))^3,$$

ſicque neglecto communi factore, qui ab arbitrio noſtro pendet, erit

$$t=m^6(p^3+q^3+r^3)-(mmp+nn(q+r))^3$$
$$u=3m^3(mmp+nn(q+r))^2-3m^6(mpp+n(qq-rr)$$

 quae

quae formae ſi denuo per communem factorem $q+r$ diuidantur, prodit

$$t = m^6(qq-qr+rr) - 3m^4nnpp - 3mmn^4p(q+r) - n^6(q+r)^2$$
$$u = -3m^6n(q-r) + 6m^5nnp + 3m^3n^4(q+r).$$

14. Hinc iam pro x, y, z, emergunt ſequentes expreſſiones:

$$x = m^7(qq-qr+rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5nnpp - mn^6(q+r)^2$$
$$y = -m^6n(2qq-2qr-rr) + 6m^5nnpq - 3m^4n^3pp + 3m^3n^4q(q+r) - 3mmn^5p(q+r) - n^7(q+r)$$
$$z = +m^6n(-qq-2qr+2rr) + 6m^5nnpr + 3m^4n^3pp + 3m^3n^4r(q+r) + 3mmn^5p(q+r) + n^7(q+r)^2$$

quorum cuborum ſumma iterum eſt cubus radicem habens v, vt ſit

$$v = m^7(qq-qr+rr) - 3m^6np(q-r) + 3m^5nnpp - 3m^4n^3(qq-rr) + 6m^3n^4p(q+r) + 2mn^6(q+r)^2$$

Hi vero numeri etiam ſequenti modo exhiberi poſſunt:

$$x = +3m^5n^2pp - 3m^6npq + 3m^6npr + \left.\begin{matrix} m^7 \\ -mn^6 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -m^7 \\ -2mn^6 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -mn^6 \end{matrix}\right\} rr$$

$$y = -3m^4n^3pp + \left.\begin{matrix} 6m^5n^2 \\ -3m^2n^5 \end{matrix}\right\} pq - 3m^2n^5pr \left.\begin{matrix} -2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ -n^7 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} +2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ -2n^7 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^6n \\ -n^7 \end{matrix}\right\} rr$$

$$z = +3m^4n^3pp + 3m^2n^5pq + \left.\begin{matrix} 6m^5n^2 \\ +3m^2n^5 \end{matrix}\right\} pr \left.\begin{matrix} -m^6n \\ +n^7 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ +2n^7 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +2m^6n \\ +3m^3n^4 \\ +n^7 \end{matrix}\right\} rr$$

$$v = 3m^5n^2pp \left.\begin{matrix} -3m^6n \\ +6m^3n^4 \end{matrix}\right\} pq \left.\begin{matrix} +3m^6n \\ +6m^3n^4 \end{matrix}\right\} pr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ -3m^4n^3 \\ +2mn^6 \end{matrix}\right\} qq \left.\begin{matrix} -m^7 \\ +4mn^6 \end{matrix}\right\} qr \left.\begin{matrix} +m^7 \\ +3m^4n^3 \\ +2mn^6 \end{matrix}\right\} rr$$

Quibus valoribus ſubſtitutis actu fit $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$

15. Si

15. Si ſinguli hi numeri inſuper per coefficientem indefinitum multiplicentur, hae formulae continebunt 6 litteras ab arbitrio noſtro pendentes, quae quidem ad quatuor reducentur, vnde eae latiſſime patere, omnesque omnino caſus in ſe complecti, videntur, verum tamen ex ipſa ſolutione, qua ipſi v valorem a litteris x, y et z pendentem tribuimus, perſpicitur has formulas non niſi pro particularibus haberi poſſe. Ceterum quoque per alias poſitiones aliae eruuntur ſolutiones, quae pro certis caſibus magis ſint futurae idoneae; tum etiam methodus habetur ex inuenta ſolutione quacunque particulari alias ſolutiones particulares eliciendi. His tamen omnibus artificiis, niſi in infinitum reiterentur, nulla ſolutio, quae pro generali haberi queat, obtineri poteſt. Quin etiam in vniuerſum fere adhuc eſt creditum, huius generis problemata natura ſua ita eſſe comparata, vt ſolutionem generalem prorſus non admittant, ex quo ſequens iſtius problematis ſolutio, quae reuera eſt generalis, imprimis notatu digna et finibus Analyſeos Diophantaeae promouendis apta videtur.

Problema.

16. *Inuenire generatim omnes cuborum terniones, quorum ſumma ſit cubus.*

Solutio.

Sint A, B, C radices ternorum cuborum, et D radix cubica ſummae eorum; ita vt ſit $A^3+B^3+C^3=D^3$,

 cui

cui aequationi haec forma tribuatur: $A^3+B^3=D^3-C^3$. Ponatur iam:

$$A=p+q;\ B=p-q;\ C=r-s \text{ et } D=r+s$$

qua poſitione amplitudo ſolutionis neutiquam reſtringitur. Hinc autem fit:

$$A^3+B^3=2p^3+6pqq \text{ et } D^3-C^3=2s^3+6rrs$$

ſicque erit:

$$p(pp+3qq)=s(ss+3rr)$$

quae aequatio ſubſiſtere nequit, niſi $pp+3qq$ et $ss+3rr$ communem habeant diuiſorem. Conſtat autem tales numeros alios non habere diuiſores, niſi qui eiusdem ſint formae: quod vt obtineatur, loco quatuor litterarum p, q, r et s, aliae ſex nouae introducantur, hoc modo:

$$p=ax+3by \qquad s=3cy-dx$$
$$q=bx-ay \qquad r=dy+cx$$

vnde multo minus amplitudini ſolutionis vis infertur. Hinc autem erit:

$$pp+3qq=(aa+3bb)(xx+3yy) \text{ et}$$
$$ss+3rr=(dd+3cc)(xx+3yy)$$

ac noſtra aequatio per $xx+3yy$ diuiſa induet ſequentem formam:

$$(ax+3by)(aa+3bb)=(3cy-dx)(dd+3cc)$$

qua id iam ſumus conſequuti, vt litterae x et y vnicam tantum obtineant dimenſionem, ideoque rationaliter definiri queant. Cum enim ſit:

$$\frac{x}{y}=\frac{-3b(aa+3bb)+3c(dd+3cc)}{a(aa+3bb)+d(dd+3cc)},\ \text{ponatur}$$

$$x=-3nb(aa+3bb)+3nc(dd+3cc)$$
$$y=na(aa+3bb)+nd(dd+3cc)$$

Ex

Ex quibus valoribus litterae p, q, r, s ita definiuntur, vt ſit:

$$p = 3n(ac+bd)(dd+3cc)$$
$$q = n(3bc-ad)(dd+3cc)-n(aa+3bb)^2$$
$$r = n(dd+3cc)^2-n(3bc-ad)(aa+3bb)$$
$$s = 3n(ac+bd)(aa+3bb)$$

Atque hinc tandem radices cuborum quaeſitorum A, B, C, D erunt:

$$A = n(3ac+3bc-ad+3bd)(dd+3cc)-n(aa+3bb)^2$$
$$B = n(3ac-3bc+ad+3bd)(dd+3cc)+n(aa+3bb)^2$$
$$C = n(dd+3cc)^2-n(3ac+3bc-ad+3bd)(aa+3bb)$$
$$D = n(dd+3cc)^2+n(3ac-3bc+ad+3bd)(aa+3bb)$$

quibus valoribus obtinetur, vt ſit:

$$A^3+B^3+C^3 = D^3$$

et cum ſolutio nulla reſtrictione ſit limitata, vtique latiſſime patet omnesque cuborum terniones complectitur, quorum ſumma iterum eſt cubus.

Coroll. 1.

17. Deriuemus hinc formulas magis ſpeciales, ac primo quidem ſit $d=0$; eritque

$$A = 9n(a+b)c^3-n(aa+3bb)^2$$
$$B = 9n(a-b)c^3+n(aa+3bb)^2$$
$$C = 9nc^4-3nc(a+b)(aa+3bb)$$
$$D = 9nc^4+3nc(a-b)(aa+3bb).$$

Si hic

Si hic vlterius ponatur $b=a$, fiet

$A=18nac^3-16na^4$; $B=16na^4$; $C=9nc^4-24na^3c$ et $D=9nc^4$;

ſin autem fiat $b=-a$, eruetur

$A=-16na^4$; $B=18nac^3+16na^4$; $C=9nc^4$; et $D=9nc^4+24na^3c$.

Coroll. 2.

18. Ponamus nunc $c=o$, eritque

$$A=n(3b-a)d^3-n(aa+3bb)^2$$
$$B=n(3b+a)d^3+n(aa+3bb)^2$$
$$C=nd^4-nd(3b-a)(aa+3bb)$$
$$D=nd^4+nd(3b+a)(aa+3bb)$$

Si vlterius ponatur $b=a$, erit

$A=2nad^3-16na^4$; $B=4nad^3+16na^4$; $C=nd^4-8na^3d$; $D=nd^4+16na^3d$

Sin autem fiat $a=-b$, erit

$A=4nbd^3-16nb^4$; $B=2nbd^3+16nb^4$; $C=nd^4-16nb^3d$; $D=nd^4+8nb^3d$.

Coroll. 3.

19. Sit nunc $b=o$, formulaeque noſtrae fient:

$$A=na(3c-d)(dd+3cc)-na^4$$
$$B=na(3c+d)(dd+3cc)+na^4$$
$$C=n(dd+3cc)^2-na^3(3c-d)$$
$$D=n(dd+3cc)^2+na^3(3c+d)$$

Quod

Quod ſi iam praeterea ſtatuatur $d=c$, erit

$A=8nac^3-na^4$; $B=16nac^3+na^4$; $C=16nc^4-2na^3c$;
$D=16nc^4+4na^3c$;

ſin autem fiat $d=-c$, erit

$A=16nac^3-na^4$, $B=8nac^3+na^4$; $C=16nc^4-4na^3c$
$D=16nc^4+2na^3c$.

Coroll. 4.

20. Ponatur denique $a=0$, atque obtinebimus:

$$A=3nb(c+d)(dd+3cc)-9nb^4$$
$$B=3nb(d-c)(dd+3cc)+9nb^4$$
$$C=n(dd+3cc)^2-9nb^3(c+d)$$
$$D=n(dd+3cc)^2+9nb^3(d-c)$$

Si vlterius ponatur $d=c$, erit

$A=24nbc^3-9nb^4$, $B=9nb^4$; $C=16nc^4-18nb^3c$; $D=16nc^4$

ſin autem ſit $c=-d$, habebitur

$A=-9nb^4$; $B=24nbd^3+9nb^4$; $C=16nd^4$;
$D=16nd^4+18nb^3d$.

Coroll. 5.

21. Si numerorum A, B, C vnus fiat negatiuus, quod pro lubitu effici poteſt, veluti ſi fiat $A=-E$, erit $B^3+C^3=D^3+E^3$, ſicque ſimul hoc problema generaliſſime dedimus ſolutum, quo bina cuborum paria quaeruntur, quorum ſummae ſint inter ſe aequales. Sin autem duae radices prodeant negatiuae, veluti

 A=

$A = -E$ et $B = -F$, erit $C^3 = D^3 + E^3 + F^3$, ſicque denuo noſtri problematis ſolutio habebitur.

Scholion 1.

22. Formulae ſpecialiſſimae, in his corollariis exhibitae, ad binas has reducuntur, ſiquidem in Coroll. 3. pro a ſcribatur $2a$ et $n = \frac{n}{16}$, et in Coroll. 1. $\frac{1}{3}a$ pro a

$$A = nac^3 - na^4 \qquad A = 9nac^3 - na^4$$
$$B = 2nac^3 + na^4 \qquad B = na^4$$
$$C = nc^4 - na^3c \qquad C = 9nc^4 - 3na^3c$$
$$D = nc^4 + 2na^3c \qquad D = 9nc^4$$

quarum prior conuenit cum ſupra §. 8. inuenta, altera autem praebet hunc caſum ſimpliciſſimum $A = 8$, $B = 1$, $C = 6$ et $D = 9$, ita vt ſit $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$.

Scholion 2.

23. Primo intuitu formulae generales in problemate erutae non latius patere videntur, quam formulae ſupra §. 14. exhibitae, cum vtrinque quinque inſint litterae arbitrariae, atque iſtae inſuper coëfficientem communem recipere queant, ita vt etiam magis generales videantur. Interim tamen ipſa ſolutionis ratio declarat, formulas in problemate inuentas eſſe ampliſſimas, dum ſuperiores inſigni reſtrictione ſunt limitatae. Quae reſtrictio quo clarius perſpiciatur, ex §. 13. perpendatur poſitio $v = mt + \frac{mmp + nn(q+r)}{mm}u = mt + pu + \frac{nn}{mm}(q+r)u$. Iam vero eſt $mt + pu = x$ et $y + z = (q+r)u$,

ita

ita vt poſitio ſit $v = x + \frac{nn}{mm}(y + z)$. Quare, vt fiat $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, in illa ſolutione aſſumitur eſſe $\frac{v - x}{y + z} = \frac{nn}{mm}$ = quadrato; ſicque illa ad alios caſus non pateat, niſi in quibus ſit $\frac{v - x}{y + z}$ ſeu $\frac{D - A}{B + C}$ numerus quadratus. Quoties igitur $\frac{D - A}{B + C}$ non ſit quadratum, caſus in ſuperioribus formulis non continetur: huiusmodi autem caſus dari, vel ex exemplo $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ liquet, in quo neque $\frac{9 - 1}{6 + 8}$, neque $\frac{9 - 6}{1 + 8}$, neque $\frac{9 - 8}{1 + 6}$ ſit quadratum. Solutio autem problematis tali reſtrictione non limitatur; cum ſit $\frac{D - C}{A + B} = \frac{1}{p} = \frac{pp + 3qq}{ss + 3rr} = \frac{aa + 3bb}{dd + 3cc}$; vnde ex ſolutione generali ii tantum caſus, quibus $\frac{aa + 3bb}{dd + 3cc}$ eſt numerus quadratus in formulis ſuperioribus §. 14. continentur; ex quo ſumma generalitas noſtrae ſolutionis manifeſto elucet.

Scholion 3.

24. Natura autem huius problematis numeros integros tantum poſtulat, et quidem tales, qui ſint primi inter ſe; ſi enim fuerit $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, tum problemati quoque ſatisfacient omnia tam aeque multipla, quam aeque ſubmultipla numerorum A, B, C, D; ideoque ſufficiet, eos tantum notaſſe caſus, quibus numeri A, B, C, D fiunt inter ſe cum integri, tum primi inter ſe. Hunc in finem ſumtis pro a, b, c, d numeris quibuscunque, ſiue affirmatiuis, ſiue negatiuis, inde primum formentur

$$x = 3n(c(dd + 3cc) - b(aa + 3bb))$$
$$y = n(d(dd + 3cc) + a(aa + 3bb))$$

ac pro n talis ſumatur fractio, vt x et y fiant integri et primi inter ſe. Ex his porro formentur:
$p = ax + 3by$; $q = bx - ay$; $r = dy + cx$ et $s = 3cy - dx$, qui denuo per communem diuiſorem, ſi quem habent, deprimantur. Hinc denique habebitur $A = p + q$; $B = p - q$; $C = r - s$ et $D = r + s$; ſicque fiet $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$. Atque caſus, quibus vnus horum numerorum fit negatiuus, ſimul omnes ſolutiones praebebunt, quibus ſumma duorum cuborum aequalis eſt ſummae duorum aliorum cuborum In hoc calculo conueniet copiam numerorum formae $mm + 3nn$ in promtu habere, vnde deinceps formulae $aa + 3bb$ et $dd + 3cc$ deſumi queant.

Tabula

Tabula numerorum formae $mm + 3nn$

numerus n

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300	363	432	507	588	675	768	867	972
1	1	4	13	28	49	76	109	148	193	244	301	364	433	508	589	676	769	868	973
2	4	7	16	31	52	79	112	151	196	247	304	367	436	511	592	679	772	871	976
3	9	12	21	36	57	84	117	156	201	252	309	372	441	516	597	684	777	876	981
4	16	19	28	43	64	91	124	163	208	259	316	379	448	523	604	691	784	883	988
5	25	28	37	52	73	100	133	172	217	268	325	388	457	532	613	700	791	892	997
6	36	39	48	63	84	111	144	183	228	279	336	399	468	543	624	711	802	903	
7	49	52	61	76	97	124	157	196	241	292	349	412	481	556	637	724	815	916	
8	64	67	76	91	112	139	172	211	256	307	364	427	496	571	652	739	832	931	
9	81	84	93	108	129	156	189	228	273	324	381	444	513	588	669	756	847	948	
10	100	103	112	127	148	175	208	247	292	343	400	463	553	607	688	775	866	967	
11	121	124	133	148	169	196	229	268	313	364	421	484	553	628	709	796	887	988	
12	144	147	156	171	192	219	252	291	336	387	444	507	576	651	732	819	910		
13	169	172	181	196	217	244	277	316	361	412	469	532	601	676	757	844	935		
14	196	199	208	223	244	271	304	343	388	439	496	559	628	703	784	871	962		
15	225	228	237	252	273	300	333	372	417	468	525	588	657	732	813	900	991		
16	256	259	268	283	304	331	364	403	448	499	556	619	688	763	844	931			
17	289	292	301	316	337	364	397	436	481	532	589	652	721	796	877	964			
18	324	327	336	351	372	399	432	471	516	567	624	687	756	831	912	999			
19	361	364	373	388	409	436	469	508	553	604	661	724	793	868	949				
20	400	403	412	427	448	475	508	547	592	643	700	763	832	907	988				
21	441	444	453	468	489	516	549	588	633	684	741	804	873	948					
22	484	487	496	511	532	559	592	631	676	727	784	847	916	991					
23	529	532	541	556	577	604	637	676	721	772	829	892	961						
24	576	579	588	603	624	651	684	723	768	819	876	939							
25	625	528	537	652	673	700	733	772	817	868	925	988							
26	676	679	688	703	724	751	784	823	868	919	976								
27	729	732	741	756	777	804	837	876	921	972									
28	784	787	796	811	832	859	892	931	976										
29	841	844	853	868	889	916	949	988											
30	900	903	912	927	948	975													
31	961	964	973	988															

Scholion 4

25. Ex hac tabula iam pro lubitu numeri pro $aa+3bb$ et $dd+3cc$ aſſumi poterunt, vnde valores litterarum a, b, c, d habebuntur, quos tam affirmatiue, quam negatiue accipere licet. Quodſi vero minores numeri pro A, B, C, D deſiderentur, conueniet pro $aa+3bb$ et $3cc+dd$ eiusmodi valores capi, qui communem habeant diuiſorem. Statuatur ergo

$$aa+3bb=mk \text{ et } dd+3cc=nk$$

Tum vero ſit $ac+bd=f$ et $3bc-ad=g$, hincque fiet:

$$A=n(3f+g)-mmk$$
$$B=n(3f-g)+mmk$$
$$C=nnk-m(3f+g)$$
$$D=nnk+m(3f-g)$$

vbi notandum eſt, quicunque valores pro f et g fuerint inuenti, eos tam affirmatiue, quam negatiue, capi poſſe, ob numeros a, b, c, d ambiguos; vnde pro quouis caſu ſequentes habebuntur determinationes:

$$\text{vel } \begin{matrix} f=\pm(ac+bd) \\ g=\pm(3bc-ad) \end{matrix} \quad \text{vel } \begin{matrix} f=\pm(ac-bd) \\ g=\pm(3bc+ad) \end{matrix}$$

Patet autem, ſi manente g capiatur f negatiue, eosdem numeros eſſe prodituros ordine tantum permutato, vnde ſufficit pro f valores tantum affirmatiuos aſſumſiſſe. Praeterea manifeſtum eſt, ſi ſit $m=n$, ſeu $aa+3bb=dd+3cc$, tum fore $A=-C$ et $D=B$, vnde et hos caſus excludi oportebit. Denique ſi $f=0$, fit $A=-B$ et $C=-D$; qui propterea caſus quoque ſunt

ſunt omittendi. Saepe numero quoque euenit, vt vel pro a et b, vel pro c et d, vel pro vtrisque plures valores oriantur, ex quibus ſolutionum numerus eo maior euadit.

Exemplum I.

26. Capiatur $aa+3bb=19$, erit $a=4$ et $b=1$, tum vero $dd+3cc=76$, eritque

vel $\begin{matrix} d=1 \\ c=5 \end{matrix}$ vel $\begin{matrix} d=7 \\ c=3 \end{matrix}$ vel $\begin{matrix} d=8 \\ c=2 \end{matrix}$.

Tum vero fit $m=1$; $n=4$; et $k=19$. Pro f autem et g ſequentes prodibunt valores:

I. $\begin{matrix} f= & 21; \\ g= & \pm 11; \end{matrix}$ II. $\begin{matrix} f= & 19; \\ g= & \pm 19; \end{matrix}$ III. $\begin{matrix} f= & 19; \\ g= & \pm 19; \end{matrix}$

IV. $\begin{matrix} f= & 5; \\ g= & \pm 37; \end{matrix}$ V. $\begin{matrix} f= & 16; \\ g= & \pm 26; \end{matrix}$ VI. $\begin{matrix} f= & 0; \\ g= & \pm 38; \end{matrix}$

vnde tertius caſus et ſextus ſunt excludendi. Atque hinc erit:

$$A=12f+4g-19$$
$$B=12f-4g+19$$
$$C=304-3f-g$$
$$D=304+3f-g.$$

Hinc ergo reperietur pro valore primo $f=21$ et $g=\pm 11$,

	pro ſignis ſup.	pro ſignis inf.		
$A=233\pm 44$	$A=277$	$A=189$		$A=3$
$B=271\mp 44$	$B=227$	$B=315$	ſeu	$B=5$
$C=241\mp 11$	$C=230$	$C=252$		$C=4$
$D=367\mp 11$	$D=356$	$D=378$		$D=6$

Caſus

Caſus autem 2 et 3 diuidendo formulas per 19, ob $f = 1.19$ et $g = \pm 1.19$, dabunt:

			vel			vel
$A = 11 \pm 4$		$A = 15$		$A = 5$		$A = 7$
$B = 13 \mp 4$	ergo	$B = 9$	ſeu	$B = 3$		$B = 17$
$C = 13 \mp 1$		$C = 12$		$C = 4$		$C = 14$
$D = 19 \mp 1$		$D = 18$		$D = 6$		$D = 26$

Caſus IV quo $f = 5$ et $g = \pm 37$ dat:

		vel	vel		
$A = 41 \pm 148$		$A = 189$	$A = -107$		$A = 63$
$B = 79 \mp 148$	ergo	$B = -69$	$B = 227$	ſeu	$B = -23$
$C = 289 \mp 37$		$C = 252$	$C = 326$		$C = 84$
$D = 319 \mp 37$		$D = 282$	$D = 256$		$D = 94$

Caſus V quo $f = 16$ et $g = \pm 26$ dat:

$A = 173 \pm 104$		$A = 277$	$A = 69$		$A = 23$
$B = 211 \mp 104$	ergo	$B = 107$	$B = 315$	ſeu	$B = 105$
$C = 256 \mp 26$		$C = 230$	$C = 282$		$C = 94$
$D = 352 \mp 26$		$D = 326$	$D = 378$		$D = 126$

En ergo plures cuborum terniones ex vnica poſitione inuentos:

$$227^3 + 230^3 + 277^3 = 356^3 \qquad 107^3 + 356^3 = 227^3 + 326^3$$

$$107^3 + 230^3 + 277^3 = 326^3 \qquad 23^3 + 94^3 = 63^3 + 84^3$$

$$23^3 + 94^3 + 105^3 = 126^3$$

$$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$$

$$3^3 + 4 + 5^3 = 6^3$$

vnde colligitur

$$356^3 - 227^3 = 230^3 + 277^3 = 326^3 - 107^3; \text{ item}$$

$$126^3 - 105^3 = 63^3 + 84^3 = 23^3 + 94^3$$

Exem-

Exemplum 2.

27. Sit $aa+3bb=28$, erit vel $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ vel $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$ vel $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$ tum vero ſit:

$dd+3cc=84$, erit vel $\begin{cases} d=3 \\ c=5 \end{cases}$ vel $\begin{cases} d=6 \\ c=4 \end{cases}$ vel $\begin{cases} d=9 \\ c=1 \end{cases}$

hincque $k=28$; $m=1$ et $n=3$; tum vero pro f et g ſequentes prodibunt valores:

$$\text{I.}\ \begin{matrix} f=14; \\ g=\pm 42; \end{matrix}\quad \text{II.}\ \begin{matrix} f=4; \\ g=\pm 48; \end{matrix}\quad \text{III.}\ \begin{matrix} f=22; \\ g=\pm 30; \end{matrix}$$

$$\text{IV.}\ \begin{matrix} f=14; \\ g=\pm 42; \end{matrix}\quad \text{V.}\ \begin{matrix} f=28; \\ g=\pm 0; \end{matrix}\quad \text{VI.}\ \begin{matrix} f=26; \\ g=\pm 18; \end{matrix}$$

vbi notandum eſt, hos valores, quorum I et IV conueniunt, oriri ex ſola poſitione $a=1$ et $b=3$, et reliquas duas eosdem producere. Hinc ergo habebimus:

$$\begin{aligned} A &= 9f + 3g - 28 \\ B &= 9f - 3g + 28 \\ C &= 252 - 3f - g \\ \hline D &= 252 + 3f - g \end{aligned}$$

vnde caſus primus et quartus dabunt per 14 diuidendo

$$\begin{matrix} A = 7 \pm 9 \\ B = 11 \mp 9 \\ C = 15 \pm 3 \\ \hline D = 21 \pm 3 \end{matrix}\ \text{ergo I.}\ \begin{matrix} A = 16 = 8 \\ B = 2 = 1 \\ C = 12 = 6 \\ \hline D = 18 = 9 \end{matrix}\quad \text{II.}\ \begin{matrix} A = -2 = -1 \\ B = 20 = 10 \\ C = 18 = 9 \\ \hline D = 24 = 12 \end{matrix}$$

Caſus vero ſecundus per 4 diuidendo dat:

$$\begin{matrix} A = 2 \pm 36 \\ B = 16 \mp 36 \\ C = 60 \mp 12 \\ \hline D = 66 \mp 12 \end{matrix}\ \text{ergo I.}\ \begin{matrix} A = 38 = 19 \\ B = -20 = -10 \\ C = 48 = 24 \\ \hline D = 54 = 27 \end{matrix}\quad \text{II.}\ \begin{matrix} A = -34 = -17 \\ B = 52 = 26 \\ C = 72 = 36 \\ \hline D = 78 = 39 \end{matrix}$$

Caſus tertius per 2 diuiſus dat:

$$\begin{array}{ll} A = 85 \pm 45 & \\ B = 113 \pm 45 & \\ C = 93 \pm 15 & \\ \hline D = 159 \pm 15 & \end{array} \text{ ergo I. } \begin{array}{l} A = 130 = 65 \\ B = 68 = 34 \\ C = 78 = 39 \\ \hline D = 144 = 72 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = 40 = 20 \\ B = 158 = 79 \\ C = 108 = 54 \\ \hline D = 174 = 87 \end{array}$$

Caſus quintus dat per 28 diuiſus:

$$\begin{array}{l} A = 8 = 4 \\ \quad = 10 = 5 \\ \quad = 6 = 3 \\ \hline D = 12 = 6 \end{array}$$

Caſus denique ſextus per 2 diuiſus, dat:

$$\begin{array}{l} A = 103 \pm 27 \\ B = 131 \pm 27 \\ C = 87 \pm 9 \\ \hline D = 165 \pm 9 \end{array} \text{ ergo vel } \begin{array}{l} A = 130 = 65 = 5 \\ B = 104 = 52 = 4 \\ C = 78 = 39 = 3 \\ \hline D = 156 = 78 = 6 \end{array} \text{ II. } \begin{array}{l} A = 76 = 38 \\ B = 158 = 79 \\ C = 96 = 48 \\ \hline D = 174 = 87 \end{array}$$

Ex hoc ergo exemplo ſequentes reſultant formulae:

$$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$$

$$34^3 + 39^3 + 65^3 = 72^3 \qquad 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

$$20^3 + 54^3 + 79^3 = 87^3 \text{ et } 10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \qquad 17^3 + 39^3 = 26^3 + 36^3$$

$$38^3 + 48^3 + 79^3 = 87^3$$

hincque ſequitur

$$87^3 - 79^3 = 20^3 + 54^3 = 38^3 + 48^3$$

Patet ergo, ex quouis exemplo aſſumto plures huiusmodi formulas obtineri, inter quas autem eaedem ſaepius recurrent; quemadmodum caſus $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ in hoc exemplo et praecedente bis occurrit.

28. En

28. En ergo ſolutionem generalem problematis, quo quaeruntur quatuor numeri rationales A, B, C, D, ita vt ſit $A^3 + B^3 + C^3 = D^3$, ſeu quod eodem redit, quo quaeruntur quatuor numeri rationales, p, q, r et s, vt ſit $p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$. Quae problemata cum methodis ſolitis non niſi particulariter reſolui queant, manifeſtum eſt, has methodos ſolitas adhuc inſigni defectu laborare, ideoque notabilem adhuc perfectionem deſiderare. Tum vero, quod hic de vnico problemate oſtendimus, nullum eſt dubium, quin id in infinitis aliis pari ſucceſſu praeſtari poſſit. In genere quidem patet, ſimili modo huiusmodi aequationem $\alpha p(mpp + nqq) = \beta s(mss + nrr)$, vel etiam hanc latius patentem $(\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \varepsilon)(mpp + nqq) = (ap + bq + cr + ds + e)(mrr + nss)$ rationaliter generaliſſime reſolui poſſe; ponendo:

$$p = nfx + gy \quad \text{et} \quad r = nhx + ky$$
$$q = mfy + gx \qquad\quad s = mhy - kx$$

fiet enim $mpp + nqq = (gg + mnff)(nxx + myy)$ etc.

$$mrr + nss = (kk + mnhh)(nxx + myy)$$

vnde aequatio diuiſa per $nxx + myy$ continebit incognitas x et y vnius tantum dimenſionis, ex qua propterea ſine vlla reſtrictione earum valores rationaliter determinabuntur.

29. Non immerito igitur ſuſpicari licet, et aliorum problematum Diophantaeorum, quorum adhuc non niſi ſolutiones particulares ſunt repertae, ſolutiones quoque generales dari, neque diſcrimen ſupra memoratum

tum ex ſolutionum generalitate et particularitate petitum eſſe eſſentiale; vnde patet quanta adhuc incrementa in Analyſi Diophantaea deſiderentur. Ad quae ſi vnquam penetrare contigerit, nullum eſt dubium, quin inde vniuerſa Analyſis, tam finitorum, quam infinitorum, haud contemnenda ſubſidia ſit acceptura. Cum enim in calculo integrali praecipuum artificium in hoc verſetur, vt formulae differentiales irrationales in rationales transformentur: hoc artificium ipſum, vti ex Analyſi Diophantaea in hunc calculum eſt translatum, ita etiam indidem maiora auxilia merito expectantur; ex quo ſtudium, quod in iſta Analyſi, vtcunque ſterilis alias in ſe ſpectata videatur, amplificanda impenditur, neutiquam inutiliter collocari eſt cenſendum.

30. Hic porro alia conditio non minus attentione digna notari meretur, quod ſaepius in Analyſi Diophantaea eiusmodi problemata occurrunt, quae per methodos conſuetas ſolutionem generalem admittere videntur, cum tamen haec ſolutio tantum ſit particularis; quibus caſibus peculiaria artificia adhiberi debent, vt reſtrictio, qua methodus conſueta eſt limitata, tollatur. Veluti ſi duo cubi in numeris integris quaerantur, quorum ſumma ſit numerus quadratus; ſolutio nullo modo reſtricta obtineri videtur, ſi iſta aequatio $x^3+y^3=zz$ ita reſoluatur, vt ponatur $x=\frac{pz}{r}$ et $y=\frac{qz}{r}$. Fiet enim $(p^3+q^3)z=r^3$, ideoque $z=\frac{r^3}{p^3+q^3}$, et $x=\frac{prr}{p^3+q^3}$; $y=\frac{qrr}{p^3+q^3}$. Vnde, vt x et y fiant numeri integri, ſtatuatur $r=n(p^3+q^3)$, vt habeatur:

$$x=nnp(p^3+q^3) \text{ et } y=nnq(p^3+q^3)$$

eritque $x^3+y^3=n^6(p^3+q^3)^4=$ quadrato.

31. Etſi

31. Etſi autem iſta ſolutio generalis videtur, tamen nulli alii numeri pro x et y inueniuntur, niſi qui communem habent factorem p^3+q^3, ita vt hinc concludendum videatur, nullos dari numeros inter ſe primos, qui, pro x et y ſubſtituti, quaeſtioni ſatisfaciant. Interim, tamen caſu, quo $x=1$ et $y=2$, perſpicuum eſt, fore $x^3+y^3=9=$ quadrato. Tametſi autem hic caſus ex formulis noſtris deriuari poteſt, ponendo $p=1$, $q=2$, et $n=\frac{1}{3}$, vnde vtique prodit $x=\frac{1}{9}.9=1$ et $y=\frac{2}{9}.9=2$; tamen vt hinc alii huius generis caſus eliciantur, neceſſe eſt, vt pro p et q eiusmodi numeri accipiantur, quorum cuborum ſumma ſit quadratum, puta $=ss$, vt deinceps poni poſſit $n=\frac{1}{s}$: vnde prodibit $x=p$ et $y=q$: quo pacto id ipſum, quod hic quaeritur, iam tanquam cognitum poſtulatur, vt ſcilicet duo cubi aſſignari queant, quorum ſumma ſit quadratum. Quemadmodum ergo huic incommodo ſit occurrendum, in ſequenti problemate videamus.

Problema.

32. Inuenire duos numeros integros inter ſe primos, quorum cubi additi faciant quadratum.

Solutio.

Sint x et y numeri quaeſiti, ita vt eſſe debeat $x^3+y^3=$ quadrato. Debet ergo $(x+y)(xx-xy+yy)$ $=$ quadratum. At de his duobus factoribus annoto, eos eſſe vel primos inter ſe, vel ternarium pro communi menſura admittere, vnde ſolutio fiet bipartita,

 qua

qua autem ita in vnam compingetur, vt vterque factor ſeorſim $x+y$ et $xx-xy+yy$ vel quadratum eſſe debeat, vel triplum quadratum.

I. Sit primum vterque factor quadratus; ac ponatur $xx-xy+yy=(pp-pq+qq)^2$, eritque vel $x=pp-2pq$ et $y=pp-qq$, vel $x=2pq-pp$ et $y=qq-pp$. Priori caſu ergo oportet vt ſit $x+y=2pp-2pq-qq$ quadratum. Quae forma cum ſit $=3pp-(p+q)^2$, ſi ponatur $=rr$, oporteret eſſe $3pp=(p+q)^2+rr=$ ſummae duorum quadratorum, quod eſt impoſſibile. Relinquitur ergo alter caſus, quo $x+y=qq+2pq-2pp=(q+p)^2-3pp$ $=$ quadratum, cui ſatisfit ponendo

$$p=2mn \text{ et } q=3mm-2mn+nn$$
$$x=2pq-pp=4mn(3mm-3mn+nn)$$
$$y=qq-pp=(3mm+nn)(3mm-4mn+nn)$$
$$=(m-n)(3m-n)(3mm+nn)$$

II. Tum vero ponatur $xx-xy+yy=$ triplo quadrato $=3(pp-pq+qq)^2$ eritque, cui triplici modo ſatisfit:

I. $x=2pp-2pq-qq$, $y=pp+2pq-2qq$; II. $x=2pp-2pq-qq$, $y=pp-4pq+qq$; III. $x=pp+2pq-2qq$, $y=-pp+4pq-qq$

Caſu primo fit:

$x+y=3pp-3qq=$ 3plo quadrato, ſeu $pp-qq=$ quadrato: vnde fit $p=mm+nn$; et $q=2mn$, ideoque

$$x=2(m^4-2m^3n-2mn^3+n^4)$$
$$y=m^4+4m^3n-6mmnn+4mn^3+n^4$$

Caſu

Caſu ſecundo fit: $x+y=3pp-6pq=$ 3plo quadrato; ergo $pp-2pq=$ quadrato, cui ſatisfit ponendo $p=2mm$ et $q=mm-nn$; vnde oritur

$$x=\ \ 3m^4+6mmnn-n^4$$
$$y=-3m^4+6mmnn+n^4$$

Caſu denique tertio fit $x+y=6pq-3qq=3.\square$ et
$$2pq-qq=\square$$
vnde fit: $p=mm+nn$ et $q=2mm$; ideoque

$$\left.\begin{array}{l} x=-3m^4+6mmnn+n^4 \\ y=\ \ 3m^4+6mmnn-n^4 \end{array}\right\}$$ quae cum illis congruunt.

En ergo ternas ſolutiones problematis propoſiti:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=\ 4mn(3mm-3mn+nn) \\ y=\ (m-n)(3m-n)(3mm+nn) \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} x=\ 2(m^4-2m^3n-2mn^3+n^4) \\ y=\ m^4+4m^3n-6mmnn+4mn^3+n^4 \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} x=\ 3m^4+6mmnn-n^4 \\ y=-3m^4+6mmnn+n^4 \end{cases}$$

vbi quidem ſecunda forma in tertia, quae cum quarta conuenit, contenta deprehenditur, ita vt ſecunda, vti magis complicata, omitti poſſit.

Coroll. 1.

53. Si hae formulae, pro x et y inuentae, per numerum quadratum quemcunque multiplicentur, eae quaeſito aeque ſatisficient, ita ſcilicet ſumma cuborum x^3+y^3 fiat numerus quadratus, vnde numeri quotcunque non primi inter ſe obtinebuntur. Simili autem

modo

modo ſi hae formulae communem habuerint diuiſorem quadratum, per eum diuiſae quaeſito perinde ſatisfacient, vnde numeri inter ſe primi pro x et y inueniuntur, quales hic proprie quaeruntur. Geminas ergo pro hoc negotio habebimus formulas:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x = 4mn(3mm-3mn+nn) \\ y = (m-n)(3m-n)(3mm+nn) \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} x = 3m^4+6mmnn-n^4 \\ y = -3m^4+6mmnn+n^4 \end{cases}$$

Coroll. 2.

34. Euidens eſt, dari infinitos caſus, quibus altera harum formularum recipit valorem negatiuum: quod in prioribus euenit, ſi vel m ſit negatiuum, vel n; vel n contineatur intra limites m et $3m$: in poſterioribus autem, ſi vel $\frac{nn}{mm}$ ſit maius, quam $3(1+\sqrt{2})$, vel $\frac{nn}{mm}$ minus, quam $3(\sqrt{2}-1)$. His ergo caſibus duo reperiuntur cubi, quorum differentia eſt quadratum.

SPECI-

SPECIMEN
DE VSV OBSERVATIONVM IN MATHESI PURA.

Auctore

L. EVLERO.

Inter tot inſignes numerorum proprietates, quae adhuc ſunt inuentae ac demonſtratae, nullum eſt dubium, quin pleraeque primum ab inuentoribus tantum ſunt obſeruatae et in multiplici numerorum tractatione animaduerſae, antequam de iis demonſtrandis cogitauerint. Ita de eo numerorum primorum ordine, qui vnitate ſuperant multiplum quaternarii, cuiusmodi ſunt 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc. ante ſine dubio eſt obſeruatum, eorum ſingulos in duo quadrata ſecari poſſe, quam in eo elaboratum, vt huius obſeruationis veritas per ſolidam demonſtrationem euinceretur. Quod deinde quilibet numerus in quatuor vel pauciora quadrata diſtribui poſſit, Diophanto iam notum fuiſſe videtur, nemo autem ante Fermatium eſt profeſſus, ſe huius veritatis demonſtrationem habere, quam autem nusquam publice edidit, ita vt mea demonſtratio, quam ante aliquod tempus concinnaui, pro prima, quae quidem publice fuerit propoſita, ſit habenda. Interim tamen fateri cogor, demonſtrationem Fermatianam, etiamſi mihi nihil omnino de principiis, quibus innitebatur, ſuſpicari licuerit, mea multo fuiſſe perfectiorem, ac longe latius patuiſſe.

Aſſeuerat enim Fermatius, ſe ex eodem fonte aliorum quoque Theorematum demonſtrationes hauſiſſe, cuius generis ſunt, quod omnis numerus integer ſit ſumma trium pauciorumue numerorum trigonalium; item quod omnis numerus integer ſit ſumma quinque vel pauciorum numerorum pentagonalium; item ſex pauciorumue numerorum hexagonalium, et ita porro de reliquis numeris polygonalibus in infinitum. Ego vero etiamſi reſolutionem cuiusque numeri in quatuor paucioraue quadrata demonſtraui, tamen omnem adhuc operam in iſtis reliquis theorematibus demonſtrandis inutiliter conſumſi, neque vllo modo etiam nunc ſaltem reſolutionem in tres paucioresue trigonales oſtendere potui, etiamſi ea ſimplicior videatur, quam reſolutio in quatuor paucioraue quadrata. Verum et has eximias numerorum proprietates Fermatius multo ante per inductionem concluſiſſe eſt putandus, quam eas demonſtrare didicerit. Ex quibus merito colligimus, in numerorum indole ſcrutanda obſeruationi et inductioni, cui omnes has elegantiſſimas proprietates acceptas referre debemus, plurimum eſſe tribuendum; ideoque ne nunc quidem ab hoc negotio vlterius proſequendo eſſe deſiſtendum. Hoc enim modo pertingimus ad huiusmodi proprietatum cognitionem, quae alias nobis perpetuo ignotae manſiſſent; ac tum demum occaſionem nanciſcimur ad. inueſtigationem demonſtrationum vires noſtras intendendi; veritates namque pleraeque huius generis ita ſunt comparatae, vt prius agnoſci debeant, quam demonſtrari poſſint. Quamuis autem huiusmodi proprietas per aſſiduam obſeruationem fuerit animaduerſa, quae per ſe menti non

parum

parum eſt iucunda: tamen niſi demonſtratio ſolida acceſſerit, de eius veritate non ſatis certi eſſe poſſumus; exempla enim non deſunt, quibus ſola inductio in errorem praecipitauerit. Tum vero ipſa demonſtratio non ſolum omnia dubia tollit, ſed etiam naturae numerorum penetralia non mediocriter recludit, noſtramque numerorum cognitionem continuo magis promouet, a cuius certe doctrinae perfectione adhuc longiſſime ſumus remoti. Verum ſi cui haec forte non magni momenti eſſe videantur, quod vix vnquam vllum in Matheſi applicata vſum habitura putentur, vſus quem inde in ratiocinando adipiſcimur, certe non eſt contemnendus. Sunt enim plerumque huius generis veritates ita reconditae, vt earum demonſtrationes tam incredibilem circumſpectionem, quam eximiam ingenii vim requirant. Quare cum vulgo ad ratiocinii facultatem comparandam demonſtrationes geometricae commendari ſoleant, quippe quae regularum rationandi vſum maxime contineant, neſcio an non ad hunc ſcopum demonſtrationes arithmeticae multo magis ſint accommodatae: in his enim multo maiori cura eſt cauendum, ne a praeſcriptis Logicorum regulis aberremus, quoniam plerumque nimis eſt difficile, in errorem non prolabi. Deinde vero huius generis demonſtrationes arithmeticae, multo maiorem ſollertiam et ſagacitatem ingenii poſtulant, quam geometricae: vnde qui in his fuerit exercitatus, longe facilius errorem in ratiocinando vſu edoctus euitabit, ſibique promtum ratiocinii vſum multo certius comparabit. Atque, ob haec tam inſignia commoda, perluſtrationes naturae numerorum minime relinquendae

videntur, in quibus ne inutiliter verſemur, ab obſeruationibus erit exordiendum, hincque ad demonſtrationem proprietatum obſeruatarum progrediendum. Huiusmodi operationem iam ante aliquot annos confeci in contemplatione diuiſorum cuiusque numeri, qui eſt ſumma duorum quadratorum, nunc igitur, vt viam ad alias numerorum proprietates cognoſcendas ſternam, contemplaturus ſum numeros, qui ex quadrato et duplo quadrati ſunt compoſiti, quales in hac forma generali $2aa + bb$ ſunt contenti, atque in diuiſores horum numerorum ſum inquiſiturus. At hic quidem ſtatim notari conuenit, radices horum duorum quadratorum numeros inter ſe primos eſſe oportere, alioquin enim quilibet numerus poſſet eſſe diuiſor, quadratum ſcilicet numeri, qui foret radicum communis diuiſor: quam ob rem numeros a et b, ex quibus forma $2aa + bb$ componitur, inter ſe primos ſtatuam.

CONSIDERATIO CIRCA NVMEROS in hac forma $2aa + bb$ contentos.

Exponantur primo numeri in forma $2 + bb$ contenti, tum numeri huius formae $8 + bb$, excluſis numeris paribus pro b ſubſtituendis: tertio numeri formae $18 + bb$, ſumendo pro b numeros per 3 non diuiſibiles: quarto numeros formae $32 + bb$, ſumendo pro b numeros per 2 non diuiſibiles, et ita porro. Sicque obtinebuntur ſequentes numerorum progreſſiones:

$2 + bb$) 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83, 102, 123, 146, 171, 198, 227, 258, 291, 326, 363, 402, 443, 486.

8+bb) 9, 17, 33, 57, 89, 129, 177, 233, 297, 349, 449.
18+bb) 19, 22, 34, 43, 67, 82, 118, 139, 187, 214, 274, 307, 379, 418.
32+bb) 33, 41, 57, 81, 113, 153, 201, 257, 321, 393, 473.
50+bb) 51, 54, 59, 66, 86, 99, 114, 131, 171, 194, 219, 246, 306, 339, 374, 411, 491.
72+bb) 73, 97, 121, 193, 241, 361, 433.
98+bb) 99, 102, 107, 114, 123, 134, 162, 179, 198, 219, 242, 267, 323, 354, 387, 422, 459, 498.
128+bb) 129, 137, 153, 177, 209, 249, 297, 353, 417, 489.
162+bb) 162, 166, 178, 187, 211, 226, 262, 283, 331, 358, 418, 451.
200+bb) 201, 209, 249, 281, 321, 369, 489.
242+bb) 243, 246, 251, 258, 267, 278, 291, 306, 323, 342, 386, 411, 438, 467, 498.
288+bb) 289, 313, 337, 409, 457.
338+bb) 339, 342, 347, 354, 363, 374, 387, 402, 419, 438, 459, 482.
392+bb) 393, 401, 417, 473.
450+bb) 451, 454, 466, 499.

Obſeruatio I.

Excerpamus hinc numeros primos, vt nanciſcamur omnes numeros primos formae $2aa+bb$, qui quidem 500 non ſuperent, quippe ad quem terminum omnes progreſſiones praecedentes produximus, atque iſti numeri primi reperientur eſſe:

 3, 11,

3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73, 83, 89, 97, 107, 113, 131, 137, 139, 163, 179, 193, 211, 227, 233, 241, 251, 257, 280, 283, 307, 313, 331, 337, 347, 353, 379, 401, 409, 419, 433, 443, 449, 457, 467, 491, 499.

De his ergo obſeruo, ſingulos nonniſi ſemel in ſerie numerorum formae $2aa+bb$ occurrere: *ita vt numerus primus, qui fuerit aggregatum ex quadrato et duplo quadrato, ſit vnico modo huiusmodi aggregatum.*

Obſeruatio 2.

Si ex numeris expoſitis excerpantur ii, qui ſunt producta ex binario et numero primo, illi in ordinem digeſti erunt:

6, 22, 34, 38, 82, 86, 118, 134, 146, 166, 178, 194, 214, 226, 262, 274, 278, 326, 358, 386, 422, 454, 466, 482.

vbi alii numeri non occurrunt, niſi ipſi numeri primi formae $2aa+bb$ duplicati, ac ſinguli hi quidem numeri ſemel tantum reperiuntur.

Qui ergo numerus primus in forma $2aa+bb$ *fuerit contentus, eius quoque duplum erit numerus formae* $2aa+bb$, *idque vnico modo.*

Ceterum cum a et b ſint numeri inter ſe primi, ideoque alter eorum certo impar, manifeſtum eſt, nullos dari in forma $2aa+bb$ numeros per 4 diuiſibiles.

Obſer-

Obſeruatio 3.

Cum in numeris expoſitis alii ſint impares, alii pares, et quidem impariter pares, obſeruo porro:

Si quis numerus impar inter illos numeros reperiatur, tum quoque eius duplum certo occurrere; ac viciſſim quicunque numerus par in illis numeris occurrit, eius quoque ſemiſſis ibidem certo reperietur.

Obſeruatio 4.

Quodſi iam reliquos numeros non primos ſpectemus, ſingulosque in ſuos factores primos reſoluemus, vnicuique autem in parentheſi adſcribamus, quod vicibus occurrat, ſequentes nanciſcemur:

3^2(1); 3^3(1); 3.11(2); 3.17(2); 3.19(2); 3^4(1); 3^2.11(2); 11^2(1); 3.41(2); 3.43(2); $3^2$17(2); 3^2.19(2); 3,59(2); 11.17(2); 3.67(2); 11,19(2); 3,73(2); 3^5(1); 3,83(2); 3,89(2); 17^2(1); 3.97(2); 3^3.11(2); 3,107(2); 17.19(2); 3 113(2); 19^2(1); 3,11^2(2); 3^2,41(2); 3^2,43(2); 3,131(2); 3,137(2); 3.139(2); 11.41(2); 3^3,17(2); 11.43(2); 3.163(2).

Hic iam obſeruo omnia producta ex numeris primis formae $2aa+bb$ per quamcunque combinationem nata occurrere: *ita vt productum ex quotcunque numeris formae* $2aa+bb$ *ſemper ſit numerus in quadratum et duplum quadratum reſolubilis*: ac plus quidem vno modo, ſi ex diuerſis factoribus fuerit conflatus.

Obſeruatio 5.

Imprimis autem hic animaduerto, in his numeris compoſitis nullos alios factores primos occurrere, niſi qui ipſi ſint formae $2aa+bb$; vnde colligo per inductionem:

Omnes numeros formae $2aa+bb$, *ſi quidem* a *et* b *ſint numeri inter ſe primi, nullos alios diuiſores admittere primos, niſi qui ipſi ſint huius formae* $2aa+bb$.

Binarium quidem vidimus inter diuiſores occurrere poſſe, verum cum $2aa+bb$ caſu $b=0$ et $a=1$ binarium praebeat, etiam ipſum binarium in forma $2aa+bb$ complecti licet.

Obſeruatio 6.

Cum ergo omnis numerus formae $2aa+bb$, exiſtentibus a et b primis inter ſe, alios diuiſores primos non admittat, niſi qui in ſerie numerorum in obſeruatione prima exhibitorum contineantur, ſi ipſis quidem binarius adiungatur: circa iſtos numeros primos obſeruo, intra illos nullos numeros ſiue huius formae $8n-1$, ſiue huius $8n-3$ reperiri.

De numeris ergo primis formae $8n-1$ *et* $8n-3$ *affirmare licet, eos non ſolum non eſſe numeros formae* $2aa+bb$, *ſed etiam ne diuiſores quidem eſſe poſſe vllius numeri formae* $2aa+bb$, *ſiquidem* a *et* b *ſint primi inter ſe.*

Obſeruatio 7.

Numeris ergo primis huius geminae formae $8n-1$ et $8n-3$ excluſis, praeter binarium nulli alii

relin-

relinquuntur numeri primi, qui ſint diuiſores numerorum formae $2aa+bb$, niſi qui in alterutra harum formarum $8n+1$, vel $8n+3$, contineantur; quos duplicis generis numeros primos conſpectui expoſuiſſe iuuabit:

$(8n+1)$: 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, 193, 233, 241, 257, 281, 313, 337, 353, 401, 409, 433, 449, 457.

$(8n+3)$: 3, 11, 19, 43, 59, 67, 83, 107, 131, 139, 163, 179, 211, 227, 251, 283, 307, 331, 347, 379, 419, 443, 467, 491, 499.

atque obſeruo, hos numeros primos omnes inter numeros primos formae $2aa+bb$ ita occurrere, vt alii praeterea ibi non reperiantur.

Hinc ergo numeri huius formae $2aa+bb$, *dummodo* a *et* b *ſint inter ſe primi, praeter binarium nullos alios habent diuiſores primos, niſi qui ſint vel huius formae* $8n+1$, *vel huius* $8n+3$.

Cum autem omnes numeri primi in his quatuor formis $8n\pm1$ et $8n\pm3$ contineantur, haec obſeruatio cum praecedente conuenit.

Obſeruatio 8.

At, quod notatu maxime eſt dignum, obſeruo: *Omnem numerum primum tam huius formae* $4n+1$, *quam huius* $8n+3$, *ſemper eſſe aggregatum ex quadrato et duplo quadrato: ſiue inter numeros primos formae* $2aa+bb$ *omnes plane numeros, ſiue huius formae* $8n+1$, *ſiue huius* $8n+3$ *occurrere, ac praeterea nullos alios.*

Nullus ergo aſſignari poterit numerus primus in harum formularum $8n+1$ et $8n+3$ alterutra contentus, qui non ſit ſumma quadrati et dupli quadrati, et hoc quidem vnico modo, ſi obſeruatio prima huc trahatur.

Nota.

Proprietatum, quas hic circa numeros formae $2aa+bb$ eorumque diuiſores obſeruauimus, aliae ita ſunt comparatae, vt earum veritas facile oſtendi poſſit, aliae autem maiorem demonſtrationis apparatum requirunt, aliae vero denique profundiſſimae indaginis ſunt iudicandae, cum ſumma ſollertia ad eas demonſtrandas ſit opus. Ad primum genus referendae ſunt obſeruationes prima, ſecunda, tertia, quarta et pars prior ſextae; ad genus ſecundum autem pertinent obſeruationes quinta, pars poſterior ſextae, et ſeptima, quae eo redit. Profundiſſimae autem indaginis eſt obſeruatio octaua. Proprietates autem iſtae ſimiles ſunt iis, quas circa ſummas duorum quadratorum propoſui; quarum veritatem cum feliciter eruerim, operam dabo, vt etiam has proprietates obſeruatas ſimili modo demonſtrationibus confirmem. Incipiam ergo ab obſeruationibus facillimis.

Theorema. 1.

1. Si numerus N fuerit numerus formae $2aa+bb$, tum quoque eius duplum 2N erit numerus eiusdem formae.

Demon-

Demonſtratio.

Sit enim $N=2mm+nn$, erit $2N=4mm+2nn$, ponatur $2m=k$, fietque $2N=kk+2nn$, ſicque $2N$ erit quoque numerus formae $2aa+bb$. Q. E. D.

Coroll. 1.

2. Ac ſi N fuerit pluribus modis numerus formae $2aa+bb$, totidem quoque modis eius duplum $2N$ erit numerus formae $2aa+bb$.

Coroll. 2.

3. Conſtat ergo veritas obſeruationis ſecundae, ſimulque ratio perſpicitur, cur numerorum, qui inter numeros formae $2aa+bb$ ſupra expoſitos bis occurrunt, eorum quoque dupla ibidem bis reperiantur.

Theorema 2.

4. Si numerus par $2N$ fuerit numerus formae $2aa+bb$, tum quoque eius ſemiſſis N erit numerus eiusdem formae.

Demonſtratio.

Poſito $2N=2mm+nn$, quo $2mm+nn$ ſit numerus par, quoniam pars $2mm$ iam eſt par, neceſſe eſt, vt altera pars nn ſit quoque numerus par, ideoque et eius radix n. Ponatur ergo $n=2k$, fietque $2N=2mm+4kk$, vnde per 2 diuidendo oritur $N=mm+2kk$, ita vt quoque ſemiſſis N ſit in forma $2aa+bb$ contentus. Q. E. D.

Coroll. 1.

5. Hinc etiam euidens eſt, ſi numerus propoſitus par $2N$ fuerit pluribus modis numerus formae $2aa+bb$, totidem quoque modis eius ſemiſſem N fore numerum eiusdem formae.

Coroll. 2.

6. Si ergo numerus N fuerit vnico modo numerus formae $2aa+bb$; tum etiam eius duplum $2N$ vnico modo erit numerus formae $2aa+bb$; ſi enim pluribus modis eſſet huius formae, totidem quoque modis eius ſemiſſis N foret eiusdem formae contra hypotheſin.

Coroll. 3.

7. Hinc autem porro duplicando numeri $4N$, $8N$, $16N$ etc. omnes vnico tantum modo in forma $2aa+bb$ continebuntur, ſiquidem numerus ſimplex N vnico modo in iſta forma reperiatur.

Coroll. 4.

8. Quod vero hic de vnico modo reſolutionis in formam $2aa+bb$ eſt dictum, patet quoque ad duos pluresue modos. Ex qualibet enim reſolutione numeri N in formam $2aa+bb$, ſponte naſcitur reſolutio numeri, ſiue dupli, ſiue dimidii, ſicque obſeruationem tertiam demonſtratam dedimus.

Theo-

Theorema 3.

9. Si habeantur duo numeri M et N formae $2aa+bb$, erit quoque eorum productum MN numerus eiusdem formae.

Demonſtratio.

Sit enim $M=2aa+bb$, et $N=2cc+dd$, erit eorum productum

$$MN=4aacc+2aadd+2ccbb+bbdd;$$

addatur $0=4acbd-4acbd$, et habebitur

$$MN=4aacc+4acbd+bbdd+2aadd-4acbd+2ccbb$$

quae expreſſio manifeſto eſt aggregatum ex quadrato et duplo quadrato, ſcilicet:

$$MN=(2ac+bd)^2+2(ad-cb)^2$$

Vel quod eodem redit, ſi terminos $+4acbd$ et $-4acbd$ permutemus, vt ſit

$$MN=4aacc-4acbd+bbdd+2aadd+4acbd+2ccbb$$

habebimus quoque alio modo

$$MN=(2ac-bd)^2+2(ad+cb)^2$$

Quare ſi vterque numerus M et N fuerit formae $2aa+bb$, erit quoque productum numerus eiusdem formae. Q. E. D.

Coroll. 1.

10. Ob geminas formulas inuentas productum MN erit duplici modo numerus formae $2aa+bb$. Si enim ſit

$$M=2aa+bb \text{ et } N=2cc+dd$$

ac ponatur productum $MN = 2pp + qq$, erit

vel $p = ad - cb$ et $q = 2ac + bd$

vel $p = ad + cb$ et $q = 2ac - bd$.

Coroll. 2.

11. Si fuerit vel $ad - cb$, vel $2ac - bd$ numerus negatiuus, pro p et q eorum valorés affirmatiui aſſumi poterunt; ex formulis enim quadratis perinde elicere licuiſſet priori caſu $p = cb - ad$, poſteriori vero $q = bd - 2ac$. Numeri igitur negatiui hoc modo pro radicibus quadratorum oriundi calculum nihil turbant.

Coroll. 3.

12. Productum ergo duorum numerorum formae $2aa + bb$ duplici modo in eandem formulam reſolui poterit, niſi forte vtraque reſolutio ad eandem recidat, quod autem non euenit, niſi fuerit vel $cb = 0$ et $bd = 0$, vel $ac = 0$, hoc eſt $b = 0$, vel $a = 0$, vel $c = 0$, vel etiam $d = 0$, alterque propterea numerorum propoſitorum, vel quadratus, vel duplum quadrati.

Coroll. 4.

13. Si ergo ambo numeri fuerint primi, eorum productum ſemper eſt duplici modo reſolubile in formam $2aa + bb$, niſi alter fuerit $= 1$, vel $= 2$. Cum enim tantum excipiantur caſus, quibus alter eſt quadratum, vel duplum quadratum, vterque autem ponatur

tur primus, excipiuntur tantum caſus, quibus alter eſt vel 1, vel 2.

Coroll. 5.

14. Si ambo numeri M et N fuerint aequales, ſeu $N = M$, vt ſit $c = a$ et $d = b$, erit quidem duplici modo quadratum $MM = 2pp + qq$, ſcilicet vel $p = o$ et $q = 2aa + bb$, vel $p = 2ab$ et $q = 2aa - bb$. Sed prior reſolutio $MM = 2.o^2 + (2aa + bb)^2$, minus ad ſcopum pertinere eſt cenſenda, quia alterum quadratum eſt euaneſcens. Sin autem eſſet, vel $a = o$, vel $b = o$, vtraque reſolutio adeo ad vnum rediret.

Coroll. 6.

15. Patet hinc etiam productum ex tribus numeris L, M, N formae $2aa + bb$ quadruplici modo in formam eandem reſolui poſſe. Sit enim:

$$L = 2aa + bb;\ M = 2cc + dd;\ N = 2ee + ff$$

ac ſit primo $LM = 2pp + qq$, erit vti vidimus:

vel $p = ad + cb$ et $q = 2ac + bd$

vel $p = ad + cb$ et $q = 2ac - bd$

Tum ergo, ſi ponatur productum $LMN = 2xx + yy$, erit quoque duplici modo

vel $x = pf - eq$ et $y = 2ep + fq$

vel $x = pf + eq$ et $y = 2ep - fq$

Hinc ergo, pro p et q valoribus inuentis ſubſtituendis, reperietur

I. vel

I. vel $x = 2ace + bde + bcf - adf$ et $y = 2ade + 2acf - 2bce + bdf$
II. vel $x = 2ace - bde - bcf - adf$ et $y = 2ade + 2acf + 2bce - bdf$
III vel $x = 2ace + bde - bcf + adf$ et $y = 2ade - 2acf - 2bce - bdf$
VI. vel $x = 2ace - bde + bcf + adf$ et $y = 2ade - 2acf + 2bce + bdf$

Coroll. 7.

16. Simili modo colligitur, productum ex quatuor numeris formae $2aa + bb$ octo diuerſis modis in formam eandem reſolui poſſe; caſus tamen ſunt excipiendi, quibus inter numeros propoſitos reperiuntur, vel aequales, vel ſimplicia quadrata, vel quadrata dupla: his enim caſibus vidimus reſolutiones, quae in genere ſunt diuerſae, conuenire.

Scholion.

17. Quod autem ad iſtas reſolutiones attinet, earum vis perfecte intelligi nequit, niſi demonſtrauerimus, numeros primos plus vno modo in hac forma $2aa + bb$ non contineri. Si enim numeri primi plurimis modis eſſent reſolubiles, de numeris compoſitis nihil certi definiri poſſet, niſi quod adhuc pluribus modis huiusmodi reſolutiones admittant. Cum igitur prima obſeruatio nos docuerit, numeros primos, qui quidem in ordine numerorum formae $2aa + bb$ continentur, nonniſi ſemel ibidem occurrere, hanc ipſam veritatem demonſtrare aggrediar.

Theorema. 4.

18. Qui numerus duplici modo in formam $2aa + bb$ reſolui poteſt, is non eſt primus.

Demon-

Demonſtratio.

Sit numerus N duplici modo in hanc formam reſolubilis, ac ponatur

$$N = 2aa + bb \text{ et } N = 2cc + dd$$

ita vt tam numeri a et c, quam b et d, ſint diuerſi. Multiplicetur prior aequatio per cc, altera per aa, atque illa ab hac ſubtracta, relinquet:

$$(aa - cc)N = aadd - bbcc = (ad - bc)(cd + bc)$$

Quod ſi iam numerus N eſſet primus, is in alterutro factore $ad - bc$, vel $ad + bc$, contineretur, neceſſe eſt. Verum cum addendis noſtris formulis ſit $2N = 2aa + bb + 2cc + dd$, auferatur vtrinque $2ad + 2bc$, vnde habebitur:

$$2N - 2ad - 2bc = 2aa + bb + 2cc + dd - 2ad - 2bc;$$

ſiue $2N - 2ad - 2bc = aa + (a - d)^2 + cc + (c - b)^2$. At poſtremum hoc membrum, vtpote ſumma quatuor quadratorum, certo eſt nihilo maius, ita vt ſit $2N - 2ad - 2bc > 0$; vnde fit:

$$N > ad + bc.$$

Cum ergo N ſit maior, quam $ad + bc$, multoque magis quam $ad - bc$, numerus N in neutro factore $ad - bc$, vel $ad + bc$, tanquam pars continetur. Fieri ergo nequit, vt numerus N, qui duplici modo in formam $2aa + bb$ eſt reſolubilis, ſit primus. Q. E. D.

Coroll. 1.

19. Si ergo N fuerit numerus primus, certe plus vno modo in formam $2aa + bb$ non eſt reſolu-

bilis, quoniam, ſi plus vno modo reſolui poſſet, non eſſet primus, ſicque habetur demonſtratio obſeruationis primae.

Coroll. 2.

20. Quicunque ergo numerus primus vel plane non ad formam $2aa+bb$ reduci poteſt, vel vnico tantum modo. Cauendum autem, ne hinc viciſſim concludatur, omnem numerum, qui vnico tantum modo ſit reſolubilis, eſſe primum; huiusmodi enim concluſio regulis ratiocinandi aduerſaretur.

Coroll. 3.

21. Si fuerit idem numerus $N=2aa+bb$, itemque $N=2cc+dd$, erit hinc, vt vidimus, $(aa-cc)N=(ad-bc)(ad+bc)$, ideoque:

$$N=\frac{(ad-bc)(ad+bc)}{aa-cc}$$

Numerator ergo huius fractionis non ſolum per denominatorem erit diuiſibilis; ſed reductione ad integrum facta, ſimul factores numeri N innoteſcent.

Coroll. 4.

22. Hoc ergo caſu numerus N non ſolum non erit primus, ſed etiam eius factores hinc facile colligentur. Sic cum numerus 267 bis inter numeros formae $2aa+bb$ occurrat, ſcilicet:

$$267=2.7^2+13^2 \text{ et } 267=2.11^2+5^2$$

ob $a=7$, $b=13$, $c=11$ et $d=5$, habebimus:

267 =

$$267 = \frac{(35-143)(35+143)}{(7+11)(7+11)} = \frac{108.178}{4.\ 18}$$

hincque $267 = \frac{6.\ 178}{4} = 3.\ 89.$

Theorema 5.

23. Si numerus formae $2aa+bb$ fuerit diuiſibilis per numerum primum eiusdem formae; tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae.

Demonſtratio.

Sit numerus propoſitus $N=2aa+bb$, eiusque diuiſor $P=2pp+qq$, qui cum ſit primus, numeri p et q erunt primi inter ſe. Denotet Q quotum ex hac diuiſione oriundum, ita vt ſit

$$Q = \frac{N}{P} = \frac{2aa+bb}{2pp+qq}$$

Cum igitur numerus $N=2aa+bb$ ſit diuiſibilis per $P=2pp+qq$; erit quoque $pp(2aa+bb)=2aapp+bbpp$ per P diuiſibile: at $aaP=2aapp+aaqq$ etiam manifeſto per P eſt diuiſibile, vnde quoque differentia horum numerorum $aaqq-bbpp$, per numerum primum P diuiſibilis ſit, neceſſe eſt. Quia vero eſt $aaqq-bbpp=(aq-bp)(aq+bp)$, alter horum duorum factorum $aq\pm bp$, per numerum primum P certo erit diuiſibilis. Ponatur ergo

$$aq\pm bp = mP = 2mpp+mqq$$

hincque reperitur:

$$q = \frac{2mpp \mp bp}{q} + mq = \frac{p(2mp\mp b)}{q} + mq.$$

 Cum

Cum itaque $\frac{p(2mp \mp b)}{q}$ ſit numerus integer, numeri autem p et q inter ſe primi, neceſſe eſt, vt $2mp \mp b$ ſit per q diuiſibile. Ponatur ergo $2mp \mp b = \mp nq$, eritque

$$b = nq \mp 2mp, \text{ et } a = mq \pm np.$$

Hinc autem fit:

$$N = 2aa + bb = \begin{cases} 2mmqq \mp 4mnpq + 2nnpp \\ + nnqq \pm 4mnpq + 4mmpp \end{cases}$$

ſiue $N = (2mm + nn)(2pp + qq)$

Quodſi ergo hic numerus N diuidatur per numerum primum $P = 2pp + qq$, per quem diuiſibilis eſſe ponebatur, quotus erit $Q = 2mm + nn$, ideoque numerus formae $2aa + bb$. Q. E. D.

Hypotheſis.

24 Quoniam in ſequentibus frequentiſſime ſermo erit de numeris formae $2aa + bb$, item de numeris primis eiusdem formae: deinde vero etiam de numeris tam primis, quam compoſitis, qui in hanc formam $2aa + bb$ non ſunt reſolubiles; ne indolem horum numerorum deſcribendo nimis fiam prolixus, compendii cauſa ſequentibus ſignis vtamur. Denotent ergo literae initiales alphabethi maiusculae: A, B, C, D, E etc. perpetuo inpoſterum numeros formae $2aa + bb$, idque in genere, ſiue ſint primi, ſiue compoſiti: eaedem vero literae commate notatae. A′, B′, C′, D′, E′ etc. numeros in hac forma non contentos, ſiue primos, ſiue compoſitos. Deinde vero literae initiales alphabethi germanici

manici maiuſculae: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, etc. ſignificent numeros tantum primos formae $2aa+bb$, qui ſunt, vt ſupra vidimus, 3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73 etc. quibus binarius adiungi poteſt. Eaedem vero literae commate notatae $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \mathfrak{D}', \mathfrak{E}'$ etc. denotent numeros primos in forma $2aa+bb$ non contentos, qui ergo ſunt: 5, 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, 53, 61, 71 etc.

Coroll. 1.

25. Hac ergo notatione recepta in Theoremate antecedente demonſtratum eſt, ſi numerus A fuerit diviſibilis per numerum $\mathfrak{A}$, quotum certo fore numerum B: vel ſi numerus A vnum factorem habeat $\mathfrak{A}$, alterum factorem fore B, ſcilicet numerum formae $2aa+bb$. Vel etiam ſi $\frac{A}{\mathfrak{A}}$ fuerit numerus integer, erit is $=$B.

Coroll. 2.

26. Si ergo numerus A per numerum quempiam P diuiſus producat quotum B′, hoc eſt numerum in forma $2aa+bb$ non contentum, tum diuiſor ille P certe non erit $\mathfrak{A}$, ſeu non erit numerus primus formae $2aa+bb$. Erit ergo vel compoſitus eiusdem formae, vel plane non iſtius formae $2aa+bb$.

Coroll. 3.

27. Secundum hunc autem notandi modum in theorematibus praecedentibus demonſtrauimus:

In primo ſcilicet eſt $2\,\mathfrak{A} = \text{B}$.

In ſecundo vero eſſe $\frac{A}{\mathfrak{A}} = \text{B}$

In tertio eſſe $\mathfrak{A}\text{B} = \text{C}$

In quarto ſi fuerit $A = B$, ſeu ſi idem numerus duplici modo in forma $2aa + bb$ contineatur, tum non eſſe $A = \mathfrak{A}$.

Theorema 6.

28. Si numerus formae $2aa + bb$ diuiſibilis fuerit per numerum, qui iſta forma non contineatur, tum quotus neque erit numerus primus formae $2aa + bb$, neque productum ex meris huiusmodi numeris primis conflatum.

Demonſtratio.

Demonſtrari ergo debet ſi numerus A diuiſibilis fuerit per numerum B', tum quotum neque fore $= \mathfrak{A}$, neque productum huiusmodi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ etc. Si enim quotus eſſet $\mathfrak{A}$, ſeu $\frac{A}{B'} = \mathfrak{A}$, foret $\frac{A}{\mathfrak{A}} = B'$, quod per theorema praecedens fieri nequit. Sin autem quotus eſſet productum ex quotcunque numeris primis formae $2aa + bb$, ſcilicet $= \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, vt eſſet $\frac{A}{B'} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, foret vtiqne $A = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$, ideoque $\frac{A}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$. At eſt $\frac{A}{\mathfrak{A}} = B$, vnde foret $B = \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$, hincque $\frac{B}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}B'$: verum ſimili modo eſt $\frac{B}{\mathfrak{B}} = C$, ideoque $\frac{C}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{D}B'$: at eſt $\frac{C}{\mathfrak{C}} = D$, et $\frac{D}{\mathfrak{D}} = E$, foret ergo tandem $E = B'$, quod eſſet abſurdum: vnde ſequitur, quotum neque fore numerum primum formae $2aa + bb$, neque productum ex meris huiusmodi numeris primis conſtans. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

29. Cum igitur quotus neque ſit numerus primus formae $2aa+bb$, neque ex meris numeris primis huius formae conflatus, factores habebit, vel ſaltem vnum factorem primum in forma $2aa+bb$ non contentum, ſeu litera $\mathfrak{A}'$ deſignandum.

Coroll. 2.

30. Quoniam ergo factores quoti ſunt quoque factores diuidendi, perſpicuum eſt, ſi numerus formae $2aa+bb$ diuiſorem habeat B′, ſeu in forma $2aa+bb$ non contentum, tum eundem numerum inſuper alium ad minimum habiturum eſſe diuiſorem primum, in forma $2aa+bb$ non contentum, ſeu ſi numerus A diuiſorem habeat B′, tum certe etiam diuiſorem habebit alium $\mathfrak{B}'$.

Coroll. 3.

31. Quod hic in genere de diuiſoribus formae A′ oſtenſum eſt, valet etiam de diuiſoribus formae $\mathfrak{A}'$. Hinc ſi numerus formae $2aa+bb$ diuiſibilis fuerit per numerum primum in eadem forma non contentum, tum etiam quotus eſt diuiſibilis per numerum primum in eadem forma non contentum.

Theorema 7.

32. Si numerus formae $2aa+bb$, quantumuis magnus, diuiſorem habuerit numerum P, neque tamen radices *a et b* ipſae per P ſint diuiſibiles, tum alius numerus

merus eiusdem formae exhiberi poteſt minor, quam $\frac{3}{4}$ PP, qui per eundem diuiſorem P ſit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Poſito numero $2aa+bb$ diuiſibili per P, quantumuis magnae fuerint radices a et b, eae ſemper ita exprimi poſſunt:

$$a = mP \pm c \text{ et } b = nP \pm d$$

vt numeri c et d ſemiſſem ipſius P non excedant, neuterque euaneſcet, cum neque a, neque b, per P ſit diuiſibile. Sit ergo $c < \frac{1}{2}P$ et $d < \frac{1}{2}P$; atque his valoribus ſubſtitutis forma $2aa+bb$ abibit in ſequentem:

$$(2mm+nn)PP \pm 4mcP \pm 2ndP + cc + 2dd$$

quae cum ſit diuiſibilis per P, neceſſe eſt, vt quoque eius pars $2cc+dd$ per P ſit diuiſibilis; quae eſt et numerus formae $2aa+bb$, et minor quam $\frac{3}{4}$PP. Dato ergo numero formae $2aa+bb$ diuiſibili per numerum quemcunque P, ſemper exhiberi poterit numerus minor, quam $\frac{3}{4}$ PP, et eiusdem formae, qui per eundem numerum P futurus ſit diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

33. Exiſtente ergo P diuiſore cuiuspiam numeri A, dabitur numerus $B < \frac{3}{4}PP$ per P diuiſibilis, et quotus inde oriundus propterea erit minor quam $\frac{3}{4}$P: qui cum etiam ſit diuiſor numeri B ſi P ſit diuiſor cuiuspiam numeri formae $2aa+bb$, hinc innoteſcit quoque numerus alius minor quam $\frac{3}{4}$ P, qui pariter erit diuiſor cuiusdam numeri formae $2aa+bb$.

Coroll.

Coroll. 2.

34. Propoſito porro numero quocunque P, ſi inter numeros formae $2aa+bb$, minores quam $\frac{3}{4}PP$, nullus datur per P diuiſibilis, tum etiam plane nullus exiſtet numerus formae $2aa+bb$ per P diuiſibilis.

Theorema 8.

35. Si numerus primus in forma $2aa+bb$ non contentus, fuerit diuiſor cuiusquam numeri huius formae, neque radices ſeorſim per eum ſint diuiſibiles, tum alius quoque numerus primus, priore minor, et in hac forma non contentus, exhiberi poterit, qui etiam futurus ſit diuiſor cuiuspiam numeri eiusdem formae, neque tamen ſingulae radices per eum ſint diuiſibiles.

Demonſtratio.

Demonſtrandum ergo eſt, ſi fuerit numerus primus $\mathfrak{A}'$ diuiſor cuiuspiam numeri $A = 2aa+bb$, ita vt neque a, neque b per $\mathfrak{A}'$ ſit diuiſibile, tum quoque dari alium numerum primum $\mathfrak{B}' < \mathfrak{A}'$, qui quoque futurus ſit diuiſor numeri cuiuspiam $B = 2cc+dd$, ita vt neque c, neque d, per illum ſit diuiſibile. Demonſtrauimus autem, exhiberi poſſe numerum $A < \frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$; vnde ſi ponatur quotus $\frac{A}{\mathfrak{A}'} = Q$, erit $Q < \frac{3}{4}\mathfrak{A}'$, ideoque multo magis $Q < \mathfrak{A}'$. At per §. 31. vel hic ipſe quotus Q erit numerus primus $\mathfrak{B}'$, vel ſaltem diuiſorem habebit primum formae $\mathfrak{B}'$. Sit igitur vel ipſe quotus Q, vel eius diuiſor $= \mathfrak{B}$, qui certe mul-

to minor erit quam $\mathfrak{A}'$. Quare cum quotus Q ſit diuiſor numeri A, etiam $\mathfrak{B}'$ erit eius diuiſor. Manifeſtum autem eſt, hunc quotum eiusue diuiſorem $\mathfrak{B}'$ vnitatem eſſe non poſſe, cum vnitas non ſolum ſit in forma $2aa+bb$ contenta, ſed etiam in demonſtratione Th. 6. excludatur. Q. E. D.

Coroll. 1.

36. Si ergo numeri cuiuspiam $A=2aa+bb$ diuiſor eſſet numerus primus $\mathfrak{A}'$ in iſta forma non contentus, neque a et b per eum ſeorſim fuerit diuiſibile, tum alius quoque numerus primus illo minor $\mathfrak{B}'$ exiſteret diuiſor numeri cuiuspiam $B=2cc+dd$.

Coroll. 2.

37. Cum autem A ita capi poſſit, vt ſit $A<\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, ita etiam pro altero numero $\mathfrak{B}'$ inueniri poterit numerus $B<\frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$ per ea, quae in Theorem. 7. ſunt demonſtrata.

Coroll. 3.

38. Si numerus $A=2aa+bb$ fuerit diuiſibilis per numerum primum $\mathfrak{A}'$, neque a et b per eum ſint diuiſibiles, numeri a et b pro primis inter ſe aſſumi poterunt: ſi enim haberent communem factorem, eo ſublato nihilominus praeberent numerum $2aa+bb$ per $\mathfrak{A}'$ diuiſibilem.

Coroll.

Coroll. 4.

39. At ſi numerus $A = 2aa + bb$, exiſtentibus a et b inter ſe primis, diuiſorem habeat $\mathfrak{A}'$, tum etiam numerus $B = 2cc + dd$ minor quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$ exhiberi poterit per $\mathfrak{A}'$ diuiſibilis, ita vt c et d ſint inter ſe primi. Poſito enim $a = m\mathfrak{A}' \pm c$ et $b = n\mathfrak{A}' \pm d$ (32), numeri c et d certe non erunt per $\mathfrak{A}'$ diuiſibiles, ac ſi quem alium habeant communem factorem, puta $c = kp$ et $d = kq$, etiam $2pp + qq$ per $\mathfrak{A}'$ erit diuiſibilis, exiſtentibus p et q inter ſe primis: hocque caſu multo magis $2pp + qq$ minus erit quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$.

Coroll. 5.

40. Cum igitur exiſtente $A = 2aa + bb$ diuiſibili per $\mathfrak{A}'$, et radicibus a et b inter ſe primis, exhiberi poſſit numerus $B = 2cc + dd$ minor quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, ita vt c et d ſint numeri inter ſe primi, qui ſit quoque per $\mathfrak{A}'$ diuiſibilis, erit, vt vidimus, hic idem numerus B quoque per alium numerum primum $\mathfrak{B}' < \frac{3}{4}\mathfrak{A}'$ diuiſibilis.

Coroll. 6.

41. Atque cum $B = 2cc + dd$, exiſtentibus c et d numeris inter ſe primis, iam ſit diuiſibilis per numerum primum $\mathfrak{B}'$ minorem quam $\mathfrak{A}'$, inde nouus numerus $C = 2ee + ff$ per $\mathfrak{B}'$ quoque diuiſibilis inveniri poterit, ita vt e et f ſint numeri primi inter ſe, et ipſe numerus C minor quam $\frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$.

Theorema 9.

42. Nullus datur numerus formae $2aa + bb$, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis, qui diuiſibilis ſit per vllum numerum primum in iſta forma non contentum.

Demonſtratio.

Fingamus enim, per numerum primum $\mathfrak{A}'$ diuiſibilem eſſe numerum $A = 2aa + bb$, atque a et b eſſe numeros inter ſe primos: hicque numerus A, ſi non minor fuerit quam $\frac{3}{4}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, in minorem transformari poterit. Habebit autem tum hic numerus A alium diuiſorem primum in forma $2aa + bb$ non contentum, qui ſit $= \mathfrak{B}'$, eritque $\mathfrak{B}' < \frac{3}{4}\mathfrak{A}'$, ad ſi fuerit $A > \frac{3}{4}\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'$ reperietur nouus numerus $B = 2cc + dd$ diuiſibilis per $\mathfrak{B}'$, ita vt c et d ſint numeri inter ſe primi $B < \frac{3}{4}\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'$. Iam ſimili modo, cum B habeat diuiſorem $\mathfrak{B}'$, alium praeterea habebit diuiſorem eiusdem indolis $\mathfrak{C}' < \frac{3}{4}\mathfrak{B}'$, hincque porro nouus numerus $C = 2ee + ff$ per $\mathfrak{C}'$ diuiſibilis reperietur, vt ſit $C < \frac{3}{4}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'$, et e et f, numeri primi inter ſe. Hoc modo procedendo continuo minores numeri formae $2aa + bb$ obtinerentur, qui diuiſibiles eſſent per numeros in forma $2aa + bb$ non contentos. Quare cùm in minoribus numeris formae $2aa + bb$, ſiquidem a et b ſint primi inter ſe, nullus occurrat, qui habeat diuiſorem in forma iſta non contentum, ne in maximis quidem huiusmodi numeri exiſtunt, atque idcirco nullus plane datur numerus formae $2aa + bb$, qui ſit diui-

diuiſibilis per vllum numerum in ea forma non contentum, ſiquidem a et b ſint primi inter ſe. Q. E. D.

Coroll. 1.

43. Iam ergo euicta eſt veritas obſeruationis quintae, qua animaduertimus, numerum quemcunque formae $2aa+bb$, ſiquidem a et b ſint numeri primi inter ſe, nullos alios habere diuiſores primos, niſi qui ſint eiusdem formae.

Coroll. 2.

44. Omnis ergo numerus formae $2aa+bb$, ſiquidem a et b ſint primi inter ſe, vel ipſe eſt primus, vel eſt productum ex duobus pluribusue numeris primis, qui omnes in forma $2aa+bb$ contineantur. Huiusmodi itaque numerus nullos alios admittit diuiſores, niſi qui ſint eiusdem formae $2aa+bb$.

Coroll. 3.

45. Nullus ergo numerus primus in forma $2aa+bb$ non contentus, cuiusmodi ſunt 5, 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, 53, etc. vnquam diuiſor, vel factor, eſſe poterit vllius numeri formae $2aa+bb$, ſiquidem a et b ſint numeri primi inter ſe. Neque vero hac reſtrictione, quod numeri a et b inter ſe primi eſſe debeant, eſt opus, dummodo vterque non ſit per illum numerum primum diuiſibilis. Si enim a et b communem habeant diuiſorem n, per illum numerum primum non diuiſibilem, vt ſit $a=nc$ et $b=nd$, tum quia $2cc+dd$ non eſt diuiſibilis, neque etiam $nn(2a+dd)$, ſeu $2aa+bb$, per illum erit diuiſibilis.

Scholion.

46. Notetur probe vis huius demonſtrationis, quae omnino eſt ſingularis, et in hoc conſiſtit, quod in minoribus numeris nullus reperiatur numerus formae $2aa+bb$, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis, qui ſit diuiſibilis per vllum numerum primum in iſta forma $2mm+nn$ non contentum. Hinc enim concluſi, etiam ne in maioribus et maximis quidem numeris nullos dari per eiusmodi numeros primos diuiſibiles. Demonſtraui enim ſi in maximis tales darentur numeri, tum etiam inter minores, ac tandem minimos, futuros eſſe numeros eiusdem indolis. Neque vero opus eſt ad hanc demonſtrationem noſſe, in numeris minimis nullos dari numeros formae $2aa+bb$, per numerum primum, qui non ſit eiusdem formae, diuiſibiles; hoc enim ipſum iam per ſe eſt abſurdum, minores continuo exhiberi poſſe numeros formae $2aa+bb$, qui per numerum primum non eiusdem formae eſſent diuiſibiles. Namque tandem neceſſario perueniri oporteret ad numeros primos, qui cum ſint formae $2aa+bb$, certe per nullum numerum primum a ſe diuerſum diuidi poſſent. Quare ſi de quacunque alia forma $maa+bb$, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis, demonſtrari poſſet, quod ſi maiores numeri eius formae dentur per numerum primum non eiusdem formae diuiſibiles, tum etiam neceſſarios minores dari numeros, qui quoque numerum primum non eiusdem formae futuri ſint diuiſibiles, tum tuto concludere poſſemus, nullos plane dari numeros formae $maa+bb$, qui per vllum numerum primum in eadem forma non con-

contentum ſint diuiſibiles. Verum vt ſimilis demonſtratio locum habere poſſit, neceſſe eſt, vt $\frac{m+1}{4}$ non ſit maius quam 1, alias enim theorema 7 et 8 applicari non poſſet: vnde huiusmodi demonſtratio non valebit, niſi in formis $aa+bb$, $2aa+bb$ et $3aa+bb$. At in hac poſtrema quidem forma exceptionem facit diuiſor 2 in forma $3aa+bb$ non contentus; hoc enim caſu fit $a=1$, et $b=1$, ſeu $3.1+1$ eſt forma ſimpliciſſima per 2 diuiſibilis, quae cum non ſit minor, quam 2^2, quotus quoque non minor prodit quam 2; ideoque hinc concluſio ad numerum primum minorem in forma $3aa+bb$ non contentum, non ſuccedit.

Theorema 10.

47. Si numerus formae $2aa+bb$ vnico modo in hanc formam fuerit reſolubilis, atque a et b fuerint primi inter ſe, tum ille numerus certo eſt primus.

Demonſtratio.

Si enim non eſſet primus, duos pluresue haberet factores primos formae $2aa+bb$, ideoque duobus pluribusue modis in formam $2aa+bb$ eſſet reſolubilis, vt in theoremate 3 demonſtrauimus; pluralitas enim reſolutionum in dubium vocari nequit, ſi factores illi, quos habent, fuerint inaequales. Verum etiamſi factores fuerint aequales, tamen reſolutio plus vno modo ſuccedit: nam ſi numerus propoſitus N ſit $=(2aa+bb)^2$ erit I. $N=2.0^2+(2aa+bb)^2$ et II. $N=2(2ab)^2+(2aa-bb)^2$, at ſi ſit $N=(2aa+bb)^3$, erit

I. N=

I. $N = 2(2a^3 + abb)^2 + (2aab + b^3)^2$

II. $N = 2(2a^3 - 3abb)^2 + (6aab - b^3)^2$

Porro ſi ſit $N = (2aa + bb)^4$ erit quoque:

I. $N = 2 \cdot 0^2 + (4a^4 + 4aabb + b^4)^2$

II. $N = 2(4a^3b + 2ab^3)^2 + (4a^4 - b^4)^2$

III. $N = 2(8a^3b - 4ab^3)^2 + (4a^4 - 12aabb + b^4)^2$

Ergo pluralitas reſolutionum etiam locum habet, ſi factores fuerint aequales, dummodo reſolutiones, quibus vel altera radix euaneſcit, vel ambae communem habeant diuiſorem, non excludantur. Hinc ergo patet, ſi numerus $2aa + bb$, exiſtentibus a et b numeris primis inter ſe, vnico modo fuerit reſolubilis in hanc formam, tum eum certo eſſe primum. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Propoſito ergo numero quocunque, quem conſtat eſſe in forma $2aa + bb$ contentum, facile erit explorare, vtrum ſit primus, nec ne? Conſiderentur enim numeri a et b, qui ſi non fuerint primi inter ſe, ſtatim habetur factor, ſin autem ſint primi, tum inde ſucceſſiue omnia quadrata duplicata $2aa$ ſubtrahentur, et diſpiciatur, an vsquam quadratum bb relinquatur, quod ſi praeter caſum cognitum non eueniat, certo pronunciare poterimus, numerum propoſitum eſſe primum.

Coroll. 2.

49. Sin autem numerus propoſitus plus vno modo in quadratum et duplum quadratum fuerit reſolubilis,

bilis, tum non ſolum nouimus eum non eſſe primum, ſed etiam eius factores aſſignare poterimus, ſecundum ea, quae §. 21. ſunt tradita. Hic autem modus numeros examinandi ſatis expedite perfici poteſt, perinde atque ego iam ex natura ſummae duorum quadratorum ſimilem modum expoſui.

Theorema II.

50. Nullus numerus, qui vel in hac forma $8n-1$, vel in hac $8n-3$ continetur, diuidere poteſt vllum numerum formae $2aa+bb$, ſiquidem a et b ſint numeri primi inter ſe.

Demonſtratio.

Demonſtraſſe ſufficiet, nullum numerum, vel formae $8n-1$, vel $8n-3$, vnquam eſſe poſſe formae $2aa+bb$; cum enim haec forma $2aa+bb$ nullos alios admittat diuiſores, niſi qui in hac ipſa forma ſint contenti, ſtatim ac demonſtrauerimus, nullum numerum, vel formae $8n-1$, vel $8n-3$, in forma $2aa+bb$ contineri, ſimul certum erit, ne quidem diuiſorem huius formae eſſe poſſe. Cum autem $8n-1$ et $8n-3$ ſint numeri impares, videamus, quibus caſibus forma $2aa+bb$ numeros impares producat: manifeſtum autem eſt, hoc fieri non poſſe, niſi b ſit numerus impar; quo caſu bb fiet numerus formae $8m+1$. Tum vero numerus a vel erit par, vel impar; priori caſu erit aa formae $4n$, ideoque $2aa$ formae $8n$, vnde expreſſio $2aa+bb$ abibit in numerum formae $8m+8n+1$, ſeu $8n+1$.

Poſteriori caſu, quo a eſt numerus impar, erit aa numerus formae $4n+1$, ideoque $2aa$ formae $8n+2$, vnde expreſſio $2aa+bb$ praebet hoc caſu numerum formae $8m+1+8n+2$, ſeu formae $8n+3$. Forma ergo $2aa+bb$ alios numeros impares non continet, niſi qui fuerint, vel formae $8n+1$, vel formae $8n+3$. Quare nullus numerus impar, vel formae $8n-1$, vel formae $8n-3$, vnquam in forma $2aa+bb$ continetur, nec propterea vllius numeri $2aa+bb$ diuiſor exiſtere poteſt, ſi quidem a et b ſint numeri primi inter ſe. Q. E. D.

Coroll. 1.

51. Si ergo a et b fuerint numeri primi inter ſe, numerus $2aa+bb$ nunquam erit diuiſibilis, vel per 5, vel per 7, vel per vllum numerum huius ſeriei 5, 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, 53, 61, 71, 79, etc. neque etiam per vllum numerum non primum, vel in forma $8n-1$, vel in forma $8n-3$ contentum, quales ſunt 15, 21, 35, 39, 45, 63, 69, 77, 85, 87, 93, 93, 95, etc.

Coroll. 2.

52. Omnes ergo numeri impares, qui vnquam eſſe poſſunt diuiſores numerorum formae $2aa+bb$, ſiquidem a et b ſint inter ſe primi, vel in hac formula $8n+1$, vel hac $8n+3$, continentur. Neque tamen vlli numeri compoſiti harum formularum, qui factores habent formae $8n-1$, vel $8n-3$, diuiſores numeri $2aa+bb$ exiſtere poſſunt.

Coroll.

Coroll. 3.

53. Etiamſi ergo producta $(8m-1)(8n-1)$, $(8m-1)(8n-3)$, et $(8m-3)(8n-3)$ in formis $8m+1$ vel $8m+3$ contineantur, tamen ea nunquam diuiſores vllius numeri formae $2aa+bb$ exiſtere poſſunt, ſi quidem a et b fuerint numeri primi inter ſe.

Coroll. 4.

54. Quoties ergo forma $2aa+bb$ fit numerus primus, is ſemper vel in hac numerorum ſerie $8n+1$, vel hac $8n+3$, continebitur; vnde in his duabus ſeriebus etiam omnes diuiſores primi, vel ſaltem impares numerorum in formula $2aa+bb$ contentorum, reperientur.

Scholion 1.

55. Vtrum autem omnes numeri primi, qui in ſeriebus numerorum $8n+1$ et $8n+3$ occurrunt, viciſſim ſint numeri formae $2aa+bb$, quaeſtio eſt altioris indaginis. Quousque quidem ſupra numeros primos formae $2aa+bb$ continuauimus, vidimus in illis omnes plane numeros primos, tam huius formae $8n+1$, quam huius $8n+3$, occurrere; vnde omnes quoque numeri primi in his duabus formulis contenti, ſimul in forma $2aa+bb$ contineri videntur: verum huius veritatis demonſtratio maxime eſt abſtruſa. Viam tamen ad eam iam non parum praeparauimus, dum demonſtrauimus, omnes diuiſores formae $2aa+bb$ ſimul eſſe numeros eiusdem formae, ſiquidem a et b fuerint inter ſe primi: nam propoſito numero primo quocunque

primo P ſiue formae $8n+1$, ſiue $8n+3$, ſi demonſtrare potuerimus, dari quempiam numerum $2aa+bb$ per illum diuiſibilem, ita vt neque a, neque b, per eum ſit diuiſibile; ſimul erit certum, numerum P eſſe in forma $2mm+nn$ contentum.

Scholion 2.

56. Quod autem omnis numerus primus in alterutra harum formularum $8n+1$ et $8n+3$ neceſſario ſit aggregatum ex quadrato et duplo quadrato, vti id in numeris minoribus 500 non ſuperantibus euenire vidimus, equidem me nondum demonſtrare poſſe, fateor: haecque demonſtratio multo magis ardua videtur, quam ea, qua probaui, omnem numerum primum formae $4n+1$ eſſe ſummam duorum quadratorum. Cum autem momentum in hoc verſetur, vt demonſtretur, propoſito quocunque numero primo, vel formae $8n+1$, vel formae $8n+3$, ſemper dari numerum $2aa+bb$ per eum diuiſibilem, ita vt radices a et b ſint numeri inter ſe primi, operam is perdiderit, qui valores numerorum a et b per n expreſſos, inueſtigare voluerit, propterea quod hi numeri non tantum ab n pendent, ſed etiam ea ratio, quod numerus $8n+1$ vel $8n+3$ ſit primus, neceſſario in computum duci debeat. Nam ſi numerus $8n+1$, vel $8n+3$, non fuerit primus, euenire adeo poteſt, vt nullus numerus $2aa+bb$ per eum ſit diuiſibilis. Iam equidem demonſtraui, per numerum $8n+1$, ſi ſit primus, diuiſibiles eſſe omnes numeros formae $p^{8n}-q^{8n}$, et per numerum

merum primum $8n+3$ omnes numeros formae $p^{4n+2} - q^{4n+2}$; tum vero etiam ſemper eiusmodi dari numeros p et q, vt priori caſu forma $p^{4n}+q^{4n}$ per $8n+1$, poſteriori vero forma $p^{4n+1}+q^{4n+1}$ per $8n+3$ diuiſibilis exiſtat. Demonſtrandum igitur eſſet, in his formis $p^{4n}+q^{4n}$ et $p^{4n+1}+q^{4n+1}$ neceſſario ſemper eiusmodi inuolui caſus, qui ſint aggregata ex quadrato et duplo quadrato; quod autem quo modo demonſtrari poſſet, nondum perſpicio. Aeque difficile ergo, ac fortaſſe difficilius erit, ſequentes propoſitiones demonſtrare, quae tamen aeque certae videntur, excepta prima, cuius demonſtrationem dedi.

I. Omnis numerus primus formae $4n+1$ in hac forma $aa+bb$ continetur.

II. Omnes numeri primi in his formis $8n+1$ et $8n+3$ contenti, ſimul in hac forma continentur $2aa+bb$.

III. Omnes numeri primi vel huius formae $12n+1$, vel huius $12n+7$, ſeu huius vnicae $6n+1$, in hac forma $3aa+bb$ continentur.

IV. Omnes numeri primi in quapiam harum formularum

$16n+1$, $16n+5$, $16n+9$, $16n+13$, vel in hac $4n+1$ contenti, ſimul ſunt numeri formae $4aa+bb$, cuius quidem demonſtratio iam in prima comprehenditur.

V. Omnes numeri primi in aliqua harum formularum contenti

$20n+1$; $20n+9$;

ſimul quoque ſunt formae $5aa+bb$.

VI. Omnes numeri primi in aliqua harum formularum contenti,

$24n+1$; $24n+7$;

ſimul quoque ſunt formae $6aa+bb$.

VII. Omnes numeri primi in aliqua harum formularum contenti,

$28n+1$; $28n+9$; $28n+11$; $28n+15$; $28n+23$; $28n+25$,

vel, quod eodem redit, in harum aliqua:

$14n+1$; $14n+9$; $14n+11$;

ſimul quoque ſunt formae $7aa+bb$.

VIII. Omnes numeri primi in alterutra harum formularum contenti,

$24n+5$ et $24n+11$;

ſimul ſunt numeri formae $3aa+2bb$.

Huiusmodi autem theorematum numerus quousque libuerit continuari poteſt.

Verum tamen in iis formandis probe cauendum eſt, ne inductioni nimis tribuatur: neque enim ſi fuerit numerus quiſpiam primus p in hac forma $faa+gbb$ contentus, inde generatim concludere licet, omnes numeros primos forma $4fgn+p$ fore numeros eiusdem formae $faa+gbb$, etiamſi hoc, ſi f et g fuerint numeri exigui, verum eſſe videatur. Etſi enim eſt $67=5.9$ $+22.$

+ 22.1, ideoque formae $5aa+22bb$, tamen numerus $4.5.22n+67$, caſu $n=2$, qui eſt $=40.22+67=947$ ſcilicet primus, non in forma $5aa+22bb$ continetur: interim tamen affirmare licet, cum ſit $23=5.2^2+3.1$, ideoque in forma $5aa+3bb$ contineatur, omnes numeros primos $60n+23$ in eadem forma contineri. Quodſi igitur, quis methodum inuenerit, huiusmodi theoremata tam inueniendi, quam, in quo caput rei eſt poſitum, demonſtrandi, is certe in doctrina numerorum plurimum praeſtitiſſe erit iudicandus.

Admiſſa autem hac proprietate numerorum primorum in his formulis $8n+1$ et $8n+3$ contentorum, plura alia hinc deduci poterunt egregia Theoremata, quorum quaedam notaſſe iuuabit.

Theorema 12.

57. Si numerus quicunque in alterutra harum formularum $8n+1$, vel $8n+3$, contentus, nullo modo in formam $2aa+bb$ reſolui poſſit, tum non erit primus; at ſi vnico modo in hanc formam poſſit reſolui, tum erit primus: ſin autem plus vno modo haec reſolutio ſuccedat, tum pariter non erit primus, ſed compoſitus.

Demonſtratio.

Pars ſecunda et tertia ex iam demonſtratis ſunt manifeſtae. Si enim numerus propoſitus vnico modo in forma $2aa+bb$ continetur, tum certe eſt primus, ſin pluribus, compoſitus. Quod autem ad partem primam

mam attinet, ea vi proprietatis nondum demonſtratae ſubſiſtit; nam ſi numerus propoſitus eſſet primus, in formam $2aa+bb$ reſolui poſſet, quando ergo hanc reſolutionem non admittit, tum certo non eſt primus. Q. E. D.

Corollarium. 1.

58. Hinc igitur patet modus non difficilis propoſitum numerum, ſi fuerit, vel formae $8n+3$, vel $8n+1$, explorandi, vtrum ſit primus, nec ne? Subtrahantur enim ab eo ſucceſſiue omnia quadrata duplicata, ſcilicet:

2, 8, 18, 32, 50, 72, 98 etc.

quorum differentiae conſtituunt progreſſionem arithmeticam:

6, 10, 14, 18, 22, 26, etc.

et diſpiciatur, vtrum vſpiam quadratum relinquatur.

Coroll. 2.

59. Poſſunt etiam plures operationes ſimul inſtitui, ac primo ſucceſſiue ſubtrahi haec quadrata duplicata:

2, 72, 242, 512, 882 etc. quorum differentiae ſunt 70, 170, 270, 370, etc.

ſecundo vero haec quadrata duplicata:

8, 98, 288, 578, 968 etc. quorum differentiae ſunt 90, 190, 290, 390, etc.

tertio

tertio haec:

18, 128, 338, 648, 1058 etc. quorum differentiae ſunt
110, 210, 310, 410 etc.

quarto haec:

32, 162, 392, 722, 1152 etc. quorum differentiae ſunt
130, 230, 330, 430 etc.

quinto haec:

50, 200, 450, 800, 1250 etc. quorum differentiae ſunt
150, 250, 350, 450 etc.

vbi ex figuris finalibus mox patebit, quaenam operationes ſint inutiles.

Coroll. 3.

60. A numeris autem formae $8n+1$, quadrata tantum paria duplicata ſubtrahi debent, vnde excluſis quadratis imparibus duplicatis, ſequentes numeri erunt ſubtrahendi:

I. 8, 288, 968, 2048 etc. 280, 680, 1080 400, 400	II. 32, 392, 1152, 2312 etc. 360, 760, 1160 400, 400
III. 0, 200, 800, 1800 etc. 200, 600, 1000 400, 400	IV. 72, 512, 1352, 2592 etc. 440, 840, 1249 400, 400

V. 128, 648, 1568, 2888 etc.
520, 920, 1320
400, 400

Coroll. 4.

61. Sin autem numerus ſit formae $8n+3$, tum tantum quadrata imparia duplicata ſubtrahi debent, quae ſunt:

I. 2, 242, 882, 1922 etc.
240, 640, 1040
400, 400

II. 18, 338, 1058, 2178 etc.
320, 720, 1120
400, 400

III. 50, 450, 1250, 2450 etc.
400, 800, 1200
400, 400

IV. 98, 578, 1458, 2738 etc.
480, 880, 1280
400, 400

V. 162, 722, 1682, 3042 etc.
560, 960, 1360
400, 400

Exemplum 1.

62. Exploretur numerus 67579, vtrum ſit primus, nec ne?

Cum hic numerus contineatur in forma $8n+3$, ſubtrahantur numerorum ordines ex coroll 4, isque tantum ſecundus, tertius ac quartus, quia primus et quintus darent notam finalem 7, quae quadrato repugnat:

II. 67579	53801	III. 67579	53129	IV. 67579	52441	* 229
18	3520	50	3600	98	3680	
67561	50281	67529	49529	67481	48761	
320	3920	400	4000	480	4080	
67241	46361	67129	45529	67001	44681	
720	4320	800	4400	880	4480	
66521	42041	66329	41129	66121	40201	
1120	4720	1200	4800	1280	4880	
65401	37321	65129	36329	64841	35321	
1520	5120	1600	5200	1680	5280	
63881	32201	63529	31129	63161	30041	
1920	5520	2000	5600	2080	5680	
61961	26681	61529	25529	61081	24361	
2320	5920	2400	6000	2480	6080	
59641	20761	59129	19529	58601	18281	
2720	6320	2800	6400	2880	6480	
56921	14441	56329	13129	55721	11801	
3120	6720	3200	6800	3280	6880	
53801	7721	53129	6329	52441	4921	
	7120					
	601					

Hic vnicum occurrit quadratum $52441 = 229^2$, vt ſit $67579 = 2.87^2 + 229^2$, ideoque primus.

Exemplum 2.

63. Exploretur numerus 40081, vtrum ſit primus, nec ne?

 Cum

Cum hic numerus contineatur in forma $8n+1$, ſubtrahantur numeri Coroll. 3 eorumque quidem ordines II, III et IV, hoc modo:

II.	40081	29129	III.	40081	30281	IV.	40081	31369
	32	3160		200	3000		72	2840
	40049	25969		39881	27281		40009	28529
	360	3560		600	3400		440	3240
	39689	22409		39281	23881		39569	25289
	760	3960		1000	3800		840	3640
	38929	18449		38281	20081		38729	21649
	1160	4360		1400	4200		1240	4040
	37769	14089		36881	15881		37489	17609
	1560	4760		1800	4600		1640	4440
	36209	9329		35081	11281		35849	13169
	1960	5160		2200	5000		2040	4840
	34249	4169		32881	6281		33809	8329
	2360			2600	5400		2440	5240
	31889			30281	881		31369	3089
	2760							
	29129							

quia igitur hic nusquam quadratum remanſit, numerus propoſitus non eſt primus, eſt vero productum $= 149 \cdot 269$.

Theorema 13.

64. Si numerus n nullo modo ſit aggregatum ex numero quadrato et trigonali, tum numerus $8n+1$ certe non erit primus.

Demon-

Demonſtratio.

Si enim n nullo modo in hac forma $aa+\frac{1}{2}(bb+b)$ continetur, tum $8n+1$ nullo modo in hac forma $8aa+4bb+4b+1$ continetur, non ergo erit numerus formae $2pp+qq$, ideoque non erit primus. Q. E. D.

Corollarium.

65. At ſi n vnico modo ſit aggregatum ex quadrato et trigonali, tum $8n+1$ certe erit numerus primus, ſin autem ſit pluribus modis, non erit primus, ſed compoſitus.

Theorema 14.

66. Si numerus n nullo modo fuerit aggregatum ex numero trigonali et trigonali duplicato, tum $8n+3$ certe non erit primus.

Demonſtratio.

Si enim n nullo modo in hac forma $aa+a+\frac{1}{2}(bb+b)$ contineatur, tum $8n+3$ nullo modo in hac forma $8aa+8a+2+4bb+4b+1$, ideoque nec in hac $2pp+qq$ continebitur, conſequenter non erit primus. Q. E. D.

Corollarium.

67. At ſi n vnico modo fuerit aggregatum ex trigonali et trigonali duplicato, tum $8n+3$ certe erit primus, ſin autem fuerit plus vno modo, compoſitus.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

DE FRICTIONE CORPORVM ROTANTIVM.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Si corpus ſuper plano ita incedat, vt ſolo motu progreſſiuo ſeu repente feratur, quantam tum a frictione reſiſtentiam patiatur, a Phyſicis iam ſatis exploratum videtur. Per experimenta enim compertum eſt, in huiusmodi motibus reſiſtentiam ſemper eſſe eiusdem magnitudinis, ita vt nequaquam a celeritate corporis pendeat; proportionalis autem eſt inuenta preſſioni, qua corpus ad planum apprimitur, quippe cuius parti tertiae vel quartae frictio plerumque aequalis deprehenditur. Interim tamen, quo magis ſuperficies plani et corporis fuerit laeuigata, eo magis inde frictionis quantitas diminuitur; vnde fit, vt pro corporibus et planis admodum politis frictio multo minor parte quarta preſſionis, pro valde aſperis vero maior parte tertia, exiſtere poſſit. Praeterea vero neque figura corporis, neque baſis magnitudo, qua planum contingit, quicquam ad frictionem conferre obſeruantur.

2. Prouenit ſcilicet frictio ab attritu partium mutuo, dum corpus ſuper plano incedit, ex quo principio tam quantitas quam reliqua frictionis phaenomena

ſatis dilucide ſunt explicata. Quando autem corpus non motu repente, ſed rotatorio, ſuper plano incedit, multo difficilior videtur frictionis determinatio. Si enim rotatio corporis ita ad motum progreſſiuum fuerit attemperata, vt nulla partium attritio locum habeat, quemadmodum fit in rotis voluendo ſuper ſolo ingredientibus, tum ob attritus defectum etiam nulla frictio adeſſe cenſetur. Quodſi vero motus corporis rotatorius vel maior fuerit vel minor, quam iſte caſus exigit, difficillimum videtur veram frictionis quantitatem accurate aſſignare, niſi plurima experimenta circa caſus quosque ſumma cura inſtituta in ſubſidium vocentur.

3. Conſidero hic autem tantum corpora rotunda, quorum centrum grauitatis in ipſorum axe eſt ſitum, ita vt quomodocunque rotentur, eorum centrum grauitatis a plano, ſuper quo incedunt, perpetuo eandem ſeruet diſtantiam. Quae conditio vt pro omni motu locum inueniat, corpus motum ſphaericam figuram habere oportet, in cuius centro ipſum grauitatis centrum ſit ſitum. Vtcunque autem hoc corpus moueatur, eius motum ſemper in binos motus reſoluere licet, alterum progreſſiuum, quo centrum grauitatis profertur, alterum vero rotatorium, quo corpus interea circa quempiam axem per centrum grauitatis tranſeuntem voluitur. Atque hic imprimis poſitio axis rotationis reſpectu motus progreſſiui eſt perpendenda, vt inde verus motus, quo planum a corpore teritur, cognoſci, frictioque inde oriunda aeſtimari poſſit.

Tab. III. Fig. 1. 4. Sit EF planum, ſuper quo corpus mouetur, ad quod certa quadam vi, quae ſit $=P$, apprimatur, quoniam

quoniam ab hac vi appreſſionis frictio praecipue pendet. Iam primum conſideretur motus corporis progreſſiuus, ſeu promotio centri grauitatis O, corpore exiſtente ſphaerico ABCD, in cuius centro O centrum grauitatis verſetur; eritque quouis momento directio huius motus plano EF, ſuper quo fit motus, parallela. Sit igitur praeſenti ſaltem temporis puncto recta OD huius motus directio, eiusque celeritas debita altitudini v, ſeu tanta, quantam graue, ex altitudine v delapſum acquirit. Sit hoc inſtanti A punctum contactus, et per centrum grauitatis O ſecundum directionem motus progreſſiui OD tranſire concipiatur planum AOD ad planum, ſuper quo fit motus, normale, quod planum hic quidem ipſo plano tabulae repraeſentetur.

5. Cum hoc plano conferatur iam motus corporis rotatorius, ſeu axis per centrum grauitatis O tranſiens, circa quem hoc ſaltem momento corpus rotatur. Atque hic caſus imprimis notatu dignus occurrit, ſi axis rotationis ad planum OAD fuerit normalis, quo quidem caſu euidens eſt, axem iſtum plano, ſuper quo fit motus, fore parallelum. Tum vero alii dantur caſus, quibus quidem axis rotationis plano EF eſt parallelus, ſed non ad planum AOD normalis, verum ad id vtcunque inclinatus. Denique habentur caſus, quibus axis rotationis tam ad planum AOD, quam ad planum, ſuper quo fit motus, poſitionem tenet obliquam, atque hae triplices axis rotationis poſitiones probe ſunt notandae, quia ad eos omnes plane motus, quoscunque mente concipere licet, reducuntur.

6. Inter hanc autem infinitam varietatem tres poſitiones primariae prae reliquis ſunt notatu dignae, quarum prima eſt eadem, quam modo primo loco expoſuimus, quando ſcilicet axis rotationis ad planum AOD eſt normalis, qui caſus in plerisque motibus mixtis locum habere ſolet. Secunda poſitio primaria eſt quando corpus circa axem OD cum directione motus progreſſiui conſpirantem rotatur, quo caſu vti in primo axis rotationis plano, ſuper quo fit motus, eſt parallelus. Tertia poſitio axis principalis conſtituatur, quando corpus circa axem CA ad planum EF perpendicularem rotatur. Quanquam autem hae tres poſitiones inter infinitas ſunt electae, tamen ſi frictionem pro iis tantum aſſignare potuerimus, nullum eſt dubium, quin inde pro qualibet axis poſitione obliqua veram frictionis quantitatem colligere valeamus. Ac prima quidem poſitio ſola iam tantum inueſtigationis campum complectitur, vt plurimum is praeſtitiſſe videatur, qui omnes caſus in eo contentos rite euoluerit.

7. Poſitioni ergo primae inhaerens, qua globum circa axem ad planum AOD normalem rotari aſſumo, primum obſeruo ad eam non ſolum globum, ſed quaevis corpora rotunda, quae a plano ABCD in duas partes ſimiles et aequales dirimantur, ſuumque grauitatis centrum in puncto O, quod ſimul eſt centrum figurae, habeant poſitum, eſſe accommodata, ita vt axis rotationis ſimul ſit eorum axis, circa cuius conuerſionem ſint nata. Talia ergo corpora praeter globum ſunt cylindri
Tab. III. recti, et quaeuis corpora ſphaeroidica, quae oriuntur, ſi
Fig. 2. figura quaecunque GCH diametro OC praedita, circa

axem

axem GH ad CO normalem reuoluatur, dummodo centrum grauitatis in puncto O ſit poſitum. In figura prima circulus ABCD repraeſentat huiusmodi corporis ſectionem per punctum O ad axem GH normaliter factam. Tab. III. Fig. 1.

8. Si iam progreſſiuum corporis motum ſecundum directionem OD fieri concipiamus, celeritate debita altitudini v, corpusque interea circa axem GOH ad planum AOD normalem gyretur, duo caſus principales conſiderandi occurrunt, prout corpus vel in plagam ABCD gyratur, vel in plagam contrariam ADCB. Ille motus cum progreſſiuo conſpirare cenſetur, hic vero eidem aduerſari; ſi enim corpus ſecundum directionem EF protruditur, quaſi ſponte ſua in plagam ABCD prouoluitur, dum motus contrarius non niſi a vi peculiari gignitur. Hinc motus progreſſiuus cum rotatione in plagam ABCD coniunctus prouolutio vocari ſolet, eaque eſt perfecta, ſi celeritas gyratoria puncti A circa axem O ipſi celeritati progreſſiuae Vv eſt aequalis. Tum enim ob vtrumque motum aequalem et contrarium punctum A puncto ſaltem temporis in quiete verſatur, et quia ſuper plano EF nullus attritus locum habet, nulla quoque frictio adeſſe exiſtimatur, ex quo hic caſus ſingularem attentionem meretur.

9. Quo igitur clarius appareat, quomodo huiusmodi diuerſas vtriusque motus combinationes tractari conueniat, ponamus praeſenti ſaltem temporis momento motum corporis gyratorium circa axem O ad planum AOD normalem et in plagam ABCD ita fieri, vt

 puncti

puncti A celeritas debita ſit altitudini u, quae quidem ad axem O quaſi quieſceret, refertur, vnde poſito circuli ABCD radio OA $= a$, prodit celeritas angularis $= \frac{\sqrt{u}}{a}$. Tum vero poſita motus progreſſiui ſecundum AF celeritate $= \sqrt{v}$, erit puncti A celeritas, qua ſuper plano EF ſecundum directionem AF incedit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, quae celeritate attritus corporis ſuper plano EF fieri concipiendus eſt. Vnde manifeſtum eſt, ſi fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, hanc celeritatem puncti A, ideoque et attritum euaneſcere, nullamque propterea frictionem locum habere, qui eſt caſus prouolutionis perfectae.

10. Sin autem ſit $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, punctum A, quo ſit corporis cum plano EF contactus, ſuper hoc plano incedet celeritate $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$, atque ob attritum frictio orietur, qua punctum A in directionem oppoſitam AE retrahetur. Hac ergo vi motus corporis progreſſiuus imminuetur, gyratorius autem augebitur: ac ſi motus gyratorius fuerit nullus, ſeu $\sqrt{u} = o$, ab eadem frictione etiam motus gyratorius in plagam ABCD generabitur. Sin autem $\sqrt{u}$ habeat valorem negatiuum, quo caſu corpus habet motum gyratorium in plagam contrariam ADCB, multo adhuc maior exiſtet attritus celeritate ſcilicet $\sqrt{v} + \sqrt{u}$, et a frictione inde oriunda vterque motus, tam progreſſiuus, quam gyratorius, debilitabitur. At ſi fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, gyratione in plagam ABCD tendente, motus puncti A ſuper plano EF in regionem AE erit directus, vnde frictio vim gignet in plagam AF directam, qua motus progreſſiuus accelerabitur, gyratorius vero retardabitur.

11. Quae-

11. Quaecunque iam ſubſiſtat ratio inter ambas celeritates $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$, vim frictionis determinari oportet, vt inde, quantum vterque motus perturbetur, definiri queat. Ac primo quidem, ſi motus gyratorius fuerit nullus, ſeu $\sqrt{u} = o$, caſus redit ad cognita frictionis phaenomena, quia corpus ſolo motu progreſſiuo ſuper plano EF prorepit. Conſtat ſcilicet, frictionis vim fore conſtantem, atque ad vim, qua corpus ad planum apprimitur, certam tenere rationem, quae neque a figura corporis, neque ab eius celeritate, pendeat. Preſſione nimirum corporis ad planum exiſtente $= P$, frictio erit $= \nu P$, denotante ν certam quampiam fractionem, haecque vis motui corporis ita eſt contraria, vt ſi corpus promoueatur ſecundum directionem OP, ſeu AF, id a frictione retrahatur in directione AE, quae per ipſum contactum A ſit tranſitura.

12. Neque tamen hoc caſu frictio plane nequaquam a corporis motu pendere dici poteſt; primum enim directio frictionis vtique per motus directionem determinatur, cum ipſi ſit contraria. Poſita porro corporis celeritate ſecundum directionem AF celeritate $= \sqrt{v}$, etſi frictio νP, cuius directio eſt AE, non a quantitate celeritatis $\sqrt{v}$ pendet, tamen ſignum eius maxime frictionem afficit, ita vt ſi valor $\sqrt{v}$ fiat negatiuus, etiam frictionis quantitas ſubito euadat negatiua, ipſa eius quantitate eadem manente, quia tum frictio in plagam contrariam AF motui quippe oppoſitam dirigitur. Hic ſaltus eo magis fit notabilis, quod, celeritate $\sqrt{v}$ euaneſcente, ipſa quoque frictio euaneſcat, etiamſi alias ſemper certum eumque conſtantem valo-

rem

rem obtineat: qui ſaltus tametſi legibus naturae aduerſari videtur, tamen alio loco eum ita explicaui, vt cum principiis mechanicis, ideoque etiam cum legibus naturae, conſiſtere poſſit. Non mediocrem ergo hinc illuſtrationem cum inſigni limitatione adipiſcitur regula vulgaris, qua nullus in mundo ſaltus ſtatuitur.

13. Interim tamen haec ipſa lex frictionis etiam caſu, quo nullus datur motus gyratorius, exceptioni cuipiam obnoxia videtur. Experimenta enim non obſcure innuere videntur, frictionem in ipſo motus initio aliquanto maiorem eſſe, quam in motus continuatione; ſiue maiorem vim requiri ad vim frictionis primam ſuperandam, quam ad eandem corporis celeritatem conſeruandam. Ita ſi vis primae motus productioni reluctans fuerit $=\nu P$, idem corpus, cum iam motum fuerit conſequutum, minori vi ob frictionem retardari videtur. Dolendum autem eſt, nondum eiusmodi experimenta eſſe inſtituta, ex quibus hoc diſcrimen frictionis, ſi quod datur, in prima motus productione eiusque continuatione accurate definiri queat, cum tamen haec quaeſtio, per experimenta debita ſolertia facta, non difficulter dirimi poſſet.

14. Hoc ergo caſu, quo $Vu=0$, expedito, quem quaſi cognitum aſſumamus, contemplemur alterum caſum praecipuum, quo $Vu=Vv$, et ob $Vv-Vu=0$ attritus plane euaneſcit. Hoc igitur caſu, qui prouolutio perfecta dici ſolet, nulla prorſus frictio adeſſe cenſetur, propterea quod attritui nullus relinquitur locus. Quaeſtio autem hic occurrit maximi momenti: an iſto caſu nulla prorſus adſit vis, quae motui

tui corporis opponatur? Experientia enim manifeſto indicat, etiamſi corpus prouolutione perfecta feratur, eius tamen motum ſenſim diminui, atque tandem prorſus ad quietem reduci, qui effectus nulli alii cauſae, niſi vi cuipiam motui contrariae, adſcribi poteſt. Cum igitur etiam prouolutio perfecta reſiſtentiae ſit obnoxia, et quidem tali, qua motus mox penitus extinguatur, vnde haec reſiſtentia oriatur, imprimis inueſtigari oportet; tametſi enim ea fortaſſe a frictione proprie ſic dicta ſit ſeiungenda, tamen nullum eſt dubium, quin etiam in aliis caſibus ſentiatur, motuique reluctetur.

15. Primum quidem videri poſſet, hanc motus in prouolutione perfecta imminutionem a ſola reſiſtentia aeris proficiſci, verum, praeter quam quod veriſimile ſit, huiusmodi retardationem etiam in vacuo locum eſſe habituram, dummodo calculum conſulamus, mox deprehendemus, aeris reſiſtentiam nimis eſſe paruam, quam vt ab ea motus tam cito conſumi poſſit. Deinde etiam certum eſt, quamuis a reſiſtentia aeris motus corporum imminuatur, tamen ab ea motum nunquam plane extingui poſſe. Cum enim reſiſtentia cum celeritate et quidem in eius ratione duplicata decreſcat, fieri omnino nequit, vt ab ea motus omnino deleatur: ex quo manifeſtum eſt, cauſam, cur motus in prouolutione perfecta diminuatur, et ad quietem redigatur, in aeris reſiſtentia poni non poſſe.

16. Cum igitur tota cauſa huius retardationis non in aeris reſiſtentia ſit quaerenda, etiamſi ei pars quaepiam recte tribuatur, nihil aliud relinquitur, niſi ipſa ſuperficies, ſuper qua fit inceſſus, vnde haec retardatio

tardatio oriri ſit ſtatuenda. Ac ſi ſuperficies ſit panno obducta, obſeruamus, globum eo citius motum ſuum amittere; quo pannus fuerit villoſior, vnde recte concludimus, villoſitatem ſuperficiei motui aduerſari, et cauſa quidem eſt manifeſta, quod corpus hos villos continuo deprimere debet, id quod ſine quadam motus iactura fieri nequit. Reagunt ſcilicet villi in globum, vti in α cernere licet, cuius vis directio, etſi per centrum globi O ſecundum αO tranſit, tamen eo magis motui reſiſtit, quo maior fuerit angulus AOα, hoc eſt, quo profundius globus his villis immergitur. Obiici quidem poſſet, globum ex altera parte poſteriori pari vi vrgeri, quod vtique ſi corpus quieſceret, eſſet verum, ſed dum corpus modica celeritate verſus F promouetur, citius villos poſteriores deſerit, quam illi ſe erigere et in corpus cedens preſſionem exerere queant; vnde dubitare non licet, quin a parte antica reſiſtentia quaepiam a villoſitate ſuperficiei oriatur.

17. Quaecunque autem fuerit haec reſiſtentia, ea non ſolum ad hunc caſum, quo $\mathcal{V}v - \mathcal{V}u = 0$, eſt adſtricta, ſed ad omnes plane caſus prouolutionis ex motu progreſſiuo et gyratorio vtcunque mixtae aeque patet, propterea quod a ſolo motu progreſſiuo, quatenus a depreſſione villorum efficitur, prouenit; quam ob rem in iſtam reſiſtentiam, quae a frictione probe eſt diſtinguenda, accuratius inquiri conueniet. Neque vero ea tantum a villoſitate ſuperficiei oriri eſt cenſenda, ſed cuiuscunque etiam fuerit naturae ſuperficies, ob preſſionem corporis quaepiam portio ei quaſi immergitur, ſupremaeque ſuperficiei partes aliquantillum comprimun-

primuntur. Ab hac compreſſione ſimilis redundat reactio in corpus motum atque a villoſitate, hincque motui reſiſtentia opponitur, quae pro ratione tam ſuperficiei, quam preſſionis, vtcunque variare, nunquam autem plane in nihilum abire poteſt. Atque haec vera videtur eſſe cauſa, cur motus etiam volutorius tandem penitus extinguatur, quem effectum reſiſtentiae aeris tribuere non licet.

18. Promoueatur ergo corpus ſuper plano E F villis vtcunque obſito, cui ad profunditatem $\alpha\beta$ immergatur, ita vt, dum progreditur continuo, villos ad $\beta\gamma$ erectos in ſpatium $A\alpha\beta$ comprimat, cui compreſſioni cum villi reluctentur, eam efficient reſiſtentiam, quam hic inueſtigare animus eſt; ſiue autem ea a veris villis oriatur, ſiue a quapiam plani mollitie, qua impreſſionem quampiam patitur, perinde eſt. Sit igitur naturalis villorum erectio $\alpha\beta = f$, quae ſimul profunditatem impreſſionis in vero contactu A factae indicat; et in quolibet puncto M, dum progrediendo villum PM vlterius comprimit, exiſtet quaedam vis reactionis in corporis ſuperficiem normaliter nitens, cuius propterea directio erit MO per centrum grauitatis O tranſiens, et cuius quantitas aeſtimari poteſt proportionalis compreſſioni iam factae, ſeu differentiae $\alpha\beta - PM$. Poſita ergo $PM = y$, magnitudo huius vis in directione MON agentis erit interuallo $f-y$ proportionalis. Tab. III. Fig. 3.

19. Ponamus rigorem villorum eſſe tantum, vt a baſi $= cc$ vi, ſeu pondere, $= K$ appreſſa per ſpatium $= k$ comprimantur, ſicque compreſſionis effectus cck vi preſ-

ſionis K tribui debeat. Primum autem corpus, quod mouetur, ſit diſcus, ſeu cylindrus, radii $OA = a$, et craſſitiei $= b$, et, poſito $AP = x$, compreſſio villorum ſpatiolo $Pp = dx$ reſpondentium valet $(f-y)bdx$, quae ergo requirit vim $= \frac{K}{cck}(f-y)bdx$, cuius directio eſt MON. Spatiolum enim PM prae radio diſci $OA = a$ tam paruum contemplor, vt angulus AOM ſit minimus, et ratio elementorum Pp ad Mm ad aequalitatem accedere cenſeri poſſit. Hinc erit $xx = 2ay$, et $dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay}}$, vnde tota vis ſurſum vrgens portionem AM erit $\frac{Kb\sqrt{2ay}}{3cck}(3f-y)$, et vis tota eleuans, a ſpatio AB nata, poſito $y = f$, erit $= \frac{2Kbf\sqrt{2af}}{3cck}$.

20. Huic ergo vi aequalis eſt tota vis, qua corpus ad planum apprimitur, quae cum ſupra poſita ſit $= P$, habebimus hanc aequationem $\frac{2Kbf\sqrt{2af}}{3cck} = P$; vnde colligimus:

$$f\sqrt{f} = \frac{3Pcck}{2Kb\sqrt{2a}} \text{ et } f = \sqrt[3]{\frac{9PPc^4kk}{8KKabb}}$$

Hic ſcilicet eos tantum villos in computum duco, qui ante corpus ſunt ſiti, et quos, dum progreditur, comprimere cogitur, eos vero, qui pone corpus iam ſunt compreſſi, vel elateris expertes aſſumo, vel tales, vt ſua reſtitutione motum corporis non aſſequantur, neque idcirco in illud agere valeant. Dum igitur corpus quieſcit, quia tum etiam a parte poſteriori ſuſtinetur, minorem faciet impreſſionem, quatenus ea a preſſionis duratione non augetur. Dubitari enim nequit, quin continuata preſſione, ſaltem per aliquod tempus, corpus aliquanto profundius immergatur; at ob hanc ipſam

cauſam

cauſam in motu actio villorum poſt corpus recte negligi poteſt.

21. Etſi autem in hoc calculo angulus AOM minimus eſt poſitus, tamen eius rationem haberi oportet, ſi vim motui reſiſtentem inueſtigare velimus. Cum enim huius vis directio MON per centrum grauitatis O tranſeat, multiplicetur ea per coſinum anguli NOB, ſeu ſinum anguli AOM, qui eſt $= \frac{x}{a}$, et vis reſultans ſecundum directionem OB motui contrariam erit $= \frac{K}{cck}(f-y)\frac{bxdx}{a}$, ideoque ob $xdx = ady$ erit ea $= \frac{Kb}{cck}(f-y)dy$, cuius integrale eſt $= \frac{Kb}{cck}(fy - \frac{1}{2}yy)$, vnde tota vis motui repugnans, ſumendo $y = f$, prodit $= \frac{Kbff}{2cck}$. Cum igitur ſit $ff = \frac{3Pc^2k}{4Kb}\sqrt[3]{\frac{3Pcck}{Kaab}}$, erit iſta tota vis $= \frac{3}{8}P\sqrt[3]{\frac{3Pcck}{Kaab}}$, vbi pro eadem ſuperficie quantitas $\frac{cck}{K}$ eſt conſtans: ergo ſi corporis grauitas ſpecifica exprimatur per m, ob P vt $maab$, erit vis iſtius reſiſtentiae vt $P\sqrt[3]{m}$, ita vt grauitate ſpecifica eadem manente reſiſtentia ſit ponderi vel volumini corporis proportionalis.

22. Sin autem corpus ſit ſphaericum, conſiderari debet tota eius impreſſio a parte anteriori facta, quae erit ſemicirculus $\delta\alpha\delta$ centrum habens in A, cuius radius medius $A\alpha$ directionem motus repraeſentabit. In perimetro ergo huius circuli altitudo villorum ponatur vt ante $= f$; in diſtantia autem a centro $AP = AS = x$, ſit ea $= y$, eritque $xx = 2ay$, denotante a radium corporis ſphaerici. Poſito angulo quocunque $\alpha A\mu = \Phi$, erit arcus $PS = x\Phi$, eiusque differentiale $ET = xd\Phi$, vnde arcola $Psps = xdxd\Phi$, in qua compreſſio villorum tota valebit $(f-y)xdxd\Phi$. Hinc ergo cor- Tab. III. Fig. 4.

 pus

pus ſurſum vrgebitur vi $\frac{K}{cck}(f-y)x\,dx\,d\Phi = \frac{K}{cck}(f-y)a\,dy\,d\Phi$ cuius integrale pro ſpatio PAS eſt $= \frac{K}{cck}(fy-\frac{1}{2}yy)a\,d\Phi$, ideoque pro ſpatio $\alpha A \mu = \frac{Kaff\,d\Phi}{2cck}$: vnde poſita diametri ad peripheriam ratione $= 1:\pi$, vis ſurſum pellens tota reperitur $= \frac{\pi Kaff}{2cck}$, vi preſſionis P aequanda, ex quo fit $ff = \frac{2Pcck}{\pi Ka}$, vbi f denotat profunditatem, ad quam globus immergitur.

23. Ex vi autem $\frac{K}{cck}(f-y)a\,dy\,d\Phi$, ſpatiolo $STst$ reſpondente, reſultat vis ſecundum directionem plani SA vrgens, ſi ea per $\frac{x}{a} = \surd\frac{2y}{a}$ multiplicetur, ita vt vis iſta ſit $= \frac{K\,d\Phi\surd 2a}{cck}(f-y)dy\surd y$, quae per coſ. Φ multiplicata dabit vim motui contrariam, cuius ſcilicet directio per centrum grauitatis globi tranſit, vnde iſta vis ſit $= \frac{K\,d\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi\surd 2a}{cck}(f-y)dy\surd y$, quae integrata, et poſito $y=f$, reperitur: $\frac{4Kff\,d\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi\surd 2af}{15cck}$. Ac ſi altera integratio pro angulo Φ inſtituatur, fit reſiſtentia ex ſpatio $\alpha A \mu$ orta $= \frac{4Kff\,\mathrm{ſin.}\Phi\surd 2af}{15cck}$, cuius duplum poſito $\Phi = 90°$ praebebit totam reſiſtentiam $= \frac{8Kff\surd 2af}{15cck} = \frac{16P}{15\pi}\surd\frac{2f}{a}$, ob $ff = \frac{2Pcck}{\pi Ka}$; indidem igitur iſta reſiſtentia erit $= \frac{16P}{15\pi}\sqrt[4]{\frac{8Pck}{\pi Ka^3}}$, vnde pro eodem plano ea erit, vt $P\sqrt[4]{\frac{P}{a^3}}$. Huius vero vis directio motui eſt contraria, et per globi centrum tranſit.

24. Hanc itaque reſiſtentiam, quae a frictione probe eſt diſtinguenda, ſentiunt omnia corpora, ſiue ſolo motu progreſſiuo, ſiue inſuper cum rotatorio, ſuper plano quocunque ferantur, neque ea, vt vidimus, a motu rotatorio

torio pendet, neque ab ipſa velocitate motus progreſſi-vi; quam ob cauſam ea etiam vulgo cum frictione confuſa videtur. Maxime tamen a frictione proprie ſic dicta diſcrepat, propterea quod frictionis directio per ipſum contactum tranſit, huius autem reſiſtentiae directio per corporis centrum grauitatis, vnde haec vis motum rotatorium aliter non afficit, niſi quatenus motu progreſſiuo mutato etiam in rotatorium neceſſario mutatio redundat. Deinde vero frictio plurimum a ratione inter motum rotatorium et progreſſiuum pendet, quemadmodum vidimus, eam inſignem exiſtere, ſi $\sqrt{u} = 0$, penitus autem euaneſcere, ſi $\sqrt{u} - \sqrt{u} = 0$, dum altera reſiſtentia ab hac diuerſitate neutiquam afficitur, ſed pro quacunque relatione inter ambas celeritates $\sqrt{v}$ et u eandem quantitatem conſtanter retinet.

25. Stabilita ergo hac noua reſiſtentia ab impreſſione mutua corporis et plani orta, pergamus ad frictionem inueſtigandam pro caſibus, vbi neque $\sqrt{u} = 0$, neque $\sqrt{v} - \sqrt{u} = 0$, quorum illo vidimus frictionem tantam eſſe, quanta vulgo experimentis aeſtimari ſolet, ſiquidem ſimul illius reſiſtentiae ratio habeatur, hoc vero omnino euaneſcere. Quaeſtio igitur hic ſtatim ſe offert, vtrum frictio, quando eſt $\sqrt{u} < \sqrt{v}$, minor ſit quam caſu $\sqrt{u} = 0$, an vero ei ſit aequalis? Non deſunt rationes, quae vtrumque ſuadere videntur; nam cum accedente motu rotatorio in plagam ABCD attritus minuatur, atque tandem euaneſcat, cum fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, attritum minorem etiam minor frictio ſequi debere videtur; quoniam attritu euaneſcente frictio adeo in nihilum abire eſt inuenta. Deinde etiam nullum Tab. III. Fig. 1.

lum eſt dubium, quin frictio, ſi celeritas rotationis $V u$ excedat celeritatem progreſſiuam $V v$, fiat negatiua, ſeu corpus in plagam contrariam rapiat.

26. Super hac quaeſtione ingens cernitur diſſenſio in Comment. Acad. Petrop Tomo XIII, vbi Celeb. Vir *Daniel Bernoulli* et ego idem argumentum de deſcenſu corporis rotundi ſuper plano inclinato pertractauimus. Aſſumſerat autem Vir Celeb. huiusmodi corpus ſuper plano inclinato deſcendens ſemper eandem pati frictionem, quamcunque rationem tenuerit motus progreſſiuus ad motum rotatorium, atque adeo in prouolutione perfecta, vbi ratio illa fit aequalitatis, eandem manere frictionis quantitatem, atque hinc concluſit, quamdiu plani eleuatio non certum quemdam gradum excedat, corpus rotundum prouolutione perfecta eſſe deſcenſurum. Quin etiam Celeb. *Krafft* experimentis inſtitutis euentum huic effato eximie reſpondere deprehendit. Ego vero contra, ſecundum ea, quae hic expoſui, aſſumſeram, in prouolutione perfecta nullam prorſus dari frictionem, eamque fore eo minorem, quo propius motus mixtus ad prouolutionem perfectam acceſſerit; vnde ſequebatur, nullo plane caſu globum ſuper plano inclinato prouolutione perfecta deſcendere poſſe, cui concluſioni experientiam contrariam agnoſcere cogor.

27. Quamuis autem Celeb. *Bernouilli* Theoria experientiae ſit conſentanea, tamen non patet, quomodo eius hypotheſis, quod etiam in prouolutione perfecta frictio tanta ſit, quanta in ſolo motu progreſſiuo eſſe ſolet, cum veritate conciliari poſſit. Contemplemur enim caſum, quo globus ſuper plano horizontali per-

perfecte prouoluitur, atque nullum eſt dubium, ſi mentem, tam ab aëris reſiſtentia, quam ab ea, quae ante eſt definita, abſtrahamus, quin corpus ſine vlla diminutione motum ſuum ſit proſequuturum. Vbi autem nulla motus diminutio deprehenditur, ibi certe nulla frictio ſtatui poteſt; ex quo etiam in deſcenſu ſuper plano inclinato, quamdiu corpus prouolutione perfecta fertur, nulla frictio admitti poſſe videtur, contra principium, cui Theoria *Bernoulliana* innitur. Verum ſi hoc caſu, vti ego feci, frictio tollitur, tum prouolutioni perfectae nullus plane locus relinquitur, etiamſi plani inclinati eleuatio quam minima ſtatuatur; quod tamen experientiae aduerſari certum eſt.

28. Quo huius nodi ſolutionem reperiamus, hos duos caſus prouolutionis perfectae ſuper plano horizontali et inclinato accuratius inter ſe conferamus; et cum ſuper plano horizontali nullam frictionem admittere liceat, ſuper inclinato autem per experimenta frictionis exiſtentia euincatur, manifeſtum eſt, hunc caſum ad illum reduci, ſi grauitatis ſollicitationem, qua corpus ſecundum directionem plani acceleratur, euaneſcere concipiamus. Ex quo hanc concluſionem adipiſcimur; ſi in prouolutione perfecta ſuper plano inclinato nulla adeſſet vis motum accelerans, tum etiam nullam frictionem eſſe adfuturam, contra vero cum vi motum accelerante neceſſario frictionem fore coniunctam. Hic igitur fontem erroris, quo meum ratiocinium premebatur, detego, qui in hoc conſiſtit, quod frictionem ex ſolo ſtatu motus, quo corpus actu cietur, definiri debere putaueram, cum tamen potius ex viribus accele-

ratricibus determinari debeat: atque hinc frictionis effectus maxime a reſiſtentia fluidorum aliisque reſiſtentiae generibus diſcrepat, quod hae reſiſtentiae vnice a ſtatu motus corporum pendeant.

29. Quod autem frictio a viribus ſollicitantibus potiſſimum pendeat, ex ipſo ſtatu quietis luculenter perſpicitur. Si enim corpus plano horizontali incumbat, nullisque viribus ad motum ſollicitetur, nullus quoque frictionis cernitur effectus; ſin autem hoc corpus protrahatur a vi, quae frictionem ſuperare non valeat, corpus etiam nunc quieſcet; vnde hoc caſu frictio exerit vim, vi protrahenti aequalem et contrariam, vnde patet, vim a frictione exertam per ſe non eſſe determinatam, ſed demum per vim protrahentem determinari, ſiquidem ea fuerit minor, quam tota frictio, quae ſe motui opponit; ex quo his caſibus pars tantum frictionis effectum praeſtare eſt cenſenda. At ſi vis protrahens frictioni vel fuerit aequalis, vel ea maior, tota frictio ſe ſe eius actioni opponit, et illo quidem caſu corpus etiam nunc quieſcet, hoc vero promouebitur exceſſu vis ſollicitantis ſupra frictionem totam. Quemadmodum igitur corpus frictione impeditum, a ſtatu quietis ad motum concitetur a viribus quibuscunque ſollicitantibus, ante accuratius erit inueſtigandum, quam ad eius effectum in motu explorandum progrediamur.

30. Verum ſi corpus plano incumbens a viribus quibuscunque ſollicitetur, quatuor caſus exiſtere poſſunt:

I. Vel enim primo corpus in quiete omnino perſeuerat, dum vires ſollicitantes neque corpori motum imprimere, neque frictionem ſuperare valent.

II. Vel

II. Vel ſecundo corpus quidem ad motum incitabitur, ſed ita vt punctum contactus, vel eius extremitas, primo ſaltem inſtanti immota maneat, ſicque nullus oriatur attritus; hoc euenit ſcilicet ſi vires frictioni ſuperandae ſunt impares.

III. Vel tertio corpus ſuper plano rependo progredietur, ſine vllo motu gyratorio.

IV. Vel quarto denique corpus cum rependo, tum gyrando, ſimul promouebitur.

Corpore ergo quocunque propoſito, quod plano incumbat, et a viribus quibuscunque ſollicitetur, characteres primum inueſtigemus, ex quibus dignoſci poſſit, quisnam horum quatuor caſuum locum ſit habiturus.

31. Vt igitur hos characteres inueniamus, conſideremus corpus quodcunque baſi ſua GH plano EF incumbens, cuius maſſa ſit $= M$, centrum grauitatis O, et momentum inertiae reſpectu axis per O transeuntis, circa quem fiat motus, ſi quis detur, ſit $= Mkk$. Hic ſcilicet axis concipiatur ad planum tabulae normalis, dum tabula refert ſectionem ad planum EF normalem et per centrum grauitatis O factam. Sollicitetur hoc corpus a viribus quibuscunque, quae primum omnes directionibus ſibi parallelis in centro grauitatis O applicatae concipiantur, eaeque reſoluantur in duas vires ſecundum directiones OA et OD, illam ad planum EF normalem, quae ſit $= P$, hanc vero plano EF parallelam, quae ſit $= Q$. Tum ex iisdem viribus colligatur momentum reſpectu axis O, quod ſit $KL.OK = Vb$, quod conetur corpus in plagam Tab. III. Fig. 5.

 BCD

BCD gyrari; hac quippe duplici conſideratione totus virium ſollicitantium effectus exhaurietur.

32. Videamus iam, ſub quibus conditionibus corpori eiusmodi motus inducatur, qui cum nullo attritu fuerit coniunctus; id quod eueniet, ſi baſis HG extremitas G in quiete permaneat, corpusque gyrando circa G motum incipiat. Quoniam igitur iſta baſis extremitas G in cenſum venit, iuncta recta GO vocetur $= g$, atque angulus HGO $= \theta$, vnde fiet recta OA $= g \sin \theta$ et AG $= g \cos \theta$. Nunc cum frictio agat ſecundum directionem GH, videamus quanta vi, quae ſit $= Z$ corpus ſecundum directionem GH vrgeri debeat, vt punctum G immotum conſeruetur; quod ſi enim haec vis Z reperiatur minor frictione tota, vel ſaltem ei aequalis, ob frictionem hic ipſe motus, quem fingimus, efficietur, motusque corpori gyratorius circa punctum G immotum imprimetur; ſin autem vis iſta Z prodeat maior frictione tota, perſpicuum eſt, a ſola frictione punctum G non poſſe in quiete retineri; ex quo re vera abripietur, motusque ad caſum tertium relatus naſcetur: hisque rationibus characteres quaeſiti innituntur.

33. Quia ergo ſupponimus, motum primo inſtanti fieri circa punctum G, centrum grauitatis O feretur per arculum Oo centro G radio GO $= g$ deſcriptum, interea vero corpus circa axem O per ſimilem angulum in plagam BCD gyrabitur, ita vt celeritas gyratoria puncti G circa O ipſi celeritati puncti O per Oo aequalis ſit futura. Dum autem hic motus producitur, totus niſus corporis in planum EF in

puncto

punĉto G colligetur; vnde ad ſuperiores vires corpus ſollicitantes inſuper vis accedit, corpus in punĉto G a plano EF perpendiculariter ſurſum ſecundum GI vrgens, quae vis aequalis eſt preſſioni corporis contra planum dum motus exoritur. Quae vis quia etiam nunc eſt incognita, tantisper indicetur littera Y, ita vt duas habeamus vires incognitas, Z ſecundum GH et Y ſecundum GI, quae ita ſunt determinandae, vt punĉtum G in quiete conſeruetur.

34. Viribus autem his cum datis, quaſi eſſent cognitae aſſumtae, ex iis primum acceleratio centri grauitatis O definiatur, quod fiet, has vires ſecundum ſuas directiones centro grauitatis applicando. Quare a viribus datis centrum grauitatis O, in quo tota corporis maſſa M collecta eſt concipienda, ſollicitabitur ſecundum OD vi $=Q$, et ſecundum OA vi $=P$, a viribus autem incognitis ſecundum OB vi $=Z$ et ſecundum OC vi $=Y$. Hinc maſſa M in O collecta ab vtrisque ſollicitabitur ſecundum directionem OD vi $=Q-Z$, et ſecundum OC vi $=Y-P$; inde ergo naſcetur acceleratio $=\frac{Q-Z}{M}$, hinc vero $=\frac{Y-P}{M}$. Quam ob rem ſi acceleratio ſecundum ipſam motus directionem Oo vocetur $=\mathfrak{v}$, per reſolutionem ob angulum COo $=HGO=\theta$ obtinebitur acceleratio ſecundum $Ot=\mathfrak{v}$ ſin. θ, et ſecundum $Ov=\mathfrak{v}$ coſ. θ, ex quo obtinebimus has duas aequationes:

$$\mathfrak{v}\,\text{ſin.}\,\theta=\frac{Q-Z}{M} \quad \text{et} \quad \mathfrak{v}\,\text{coſ}\,\theta=\frac{Y-P}{M}$$

vnde fit $(Q-Z)\,\text{coſ.}\,\theta=(Y-P)\,\text{ſin.}\,\theta$, hincque

$$Y=P+(Q-Z)\frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta}.$$

 35. Iam

35. Iam ad accelerationem motus rotatorii corporis circa axem O obtinendam in plagam BCD, quam in diſtantia OG $= g$ per hypotheſin aequalem eſſe oportet v, momenta virium ſollicitantium ſunt colligenda. Atque ex datis quidem viribus naſci ponitur momentum $= Vb$ in plagam BCD tendens: tum vero ex vi $GH = Z$ ob $OA = g\,\text{ſin.}\,\theta$ in eandem plagam oritur momentum $= Zg\,\text{ſin.}\,\theta$, ex vi $GI = Y$ vero in plagam contrariam ob $OI = g\,\text{coſ.}\,\theta$ naſcitur momentum $= Yg\,\text{coſ.}\,\theta$, ita vt momentum totale motum gyratorium producens ſit $= \gamma b + Zg\,\text{ſin.}\,\theta - Yg\,\text{coſ.}\,\theta$, quod per momentum inertiae Mkk diuiſum, et per diſtantiam $OG = g$ multiplicatum ſuppeditabit accelerationem motus rotatorii in G, quae cum per hypotheſin ſit $= v$, habebimus hanc aequationem

$$v = \frac{Vgb + gg(Z\,\text{ſin.}\,\theta - Y\,\text{coſ.}\,\theta)}{Mkk}$$

36. Cum igitur ſit $v\,\text{ſin}\,\theta = \frac{Q-Z}{M}$ erit:

$$\frac{Q-Z}{M} = \frac{Vgb\,\text{ſin.}\,\theta + gg(Z\,\text{ſin.}\,\theta - Y\,\text{coſ.}\,\theta)\,\text{ſin.}\,\theta}{Mkk}$$

ſiue:

$$kk(Q-Z) = Vgb\,\text{ſin.}\,\theta + ggZ\,\text{ſin.}\,\theta^2 - ggY\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta$$

Eſt vero $Y\,\text{ſin.}\,\theta = P\,\text{ſin.}\,\theta + (Q-Z)\,\text{coſ.}\,\theta$ quo valore ſubſtituto habebimus:

$$kk(Q-Z) = Vgb\,\text{ſin.}\,\theta + ggZ\,\text{ſin.}\,\theta^2 - ggP\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta - gg(Q-Z)\,\text{coſ.}\,\theta^2$$

ſeu:

$$kkQ = kkZ + Vgb\,\text{ſin.}\,\theta + ggZ - ggP\,\text{ſin}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta - ggQ\,\text{coſ}\,\theta^2$$

vnde

vnde colligitur:

$$Z = \frac{ggP\sin.\theta\cos.\theta + (kk + gg\cos.\theta^2)Q - Vgb\sin.\theta}{kk + gg}$$

hincque:

$$Q - Z = \frac{ggQ\sin.\theta^2 - ggP\sin.\theta\cos.\theta + Vgb\sin\theta}{kk + gg}$$

$$\text{et } Y = \frac{ggQ\sin.\theta\cos.\theta + (kk + gg\sin.\theta^2)P + Vgb\cos\theta}{kk + gg}$$

37. Inuenta iam vi Z, quae ad punctum G immotum conſeruans dum requiritur, quoniam frictio hanc vim ſuppeditat, neceſſe eſt, vt vis Z totam frictionem non ſuperet. Frictio autem pendet a vi, qua corpus ad planum apprimitur, ad eamque certam quandam tenet rationem, quae ſit vt 1 ad ν. Cum igitur, dum corpus circa extremitatem baſis G gyrari incipit, tota preſſio in G colligatur, et aequalis ſit inuenta Y, tota frictio erit $= \frac{1}{\nu}Y$. Quam ob rem vt corpus circa extremitatem baſis G immotam gyretur, et quidem in plagam BCD, neceſſe eſt, primo, vt ſit $Z < \frac{1}{\nu}Y$, hoc eſt, vt ſit:

$$Pgg\sin.\theta\cos.\theta + Q(kk + gg\cos.\theta^2) - Vgb\sin.\theta < \frac{1}{\nu}(Qgg\sin.\theta\cos.\theta + P(kk + gg\sin.\theta^2) + Vgb\cos\theta)$$

tum vero etiam neceſſe eſt, vt acceleratio ϑ habeat valorem affirmatiuum, vnde cum ſit $\vartheta = \frac{Q-Z}{M\sin.\theta}$, ſiue

$$\vartheta = \frac{g(Qg\sin.\theta - Pg\cos.\theta + Vb)}{M(kk + gg)}$$

oportet, vt ſit praeterea $Qg\sin.\theta + Vb > Pg\cos.\theta$.

38. Hinc

38. Hinc igitur pro motu caſus ſecundi hanc nanciſcimur concluſionem:

ſi fuerit

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{ſin.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{coſ.}\,\theta)$$

atque inſuper $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$ tum corpus circa extremitatem baſis G immotam in plagam BCD moueri incipere, foreque accelerationem huius motus gyratorii pro diſtantia g,

$$\upsilon = \frac{g(Qg\,\text{ſin.}\,\theta - Pg\,\text{coſ.}\,\theta + Vb)}{M(kk + gg)}$$

Si eueniat vt ſit $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb < Pg\,\text{coſ.}\,\theta$, minime concludere licet, motum gyratorium fieri in plagam oppoſitam circa G; tali enim motui pars reliqua baſis GH plano innitens ſeſe opponit. Namque motus contrarius fuerit circa alteram baſis extremitatem H, pro quo caſu peculiari calculo reſpondentes vires Z et Y, quarum haec iam in H applicata eſſet concipienda, definiri oporteret, ſimili quidem modo quo hic ſumus vſi.

39. Si ergo ſit $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb = Pg\,\text{coſ}\,\theta$ nullus dabitur motus gyratorius; vt autem ſimul punctum G quieſcat, requiri, vt ſit $Q < \frac{1}{\nu}P$, hocque ergo caſu corpus plane quieſcet. At ſi ſit $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$, ſeu acceleratio υ poſitiuum obtineat valorem, tum corpus motum gyratorium circa G adipiſcetur; vt autem punctum G quieſcat, oportet ſit valore ipſius υ introducto:

$$Q < \tfrac{1}{\nu}P + M\upsilon(\text{ſin.}\,\theta + \tfrac{1}{\nu}\text{coſ.}\,\theta)$$

Quando

Quando ergo $Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vh > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$, corpus circa G rotari incipiet, punctumque G quieſcet, ſi non ſolum fuerit $Q < \frac{1}{\nu}P$, ſed etiam ſi ſit vel $Q = \frac{1}{\nu}P$, vel $Q > \frac{1}{\nu}P$, dummodo ſit

$$Q < \frac{1}{\nu}P + Mu(\text{ſin.}\,\theta + \tfrac{1}{\nu}\text{coſ.}\,\theta)$$

exiſtente $u = \frac{g(Qg\,\text{ſin.}\,\theta - Pg\,\text{coſ.}\,\theta + Vh)}{M(gg + kk)}$.

At ſi fuerit $Q > \frac{1}{\nu}P + Mu(\text{ſin.}\,\theta + \frac{1}{\nu}\text{coſ}\,\theta)$, durante motu gyratorio punctum G quoque verſus F abripietur, neque enim frictio ei retinendo par erit.

40. Pro quadruplici ergo corporis ſtatu criteria ſumus adepti, quibus ſtatus corporis vel ad caſum ſecundum, vel ad quartum pertinebit: ſcilicet pro caſu ſecundo hae requiruntur conditiones, vt ſit

$$Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vh > Pg\,\text{coſ}\,\theta, \quad \text{et}$$

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgh\,\text{ſin.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta$$
$$+ P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgh\,\text{coſ.}\,\theta)$$

Hoc nempe caſu corpus circa baſis extremitatem G in plagam BCD gyrari incipiet, ipſa baſis extremitate G immota manente.

Caſus autem quartus locum habebit ſub his conditionibus, ſi fuerit

$$Qg\,\text{ſin.}\,\theta + Vh > Pg\,\text{coſ}\,\theta, \quad \text{et}$$

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgh\,\text{ſin.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta$$
$$+ P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgh\,\text{coſ}\,\theta)$$

Hoc videlicet caſu corpus quoque circa baſis extremitatem G in plagam BCD gyrari incipiet; ſed haec

ipſa baſis extremitas verſus F promouebitur, et cum attritu ſuper plano EF progredietur.

41. Hoc ergo caſu quarto, corpus totam frictionem patietur, quae cum ſit $= \frac{1}{\nu} Y$, erit $Z = \frac{1}{\nu} Y$; atque etiam accelerationem puncti G ſuper plano EF aſſignare poterimus. Si enim ponamus hanc accelerationem $= \omega$, manente acceleratione motus gyratorii circa centrum grauitatis $O = \upsilon$, erit pro motu centri grauitatis O acceleratio ſecundum $OD = \upsilon \operatorname{ſin.} \theta + \omega$, et acceleratio ſecundum $OC = \upsilon \operatorname{coſ.} \theta$, vnde habemus ob $Z = \frac{1}{\nu} Y$ has aequationes:

$$\upsilon \operatorname{ſin.} \theta + \omega = \frac{Q - \frac{1}{\nu} Y}{M} : \upsilon \operatorname{coſ.} \theta = \frac{Y - P}{M}$$

$$\text{et} \quad \upsilon = \frac{Vgb + \frac{1}{\nu} Ygg \operatorname{ſin.} \theta - Ygg \operatorname{coſ.} \theta}{Mkk} = \frac{Y - P}{M \operatorname{coſ.} \theta}$$

hinc ergo fiet:

$$Vgb \operatorname{coſ} \theta + \frac{1}{\nu} Ygg \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \theta - Ygg \operatorname{coſ.} \theta^2 = Ykk - Pkk$$

$$\text{ideoque } Y = \frac{Pkk + Vgb \operatorname{coſ.} \theta}{kk + gg \operatorname{coſ.} \theta^2 - \frac{1}{\nu} gg \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \theta}$$

42. Ex his colligimus:

$$Y - P = \frac{Vgb \operatorname{coſ.} \theta - Pgg \operatorname{coſ} \theta (\operatorname{coſ.} \theta - \frac{1}{\nu} \operatorname{ſin.} \theta)}{kk + gg \operatorname{coſ.} \theta^2 - \frac{1}{\nu} gg \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \theta}$$

vnde concluditur fore:

$$\upsilon = \frac{g(Vb - Pg(\operatorname{coſ} \theta - \frac{1}{\nu} \operatorname{ſin} \theta))}{M(kk + gg \operatorname{coſ.} \theta (\operatorname{coſ.} \theta - \frac{1}{\nu} \operatorname{ſin.} \theta))}$$

quae eſt acceleratio motus rotatorii; ex cuius valore eoque, qui pro Y eſt inuentus, obtinebimus accelerationem progreſſiui motus puncti G

$$\omega = \frac{Q}{M} \frac{\frac{1}{2}Pkk - \frac{1}{2}Vgb\,\mathrm{cof.}\theta - Vgb\,\mathrm{fin.}\theta + Pgg\,\mathrm{fin.}\theta(\mathrm{cof.}\theta - \frac{1}{2}\mathrm{fin.}\theta)}{M(kk + gg\,\mathrm{cof.}\theta(\mathrm{cof.}\theta - \frac{1}{2}\mathrm{fin.}\theta)}$$

ſiue:

$$= \frac{Q(kk + gg\,\mathrm{cof}\,\theta^2 - \frac{1}{2}gg\,\mathrm{fin.}\theta\,\mathrm{cof.}\theta) - P(\frac{1}{2}kk + \frac{1}{2}gg\,\mathrm{fin.}\theta^2 - gg\,\mathrm{fin.}\theta\,\mathrm{cof.}\theta) - Vgb(\mathrm{fin}\,\theta + \frac{1}{2}\mathrm{cof.}\theta)}{M(kk + gg\,\mathrm{cof.}\theta^2 - \frac{1}{2}gg\,\mathrm{fin.}\theta.\mathrm{cof.}\theta)}$$

cuius numerator eſt vtique affirmatiuus, ſi fuerit, vt ante notaueramus,

$$Pgg\,\mathrm{fin.}\theta\,\mathrm{cof.}\theta + Q(kk + gg\,\mathrm{cof.}\theta^2) - Vgb\,\mathrm{fin}\,\theta > \tfrac{1}{2}(Qgg\,\mathrm{fin.}\theta\,\mathrm{cof.}\theta + P(kk + gg\,\mathrm{fin.}\theta^2) + Vgb\,\mathrm{cof.}\theta)$$

43. Hinc iam rectius conditiones agnoſcimus, ſub quibus quartus caſus in motu corporis locum habebit: hae enim conditiones ſunt

$$\tfrac{1}{2}Pg\,\mathrm{fin.}\,\theta + Vb > Pg\,\mathrm{cof.}\theta \quad \text{et}$$

$$Pgg\,\mathrm{fin.}\theta\,\mathrm{cof.}\theta + Q(kk + gg\,\mathrm{cof}\,\theta^2) - Vgh\,\mathrm{fin.}\,\theta > \tfrac{1}{2}(Qgg\,\mathrm{fin.}\theta\,\mathrm{cof.}\theta + P(kk + gg\,\mathrm{fin.}\,\theta^2) + Vgb\,\mathrm{cof.}\,\theta)$$

vbi prior conditio aliquantum diſcrepat a ſuperiori. Interim tamen nulla eſt repugnantia; cum enim ante viderimus caſum quartum poſtulare $Q > \frac{1}{2}P + M\,\mathfrak{v}(\mathrm{fin.}\,\theta + \frac{1}{2}\mathrm{cof}\,\theta)$ erit vtique $\frac{1}{2}P < Q$, ideoque multo magis prima conditio ibi allata, vt ſit

$$Qg\,\mathrm{fin.}\,\theta + Vb > Pg\,\mathrm{cof.}\theta$$

hic locum habebit. Videmus ergo has conditiones latius patere, quam praecedentes, caſumque quartum euenire, dummodo ſit

$$\tfrac{1}{2}Pg\,\mathrm{fin.}\,\theta + Vb > Pg\,\mathrm{cof.}\,\theta$$

adiuncta altera conditione, quae vtrinque eſt eadem.

44. Si fuerit $\frac{1}{2}Pg\,\mathrm{fin.}\,\theta + Vb = Pg\,\mathrm{cof.}\,\theta$ motus gyratorius euaneſcet, corpusque ſolo motu progreſſiuo

 et

et reptorio ſuper plano promouebitur, ſiquidem altera conditio locum obtineat, quae ob $Vb = Pg\,\mathrm{coſ}\,\theta - \frac{1}{\nu}Pg\,\mathrm{ſin.}\,\theta$, abit in hanc:

$$Q(kk + gg\,\mathrm{coſ.}\,\theta^2) + \tfrac{1}{\nu}Pgg\,\mathrm{ſin.}\,\theta^2 > \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}\,\theta + P(kk+gg) - \tfrac{1}{\nu}Pgg\,\mathrm{ſin}\,\theta\,\mathrm{coſ.}\,\theta$$

ſeu diuidendo per $kk - gg\,\mathrm{coſ.}\,\theta^2 + \frac{1}{\nu}gg\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}\,\theta$ in hanc

$$Q > \tfrac{1}{\nu}P$$

Sin autem fuerit $\frac{1}{\nu}Pg\,\mathrm{ſin}\,\theta + Vb < Pg\,\mathrm{coſ.}\,\theta$, nihilo minus motus gyratorius manebit nullus; quia corpus in plagam contrariam gyrari nequit, eritque idcirco $\nu = 0$, vnde fit $Y = P$, et vt corpus ſimul prorepat, neceſſe eſt $Q > \frac{1}{\nu}Y$, hoc eſt, vt ſit $Q > \frac{1}{\nu}P$. Pro caſu ergo tertio haec habemus criteria

$$Q > \tfrac{1}{\nu}P \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{\nu}Pg\,\mathrm{ſin.}\,\theta + Vb > Pg\,\mathrm{coſ.}\,\theta;$$

ac ſi manente hac poſteriori conditione ſit $Q > \frac{1}{\nu}P$, corpus plane quieſcet, ſicque habemus etiam conditiones caſus primi.

45. His quatuor caſibus adiungi poteſt quintus, quo extremitas baſis G, dum corpus circa eam in plagam BCD gyratur, regreditur verſus E, cuius caſus conditiones ex quarto deriuantur, ponendo Z negatiuum, ſeu $Z = -\frac{1}{\nu}Y$ ſimulque accelerationem ω negatiuam. Poſitis ergo ν et ω negatiuis, habebimus pro hoc caſu quinto has conditiones:

$$\nu = \frac{g(Vb - Pg)\,\mathrm{coſ}\,\theta + \frac{1}{\nu}\mathrm{ſin}\,\theta))}{M(kk + gg\,\mathrm{coſ.}\,\theta(\mathrm{coſ.}\,\theta + \frac{1}{\nu}\mathrm{ſin.}\,\theta))}$$

$\omega =$

$$\upsilon = \frac{Vgb(\sin.\theta - \frac{1}{\nu}\cos.\theta) - Q(kk + gg\cos.\theta^2 + \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta\cos.\theta) - P(\frac{1}{\nu}kk + \frac{1}{\nu}gg\sin.\theta^2 + gg\sin.\theta\cos.\theta)}{M(kk + gg\cos.\theta(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta))}$$

Caſus ergo quintus locum habet ſub his conditionibus:

$$Vb - \frac{1}{\nu}Pg\sin.\theta > Pg\cos.\theta \text{ et}$$

$$Vgb\sin.\theta - Q(kk + gg\cos.\theta^2) - Pgg\sin.\theta\cos.\theta > \frac{1}{\nu}(Vgb\cos.\theta + P(kk + gg\sin.\theta^2) + Qgg\sin.\theta\cos.\theta)$$

46. Cum ergo pro hoc caſu eſſe debeat $Vb > Pg(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta)$ ſi ponamus $Vb = Pg(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta) + Ig$, altera conditio requirit vt ſit:

$$Q + \frac{1}{\nu}P < \frac{Igg(\sin.\theta - \frac{1}{\nu}\cos.\theta)}{kk + gg\cos.\theta(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta)}$$

ſeu $Q + \frac{1}{\nu}P < M\cdot\upsilon(\sin.\theta - \frac{1}{\nu}\cos.\theta)$.

Quia ergo $Q + \frac{1}{\nu}P$ ſemper eſt quantitas poſitiua per hypotheſin, hic caſus plane ſubſiſtere nequit ſine motu gyratorio, ideoque neceſſe eſt, vt ſit $\sin.\theta > \frac{1}{\nu}\cos.\theta$, praeterea vero oportet eſſe

$$Vb > Pg(\cos.\theta + \frac{1}{\nu}\sin.\theta)$$

nec non $Vb > Pg\cos.\theta + Q(kk + gg\cos.\theta^2) : g\sin\theta$

Vnde perſpicuum eſt hunc caſum exiſtere non poſſe, niſi adſit momentum Vb corpus circa centrum grauitatis gyrari tendens in plagam BCD. Hoc itaque pacto adepti ſumus criteria, ex quibus dignoſci poteſt, ad quemnam caſum corporis cuiuscunque propoſiti ſtatus referri debeat; atque hinc ſimul prima acceleratio definietur.

 47. Quae

47. Quae ergo hactenus inuenimus huc redeunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q < \tfrac{1}{\nu} P \text{ et}$$

$$Vb + Qg\,\text{ſin.}\,\theta < Pg\,\text{coſ.}\,\theta$$

CONDITIONES CASVS II.

$$Vb + Qg\,\text{ſin.}\,\theta > Pg\,\text{coſ.}\,\theta \text{ et}$$

$$Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{ſin}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{coſ.}\,\theta)$$

CONDITIONES CASVS III.

$$Q > \tfrac{1}{\nu} P \text{ et}$$

$$Vb + \tfrac{1}{\nu} Pg\,\text{ſin.}\,\theta < Pg\,\text{coſ.}\,\theta$$

CONDITIONES CASVS IV.

$$Vb + \tfrac{1}{\nu} Pg\,\text{ſin.}\,\theta > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$$

$$Pgg\,\text{ſin}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Vgb\,\text{ſin.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Vgb\,\text{coſ.}\,\theta)$$

CONDITIONES CASVS V.

$$Vb - \tfrac{1}{\nu} Pg\,\text{ſin.}\,\theta > Pg\,\text{coſ.}\,\theta$$

$$Vgb\,\text{ſin.}\,\theta - Q(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - Pgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(\gamma gb\,\text{coſ.}\,\theta + P(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2) + Qgg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta).$$

48. Quod ſi ergo, vti in ſolidis rotundis vſu venit, angulus θ fuerit rectus, conditiones horum quinque caſuum erunt:

CONDITIONES CASVS I.

$$Q > \tfrac{1}{\nu} P \text{ et } Vb + Qg < 0$$

CON-

CONDITIONES CASVS II.

$Vh+Qg>o$ et $Qkk-Vgh<\frac{1}{\nu}P(kk+gg)$

CONDITIONES CASVS III.

$Q>\frac{1}{\nu}P$ et $Vh+\frac{1}{\nu}Pg<o$

CONDITIONES CASVS IV.

$Vk+\frac{1}{\nu}Pg>o$ et $Qkk-Vgh>\frac{1}{\nu}P(kk+gg)$

CONDITIONES CASVS V.

$Vh-\frac{1}{\nu}Pg>o$ et $Vgk-Qkk>\frac{1}{\nu}P(kk+gg)$.

49. In his formulis nullam habuimus rationem illius alterius reſiſtentiae, quae ob plani villoſitatem ad frictionem accedit, neque vero in genere pro qualibet corporis figura eam commode in calculum inducere licet, propterea quod eius directio, dum ad corporis ſuperficiem in ſingulis punctis contactus eſt normalis, non certam poſitionem ad centrum grauitatis tenet. In corporibus autem rotundis, qualia hic potiſſimum contemplamur, directionem huius reſiſtentiae per centrum grauitatis tranſire, motuique contrariam eſſe vidimus. Cum igitur ea ad preſſionem etiam conſtantem teneat rationem, preſſio vero his caſibus, quibus θ eſt angulus rectus, ſemper ſit $=P$, ſi hanc reſiſtentiam ponamus $=\frac{1}{\mu}P$, in formulis §. praeced. loco vis Q ſcribi oportet $Q-\frac{1}{\mu}P$. Vnde colligimus tale corpus ob iſtam reſiſtentiam in quiete eſſe manſurum, ſi ſit $Q<(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu})P$ et $Vh+(Q-\frac{1}{\mu}P)g<o$

50. Cum igitur effectus huius reſiſtentiae calculum non turbet, dum eam in ipſa vi ſollicitante Q com-

comprehendere licet, ea neglecta videamus, quomodo corpus quodcunque graue plano inclinato incumbens, ſe habere debeat. Jaceat ergo corpus ABCD ſuper plano inclinato EF, cuius ad horizontem MF inclinatio ſit angulus $MFE = \eta$ Sit maſſa corporis $= M$, centrum grauitatis O, momentumque inertiae $= Mkk$; incumbat primum corpus baſi ſua GH, a cuius extremitate inferiori G recta ad O ducta, ſit $GO = g$. Quia hoc corpus a ſola grauitate ſollicitari aſſumitur, momentum ad gyrationem tendens adeſt nullum, ſeu $Vb = o$; ex vi autem grauitatis M ſecundum verticalem OP deorſum vrgente, orietur per reſolutionem

Tab. III. Fig 6.

vis normalis ſecundum OA ſeu $P = M\,\text{coſ.}\,\eta$

vis tangentialis ſecundum OD ſeu $Q = M\,\text{ſin.}\,\eta$.

Praeterea notaſſe iuuabit eſſe angulum $GON = 90° - \theta - \eta$, vnde ſi ſumma angulorum $\theta + \eta$ fuerit recto minor, perpendiculum OP ſupra baſis extremitatem G cadet, contra vero infra.

51. Quoniam ob $V = o$ caſus quintus locum habere nequit, niſi ſit angulus θ obtuſus, ſtatus huius corporis ad vnum horum quatuor caſuum referetur.

Primo corpus in quiete permanebit, ſi fuerit

$\text{ſin.}\,\eta < \frac{1}{\nu}\,\text{coſ.}\,\eta$ et $\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta < \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ}\,\theta$ ſeu $\eta + \theta < 90°$

vbi quantitas frictionis ad preſſionem rationem habere ſumitur, vt 1 ad ν, ita vt per experimenta valor ipſius ν ſit quaſi 3 vel quatuor. Quare vt corpus plani inclinatione non obſtante in quiete perſeueret, duae conditiones requiruntur; altera vt rectae verticalis OP cum plano inclinato EF interſectio N ſupra G cadat; altera vero vt ſit $\text{tang.}\,\eta < \frac{1}{\nu}$. Si ergo $\nu = 3$ vi huius conditio-

ditionis angulus MFE minor eſſe debet, quam 18°, 26′; in hypotheſi autem $\nu = 4$ minor quam 14°, 2′. Ac niſi hae duae conditiones ſimul habeant locum, corpus immotum manere nequit.

52. *Secundus caſus vero exiſtet, ſeu corpus circa punctum G volui incipiet, ita vt primo ſaltem inſtanti punctum G in quiete perſeueret; ſi fuerit:*

$$\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta > \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta, \text{ ſeu } \eta + \theta > 90^\circ, \text{ et}$$

$$gg\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\eta(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) < \tfrac{1}{\nu}(gg\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{coſ.}\,\eta(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2))$$

ex qua poſteriori conditione angulus inclinationis η ita limitatur, vt eſſe debeat:

$$\text{tang.}\,\eta < \frac{kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2 - \nu gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}{\nu(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}.$$

Primo ergo punctum N neceſſario infra G cadere debet; haec vero ſola conditio non ſufficit, ſed neceſſe eſt, vt inſuper plani inclinatio minor ſit limite aſſignato. Vnde ſequitur, quia per conditionem priorem $\text{tang.}\,\eta > \frac{\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\theta}$, illum limitem hoc eſſe debere maiorem, quod fieri nequit, niſi ſit $\text{ſin.}\,\theta > \nu\,\text{coſ.}\,\theta$

53. *Tertius vero caſus exiſtet, ſeu corpus repente ſuper plano inclinato deſcendet ſine vllo motu gyratorio, ſi fuerit:*

$$\text{ſin.}\,\eta > \tfrac{1}{\nu}\,\text{coſ.}\,\eta \text{ et } \tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta < \text{coſ.}\,\theta, \text{ ſeu coſ.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta$$

quae conditiones eo redeunt, vt ſit:

$$\text{tang}\,\eta > \tfrac{1}{\nu} \text{ et cot.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}, \text{ ſeu tang.}(90^\circ - \theta) > \tfrac{1}{\nu}$$

Si igitur $\nu = 3$, neceſſe eſt, vt ſit angulus MFE maior, quam 18°, 26′, et angulus AGO minor, quam 71°, 34.

Sin autem ſit $\nu = 4$, hic caſus locum habet, ſi fuerit angulus MFE maior, quam $14°, 2'$ et angulus AGO minor, quam $75°, 58'$. Neque vero hinc concludere licet, ſi planum EF ſit verticale, ſtatum corporis vel non ad hunc caſum pertinere, etiamſi ſit $\text{coſ.}\,\theta < \frac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta$, vel ad caſum ſecundum eſſe referendum: Cum enim preſſio P euaneſcat, ob $V = 0$ ſemper ſit ȣ $= 0$, ideoque nullus aderit motus gyratorius, qui caſus probe eſt notandus, dum altera conditio illa $\text{coſ.}\,\theta > \frac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta$ eatenus tantum valet, quatenus P non eſt $= 0$; proprie enim requiritur, vt $P(\frac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta)$ non ſit nihilo maius.

54. *Quartus denique caſus exiſtet, ſeu corpus tam rependo, quam voluendo ſimul, ſuper plano inclinato deſcendet, ſi fuerit:*

$$P(\tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta) > 0, \text{ ſeu } \text{coſ.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta \text{ niſi } P = 0 \text{ et}$$

$$gg\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\eta(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) > \tfrac{1}{\nu}(gg\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{coſ.}\,\eta(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2))$$

$$\text{ſeu tang.}\,\eta > \frac{kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2 - \nu gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}{\nu(kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) - gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}$$

Hoc ergo caſu dabitur et motus progreſſiuus puncti G cum acceleratione ω, et motus gyratorius cum acceleratione ȣ, atque vtraque acceleratio erit:

$$\text{ȣ} = \frac{gg(\frac{1}{\nu}\,\text{ſin}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta)\,\text{coſ.}\,\eta}{kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta(\text{coſ.}\,\theta - \frac{1}{\nu}\,\text{ſin}\,\theta)}$$

$$\omega = \frac{\text{ſin.}\,\eta(kk + gg\,\text{coſ}\,\theta^2 - \frac{1}{\nu}gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta) - \text{coſ.}\,\eta(\frac{1}{\nu}kk + \frac{1}{\nu}gg\,\text{ſin.}\,\theta^2 - gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta)}{kk + gg\,\text{coſ}\,\theta^2 - \frac{1}{\nu}gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta}$$

Statim vero atque motus gyratorius incipit, angulus θ augetur, ideoque hae accelerationes mutantur.

55. Quia

55. Quia igitur pro caſu quarto exploratum habemus, quomodo motus ſit incepturus, idem pro reliquis caſibus videamus. Ac pro primo quidem caſu, vbi corpus in quiete permanet, haec quaeſtio ceſſat, pro caſu autem ſecundo, vbi ſolus datur motus gyratorius ſine reptorio, eius acceleratio initialis eſt

$$\upsilon = \frac{gg(\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta - \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta)}{kk+gg} = \frac{-gg\,\text{coſ.}\,(\eta+\theta)}{kk+gg}$$

Pro caſu autem tertio, vbi ſolus motus reptorius adeſt, ſine vllo gyratorio, eius acceleratio erit ſuper plano inclinato:

$$\omega = \frac{Q - \frac{1}{\nu}P}{M} = \text{ſin.}\,\eta - \tfrac{1}{\nu}\,\text{coſ.}\,\eta$$

Neque vero ſufficit, vt hae accelerationes ſint poſitiuae, ſed inſuper opus eſt, vt ſit

pro caſu ſecundo:

$$gg\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\eta(kk+gg\,\text{coſ.}\,\theta^2) < \tfrac{1}{\nu}(gg\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta + \text{coſ.}\,\eta(kk+gg\,\text{ſin.}\,\theta^2))$$

et pro caſu tertio:

$$\tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta < \text{coſ.}\,\theta, \text{ ſeu } \text{tang.}\,\theta < \nu.$$

56. Hinc ergo, ſi detur corpus quodcunque plano inclinato incumbens, ſtatim definiri poteſt caſus, ad quem ſtatus corporis ſit referendus, ſimulque prima acceleratio, ſiquidem detur motus. Quae quo clarius perſpiciantur, ponamus, primum planum eſſe horizontale, ſeu angulum $\eta = 0$, atque corpus in quiete permanebit, dummodo fuerit angulus $AGO = \theta$ recto minor, qui eſt caſus primus. Sin autem hic angulus θ

 fuerit

fuerit obtuſus, eiusque coſinus negatiuus, ſtatus corporis ad caſum ſecundum pertinebit, quippe pro quo ob $\eta = 0$ conditiones ſunt:

$$\theta > 90° \text{ et } gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2)$$

quae ambae ob coſ. θ negatiuum locum habent. Dabitur ergo motus gyratorius circa punctum G, cuius, in diſtantia $= g$, acceleratio erit $\vartheta = -\frac{gg\,\text{coſ.}\,\theta}{kk+gg}$. Tertius autem caſus, qui poſtulat ſin. $\eta > \frac{1}{\nu}$coſ. η hic nunquam exiſtere poteſt, neque etiam quartus; quia enim hic poſtulat, vt ſit:

$$\text{coſ.}\,\theta < \tfrac{1}{\nu}\,\text{ſin.}\,\theta \text{ et } gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta > \tfrac{1}{\nu}(kk + gg\,\text{ſin.}\,\theta^2)$$

hae duae conditiones inter ſe manifeſto pugnant.

57. Si planum ſit verticale, ideoque ſin. $\eta = 1$ et coſ. $\eta = 0$, caſus primus nunquam locum habere poteſt, quia conditio prior ſin. $\eta < \frac{1}{\nu}$coſ. η palam aduerſatur. Pro caſu autem ſecundo requiruntur hae conditiones: $\theta > 0$ et $kk + gg\,\text{coſ.}\,\theta^2 < \frac{1}{\nu}\,gg\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta$, qui ergo locum habere poterit, ſi fuerit $kk < gg\,\text{coſ.}\,\theta(\frac{1}{\nu}\,\text{ſin}\,\theta - \text{coſ.}\,\theta)$ Neceſſe ergo eſt, vt ſit tang. $\theta > \nu$, et acceleratio motus gyratorii in diſtantia g erit $\vartheta = \frac{gg\,\text{ſin.}\,\theta}{kk+gg}$.

Sin autem fuerit tang. $\theta < \nu$, caſus tertius locum habebit, corpusque ſolo motu reptorio deſcendet acceleratione $\omega = 1$, corpus ſcilicet libere deſcendet; ad quem caſum etiam quartus redibit, cum fiat $\vartheta = 0$ et $\omega = 1$. Qui cum nunquam non locum inueniat, caſum ſecundum plane excludere videtur: verum notandum eſt, ad caſum ſecundum opus eſſe, vt punctum G primo ſaltem inſtanti detineatur; ſtatim enim ac punctum O motum

tum gyratorium concipit, in G, dabitur preſſio, vnde frictio motui reptorio impediendo ſufficiens naſcetur, ſi quidem fuerit $kk + gg\,\mathrm{coſ.}\,\theta^2 < \tfrac{1}{\nu}\,gg\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}\,\theta$, ita vt hoc caſu duplex motus ſit poſſibilis.

58. Tribuamus nunc iterum plano EF inclinationem quamcunque η, corpus autem ei incumbens ſit rotundum, ſeu angulus θ rectus; atque manifeſtum eſt, caſum primum locum habere non poſſe, niſi quatenus reſiſtentia a villoſitate plani orta, motui ſe opponit, cuius autem in ſuperioribus formulis nullam habuimus rationem. Secundus autem caſus locum inueniet, corpusque ſine attritu prouolutione perfecta deſcendet, dum ſit $\eta < 0$ et $kk\,\mathrm{ſin.}\,\eta < \tfrac{1}{\nu}(kk + gg)\,\mathrm{coſ.}\,\eta$, ſeu $\mathrm{tang.}\,\eta < \frac{kk+gg}{\nu kk}$; atque acceleratio motus gyratorii circa centrum grauitatis in diſtantia $OG = g$, cui acceleratio motus progreſſiui centri grauitatis eſt aequalis, erit $\varsigma = \frac{gg\,\mathrm{ſin.}\,\eta}{gg+kk}$. Caſus tertius nunquam vſu venire poteſt: quartus vero, ſi ſit $\mathrm{tang.}\,\eta > \frac{kk+gg}{\nu kk}$; tum vero erit pro vtraque acceleratione:

$$\varsigma = \frac{gg\,\mathrm{coſ.}\,\eta}{\nu kk} \text{ et } \omega = \mathrm{ſin.}\,\eta - \frac{(kk+gg)\,\mathrm{coſ.}\,\eta}{\nu kk}.$$

Quodſi $\mathrm{tang.}\,\eta = \frac{kk+gg}{\nu kk}$, ſtatus intermedius reſultat, qui autem ob $\omega = 0$ ad ſecundum adhuc eſt referendus.

59. Ex his ergo, quae expoſuimus, intelligitur, quid vires quaecunque valeant, quae corpus quieſcens et plano cuicunque incumbens ſollicitent; ſimulque motus, qui ab iis efficitur, prima acceleratio definiri poteſt. Quodſi vero corpus iam eſt in motu, duplex eius ſtatus eſt perpendendus, prouti motus ſit ſine attritu, vel cum attritu eſt coniunctus. Si nullus adeſt

attritus, ſeu corpus prouolutione perfecta mouetur, vires eundem praeſtabunt effectum, ac ſi corpus quieſceret; indeque ergo patebit, an attritus generetur, nec ne? ſin autem iam attritus adſit, tum vires ſollicitantes plenum exerent effectum, iis autem adiungi oportet totam frictionem ex attritu natam: vbi notandum eſt, frictionem ſemper eiusdem fore magnitudinis, ſiue attritus fuerit maior, ſiue minor, ſecus ac putaueram in diſſertatione ſupra memorata.

60. Sic igitur vera principia, ſecundum quae effectus frictionis in motu corporum plano incumbentium diiudicari debet, mihi equidem tradiſſe videor; vbi hoc inprimis notatu dignum, et quaſi paradoxum, occurrit, quod, niſi iam detur attritus, effectus virium ſollicitantium non ex ipſa earum quantitate aeſtimari debeat, vti in omnibus reliquis motuum generibus fieri oportet, ſed quod ipſa frictio effectum virium moderetur: vel quod eodem redit, etiamſi ob deficientem attritum nulla adſit frictio, tamen effectus virium ſollicitantium ab ea afficitur, atque eo quidem modo, quem in applicatione frictionis ad quaternos caſus ante ſtabilitos oſtendi. Deinde non minus eſt paradoxon, quod dummodo adfuerit attritus, ſiue is fuerit maior, ſiue minor, frictio eundem ſemper effectum exerat; atque ex his principiis omnia phaenomena motus corporum a frictione oriunda expedire licet.

PRIN-

PRINCIPIA MOTVS FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

PARS PRIOR.

1.

Cum corpora fluida a ſolidis hoc potiſſimum differant, quod eorum particulae a ſe inuicem omnino ſint diſſolutae, hae etiam diuerſiſſimos motus recipere poſſunt, neque motus, quo vnaquaeque fluidi particula fertur, a motu reliquarum particularum ita determinatur, vt alio motu progredi non poſſit. Longe aliter autem res ſe habet in corporibus ſolidis, quae, ſi fuerint inflexibilia, nullamque figurae ſuae mutationem patiantur, vtcunque moueantur, ſingulae eorum particulae perpetuo eundem inter ſe ſitum ac diſtantiam ſeruant; vnde fit, vt, cognito motu duarum triumue tantum particularum, ſtatim alius cuiuscunque particulae motus definiri queat; neque etiam duarum triumue huiusmodi corporum particularum motus ad lubitum fingi poteſt, ſed is ita comparatus eſſe debet, vt hae particulae eundem perpetuo ſitum relatiuum inter ſe obtineant.

2. Quodſi autem corpora ſolida fuerint flexibilia, ſingularum particularum motus minus determinatur: cum

cum ob flexuras tam diſtantia, quam ſitus relatiuus diverſarum particularum, mutationes admittat. Interim tamen ipſa flexurae ratio legem quandam, quam diverſae huiusmodi corporum particulae in motu ſuo ſequi debent, conſtituit: quippe qua caueri oportet, ne partes, quae circa ſe inuicem tantum inflecti ſe patiuntur, vel a ſe penitus diuellantur, vel in ſe inuicem intrudantur; quod quidem poſterius impenetrabilitas omnibus corporibus communis exigit.

3. In corporibus autem fluidis, quorum particulae nullo nexu inter ſe vniuntur, motus quoque diverſarum particularum multo minus reſtringitur: neque ex motu quotcunque particularum motus reliquarum determinatur. Si enim vel centum particularum motus, tanquam cognitus aſſumatur; manifeſtum eſt, motus quorum reliquae particulae capaces ſint futurae, adhuc in infinitum variari poſſe. Ex quo concludendum videtur, motum cuiusque particulae fluidi plane non a motu reliquarum pendere, niſi forte his ita fuerit interclusa, vt eas neceſſario ſequi cogatur.

4. Interim tamen fieri non poteſt, vt motus omnium fluidi particularum nullis omnino legibus adſtringatur; neque adeo pro lubitu motum, qui ſingulis particulis ineſſe concipitur, fingere licet. Cum enim particulae ſint impenetrabiles, ſtatim patet, eiusmodi motum ſubſiſtere non poſſe, quo aliae particulae per alias tranſirent, ſicque ſe mutuo penetrarent: atque, ob hanc cauſam, talis motus, ne cogitatione quidem in fluido ineſſe concipi poteſt. Quoniam igitur infinitos

motus

motus excludi oportet, quorum pacto reliqui ſint comparati, et quanam proprietate ab illis diſtinguantur operae pretium videtur, accuratius definire.

5. Antequam enim motus, quo fluidum quodpiam actu agitatur, aſſignari queat, neceſſarium videtur, vt omnes motus, qui quidem in hoc fluido ſubſiſtere poſſent, dignoſcantur: quos motus hic poſſibiles vocabo, vt a motibus impoſſibilibus, qui ne locum quidem habere poſſunt, diſtinguam. In hunc finem nobis conſtituendus erit character, motibus poſſibilibus conueniens, eosque ab impoſſibilibus ſegregans; quo facto ex motibus poſſibilibus quouis caſu eum determinari oportebit, qui actu ineſſe debebit. Tum ſcilicet ad vires, quibus aqua ſollicitatur, erit reſpiciendum, vt motus, qui illis ſit conformis, ex mechanicae principiis definiri poſſit.

6. In characterem igitur motuum poſſibilium, quicunque ſcilicet ſalua impenetrabilitate in fluido ineſſe poſſunt, inquirere hic conſtitui. Fluidum autem eius indolis aſſumo, vt neque in arctius ſpatium compelli ſe patiatur, neque eius continuitas interrumpi poſſit: ſtatuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum ſpatium a fluido vacuum relinqui, ſed continuitatem in eo iugiter conſeruari. Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum denſitas eſt variabilis, et quae ne continuitatem quidem neceſſario requirunt, extendere.

7. Si igitur in huiusmodi fluido conſideretur portio quaecunque, motus, quo ſingulae eius particulae

 ferun-

feruntur, ita debet eſſe comparatus, vt omni tempore aequale ſpatium adimpleant. Hoc enim ſi in ſingulis portionibus eueniat, omnis vel expanſio in maius ſpatium, vel coarctatio in minus ſpatium praepedietur; atque huiusmodi motus, ſi ad hanc ſolam indolem reſpiciamus, qua fluidum neque expanſionis, neque condenſationis, capax ſtatuitur, omnino pro poſſibili erit habendus. Quod autem hic de qualibet fluidi portione dictum eſt, de ſingulis eius elementis eſt intelligendum; ita vt cuiusque elementi volumen perpetuo eiusdem quantitatis manere debeat.

8. Quo ergo huic conditioni ſatisfiat, in ſingulis fluidi punctis motus quicunque ineſſe concipiatur; tum ſumto quocunque fluidi elemento inueſtigetur translatio momentanea ſingulorum eius terminorum, ſicque innoteſcet ſpatiolum, in quo hoc elementum elapſo tempuſculo minimo continebitur. Deinde hoc ſpatiolum illi, quod ante occupauerat, aequale ſtatuatur, haecque aequatio rationem motus, quatenus erit poſſibilis, indicabit. Quodſi enim ſingula elementa ſingulis tempuſculis aequalia ſpatiola occupent, neque vlla fluidi compreſſio, neque expanſio, orietur; motusque ita erit comparatus, vt pro poſſibili ſit habendus.

9. Cum autem hic non ſolum celeritas motus, qui ſingulis fluidi punctis ineſſe concipitur, ſpectari debeat, ſed etiam eius directio, haec vtraque conſideratio commodiſſime inſtituetur, ſi motus cuiusque puncti ſecundum directiones fixas reſoluatur. Haec autem reſolutio vel ſecundum binas, vel ternas directiones

fieri

fieri ſolet: priori enim reſolutione vti licet, ſi ſingulorum punctorum motus in eodem plano abſoluatur; ſin autem eorum motus non in eodem plano contineatur, tum motum ſecundum ternos axes fixos reſolui oportet. Quoniam igitur hic poſterior caſus plus difficultatis habet quam prior, inueſtigationem motuum poſſibilium a caſu priori incipi conueniet, qua expedita caſus poſterior facilius expedietur.

10. Primum igitur fluido duas tantum dimenſiones tribuam, ita vt ſingulae eius particulae non ſolum nunc quidem in eodem plano reperiantur, ſed etiam earum motus in eodem plano abſoluatur. Hoc itaque planum, plano tabulae repreſentetur, et conſideretur, fluidi quodcunque punctum l, cuius ſitus per coordinatas orthogonales $AL = x$ et $Ll = y$ referatur, tum vero eius motus, quo nunc quidem fertur, ſecundum easdem directiones reſolutus praebeat celeritatem ſecundum axem AL, vel ſecundum $lm = u$, et ſecundum alterum axem AB, vel ſecundum $ln = v$: ita vt vera huius puncti celeritas futura ſit $= \sqrt{(uu + vv)}$, eiusque directio ad axem AL inclinata ſit angulo, cuius tangens $= \frac{v}{u}$. Tab. IV. Fig. 1.

11. Cum ſtatum motus praeſentem tantum, qui ſingulis fluidi punctis conueniat, euoluere ſit propoſitum, celeritates u et v a ſitu puncti l vnice pendebunt, eruntque idcirco tanquam functiones coordinatarum x et y ſpectandae. Ponamus igitur eſſe differentiatione inſtituta:

$$du = L dx + l dy \quad \text{et} \quad dv = M dx + m dy$$

 quae

quae formulae differentiales, cum ſint completae, conſtat fore $\frac{dL}{dy}=\frac{dl}{dx}$ et $\frac{dM}{dy}=\frac{dm}{dx}$: vbi notandum eſt, in huiusmodi expreſſione $\frac{dL}{dy}$; differentiale ipſius L, ſeu dL, tantum ex variabilitate ipſius y capiendum eſſe, ſimilique modo in expreſſione $\frac{dl}{dx}$, pro dl id differentiale ipſius l ſumi debet, quod oritur ſi tantum x pro variabili habeatur.

12. Probe ergo cauendum eſt, ne in huiusmodi expreſſionibus fractis $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dl}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, et $\frac{dm}{dx}$, numeratores dL, dl, dM et dm differentialia completa functionum L, l, M et m deſignare putentur; ſed perpetuo ea tantum earum differentialia denotant, quae ex variabilitate vnicae coordinatae, eius ſcilicet, cuius differentiale in denominatore exhibetur, oriuntur; ſicque huiusmodi expreſſiones ſemper quantitates finitas ac determinatas repraeſentabunt. Simili autem modo intelligitur, fore $L=\frac{du}{dx}$, $l=\frac{du}{dy}$; $M=\frac{dv}{dx}$ et $m=\frac{dv}{dy}$; qua notandi ratione primum Clar. *Fontaine* vſus eſt, et quia non contemnendum calculi compendium largitur, eam hic quoque adhibebo.

13. Cum igitur ſit $du=Ldx+ldy$ et $dv=Mdx+mdy$, hinc geminas celeritates cuiusque alius puncti, quod quidem infinite parum a puncto l diſtat, aſſignare licebit; ſi enim talis puncti a puncto l diſtantia ſecundum axem AL ſit $=dx$, et ſecundum axem $AB=dy$, tum huius puncti celeritas ſecundum axem AL erit $=u+Ldx+ldy$; celeritas autem ſecundum alterum axem $AB=v+Mdx+mdy$. Tempuſculo ergo infinite paruo dt hoc punctum proferetur ſecundum

dum directionem axis AL per ſpatiolum $= dt(u + L\,dx + l\,dy)$ et ſecundum directionem alterius axis AB per ſpatiolum $= dt(v + M\,dx + m\,dy)$.

14. His notatis conſideremus elementum aquae triangulare lmn, et quaeramus ſitum, in quem id ob motum, quem ipſi inſitum concipimus, tempuſculo dt transferatur. Sit autem huius elementi triangularis lmn latus lm axi AL, latus vero ln axi AB, parallelum: ac ponatur $lm = dx$, et $ln = dy$; ſeu ſint pro puncto m coordinatae $x + dx$ et y; pro puncto n autem ſint coordinatae x et $y + dy$. Patet autem, quoniam relationem inter differentialia dx et dy non definimus, eaque tam negatiue, quam affirmatiue, accipi poſſunt, totam fluidi maſſam in huiusmodi elementa cogitatione diuidi poſſe, ita vt, quod de vno in genere definiemus, id aeque ad omnia pateat.

15. Vt igitur pateat, quorum elementum hoc lmn, ob motum inſitum, tempuſculo dt transferatur, quaeramus puncta p, q et r, in quae eius anguli, ſeu puncta l, m et n, tempuſculo dt transferentur. Cum igitur ſit

	puncti l	puncti m	puncti n
Celeritas ſecundum AL =	u	$u + L\,dx$	$u + l\,dy$
Celeritas ſecundum AB =	v	$v + M\,dx$	$v + m\,dy$

punctum l perueniet tempuſculo dt in p, vt ſit:

$$AP - AL = u\,dt, \text{ et } Pp - Ll = v\,dt.$$

Punctum autem m perueniet in q, vt ſit:

$$AQ - AM = (u + L\,dx)\,dt \text{ et } Qq - Mm = (v + M\,dx)\,dt.$$

 At

At punctum n feretur in r, vt ſit:

$$AR-AL=(u+ldy)dt \text{ et } Rr-Ln=(v+mdy)dt.$$

16. Cum igitur puncta l, m et n tempuſculo dt in puncta p, q et r transferantur, iunctis lineolis rectis pq, pr et qr triangulum lmn, in ſitum, quem triangulum pqr refert, peruenire cenſendum eſt. Quoniam enim triangulum lmn ſtatuitur infinite paruum, eius latera per motum curuaturam recipere nequeunt, ideoque elementum aquae lmn poſt translationem tempuſculo dt factam, etiamnum figuram triangularem pqr, et quidem rectilineam, retinebit Cum igitur hoc elementum lmn per motum, neque in maius ſpatium extendi, neque in minus compingi, debeat, motum ita comparatum eſſe oportet, vt area trianguli pqr aequalis areae trianguli lmn reddatur.

17. Trianguli autem lmn, cum ſit ad l rectangulum, area eſt $=\frac{1}{2}dx\,dy$, cui propterea area trianguli pqr aequalis eſt ſtatuenda. Ad hanc autem aream inueniendam conſiderandae ſunt punctorum p, q, r binae coordinatae, quae ſunt:

$$AP=x+udt;\ AQ=x+dx+(u+Ldx)dt;\ AR=x+(u+ldy)dt$$

$$Pp=y+vdt;\ Qq=y+(v+Mdx)dt,\ Rr=y+dy+(v+mdy)dt$$

Tum vero area trianguli pqr ex areis ſequentium trapeziorum ita reperitur, vt ſit:

$$pqr=PprR+RrqQ-PpqQ.$$

Cum autem haec trapezia bina latera parallela baſique AQ perpendicularia habeant, eorum areae facile aſſignantur.

18. Erit

18 Erit enim vti ex elementis conſtat:

$$PprR = \tfrac{1}{2} PR(Pp + Rr)$$
$$RrqQ = \tfrac{1}{2} RQ(Rr + Qq)$$
$$PpqQ = \tfrac{1}{2} PQ(Pp + Qq)$$

His igitur colligendis reperietur:

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2} PQ.\, Rr - \tfrac{1}{2} RQ.\, Pp - \tfrac{1}{2} PR.\, Qq$$

Ponatur breuitatis gratia

$$AQ = AP + Q;\ AR = AP + R;\ Qq = Pp + q \text{ et } Rr = Pp + r$$

vt ſit $PQ = Q$; $PR = R$ et $RQ = Q - R$,
eritque $\Delta pqr = \tfrac{1}{2} Q(Pp + r) - \tfrac{1}{2}(Q - R) Pp - \tfrac{1}{2} R (Pp + q)$
ſiue $\Delta pqr = \tfrac{1}{2} Q.r - \tfrac{1}{2} R.q$.

19. Eſt vero ex valoribus coordinatarum ante exhibitis

$$Q = dx + L\, dx\, dt: \quad q = M\, dx\, dt$$
$$R = \quad l\, dy\, dt; \quad r = dy + m\, dy\, dt;$$

quibus valoribus ſubſtitutis, orietur area trianguli

$$pqr = \tfrac{1}{2} dx\, dy (1 + L\, dt)(1 + m\, dt) - \tfrac{1}{2} M\, l\, dx\, dy\, dt^2, \text{ ſiue}$$
$$pqr = \tfrac{1}{2} dx\, dy (1 + L\, dt + m\, dt + L\, m\, dt^2 - M\, l\, dt^2)$$

quae cum aequalis eſſe debeat areae trianguli lmn, quae eſt $= \tfrac{1}{2} dx\, dy$, haec naſcetur aequatio:

$$L\, dt + m\, dt + L\, m\, dt^2 - M\, l\, dt^2 = 0 \text{ ſiue}$$
$$L + m + L\, m\, dt - M\, l\, dt = 0.$$

20. Cum igitur termini $L\, m\, dt$ et $M\, l\, dt$ prae finitis L et m euaneſcant, habebitur haec aequatio $L + m = 0$. Quam ob rem, vt motus ſit poſſibilis, celeritates u et v puncti cuiuscunque l, ita debent eſſe comparatae, vt poſitis earum differentialibus

$$du = L\, dx + l\, dy, \text{ et } dv = M\, dx + m\, dy$$

ſit

ſit $L+m=0$. Seu cum ſit $L=\frac{du}{dx}$ et $m=\frac{dv}{dy}$, celeritates u et v, quae puncto l ſecundum directiones axium AL et AB ineſſe concipiuntur, eiusmodi functiones coordinatarum x et y eſſe debent, vt ſit $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0$, ſicque motuum poſſibilium criterium in hoc conſiſtit, vt ſit $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=0$; niſi enim haec conditio locum habeat, motus fluidi ſubſiſtere nequit.

21. Eodem modo erit procedendum, ſi motus fluidi non abſoluatur in eodem plano. Ponamus igitur, vt quaeſtionem latiſſimo ſenſu acceptam expediamus, ſingulas fluidi particulas motu quocunque inter ſe agitari, hac ſolum lege obſeruata, vt neque condenſatio, neque expanſio partium vsquam eueniat: quaeritur igitur ſimili modo, quaenam hinc determinatio ad celeritates, quas ſingulis punctis ineſſe concipimus, accedat, vt motus poſſibilis reddatur: ſeu quod eodem redit, omnes motus, qui hisce conditionibus aduerſantur, a poſſibilibus remouere oportet, quo ipſo criterium motuum poſſibilium conſtituetur.

22. Conſideremus igitur punctum fluidi quodcunque λ; ad cuius ſitum repraeſentandum vtamur tribus axibus fixis AL, AB et AC inter ſe normalibus.
Tab. IV. Fig. 2. Sint igitur ternae puncti λ coordinatae his axibus parallelae, $AL=x$, $Ll=y$ et $l\lambda=z$; quae obtinentur, ſi primum a puncto λ ad planum duobus axibus AL et AB determinatum demittatur perpendiculum λl; tum vero ex puncto l ad axem AL perpendicularis lL agatur. Hoc itaque modo ſitus puncti λ per ternas iſtas coordinatas generaliſſime exprimitur, atque ad omnia fluidi puncta accommodari poteſt.

23. Qui-

23. Quicunque porro ſit motus puncti λ, is ſecundum ternas directiones $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ et λo axibus AL AB et AC parallelas reſolui poterit. Sit igitur puncti λ

celeritas ſecundum directionem $\lambda\mu = u$

celeritas ſecundum directionem $\lambda\nu = v$

celeritas ſecundum directionem $\lambda o = w$

et cum hae celeritates pro vario puncti λ ſitu vtcunque variare poſſint, erunt eae tanquam functiones ternarum coordinatarum x, y et z conſiderandae. Iis igitur differentiatis, ponamus prodire:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz$$

eruntque porro quantitates L, l, λ, M, m, μ, N, n, ν, functiones coordinatarum x, y et z.

24. Quoniam hae formulae differentiales ſunt completae, ſequitur, ſimili modo, vt ſupra, fore:

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dL}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy}$$
$$\frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx};\quad \frac{dM}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy}$$
$$\frac{dN}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{dN}{dz} = \frac{d\nu}{dx};\quad \frac{dn}{dz} = \frac{d\nu}{dy}$$

ſiquidem in numeratoribus ea tantum coordinatarum, cuius differentiale in denominatore exhibetur, pro variabili aſſumatur.

25. Triplici ergo motu hoc, quem in puncto X ineſſe concipimus, hoc punctum λ tempuſculo dt ita mouebitur, vt

ſecundum directionem axis AL per ſpatiolum $= u\,dt$

ſecundum directionem axis AB per ſpatiolum $= v\,dt$

ſecundum directionem axis AC per ſpatiolum $= w\,dt$

 pro-

promoueatur. Sin autem puncti λ vera celeritas, quae ſcilicet ex compoſitione huius triplicis motus oritur, dicatur $=V$, erit ob normalitatem trium directionum $V=\sqrt{(uu+vv+ww)}$, et ſpatiolum, quod tempuſculo dt motu ſuo vero conficit, erit $=Vdt$.

26. Conſideremus iam fluidi elementum quodpiam ſolidum, vt videamus, quorſum id tempuſculo dt proferatur; et quoniam perinde eſt, cuiusmodi figuram iſti elemento tribuamus, dummodo ita generatim definiatur, tota fluidi maſſa, in eiusmodi elementa diuiſa, concipi queat; ſit, vt calculo conſulatur, eius figura pyramis triangularis rectangula, terminata quatuor angulis ſolidis λ, μ, ν et ο, ita vt pro ſingulis ſint ternae coordinatae:

	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti ο
ſecundum AL	x	$x+dx$	x	x
ſecundum AB	y	y	$y+dy$	y.
ſecundum AC	z	z	z	$z+dz$

et cum baſis huius pyramidis ſit $\lambda\mu\nu = lmn = \frac{1}{2}dxdy$, altitudo vero $\lambda o = dz$, erit eius ſolliditas $=\frac{1}{6}dxdydz$.

27. Inueſtigemus iam, quorſum ſinguli iſti pyramidis anguli λ, μ, ν et ο tempuſculo dt transferantur: ad quod eorum ternas celeritates ſecundum directiones ternorum axium contemplari oportet, quae ex celeritatum u, v, w valoribus differentialibus erunt:

Celeritas ſecundum	puncti λ	puncti μ	puncti ν	puncti ο
directionem AL	u	$u+Ldx$	$u+ldy$	$u+\lambda dz$
directionem AB	v	$v+Mdx$	$v+mdy$	$v+\mu dz$
directionem AC	w	$w+Ndx$	$w+ndy$	$w+\nu dz$

28 Quodſi ergo puncta λ μ, ν et ο tempuſculo dt in puncta π, φ, ϱ et σ transferri ponamus, horum-

horumque punctorum ternas coordinatas axibus parallelas conſtituamus, erunt translationes momentaneae ſecundum hos axes:

$AP - AL = udt$	$Pp - Ll = vdt$	$p\pi - l\lambda = wdt$
$AQ - AM = (u + Ldx)dt$	$Qq - Mm = (v + Mdx)dt$	$q\Phi - m\mu = (w + Ndx)dt$
$AR - AL = (u + ldy)dt$	$Rr - Ln = (v + mdy)dt$	$r\varrho - n\nu = (w + ndy)dt$
$AS - AL = (u + \lambda dz)dt$	$Ss - Ll = (v + \mu dz)dt$	$s\sigma - lo = (w + \nu dz)dt$

Hinc ergo ternae coordinatae pro his quatuor punctis π, Φ, ϱ et σ erunt:

$AP = x + udt$; $Pp = y + vdt$; $p\pi = z + wdt$

$RQ = x + dx + (u + Ldx)dt$; $Qq = y + (v + Mdx)dt$; $q\Phi = z + (w + Ndx)dt$

$AR = x + (u + ldy)dt$; $Rr = y + dy + (v + mdy)dt$; $r\varrho = z + (w + ndy)dt$

$AS = x + (u + \lambda dz)dt$; $Ss = y + (v + \mu dz)dt$; $s\sigma = z + dz + (w + \nu dz)dt$

29. Cum igitur elapſo tempuſculo dt anguli pyramidis λ, μ, ν et o in puncta π, Φ, ϱ et σ ſint translati, ipſa pyramis nunc pyramidem pariter triangularem $\pi\Phi\varrho\sigma$ conſtituet; ideoque ob indolem fluidi efficiendum eſt, vt ſoliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ aequalis ſit ſoliditati pyramidis propoſitae $\lambda\mu\nu o$, ſeu $= \frac{1}{6}dxdydz$. Totum ergo negotium huc redit, vt ſoliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ determinetur. Perſpicuum autem eſt, hanc pyramidem relinqui, ſi a ſolido $prq\pi\Phi\varrho\sigma$ auferatur ſolidum $pqr\pi\Phi\varrho$; quod poſterius ſolidum eſt priſma baſi triangulari pqr normaliter inſiſtens, et ſuperne ſectione obliqua $\pi\varrho\Phi$ truncatum.

30. In huiusmodi autem priſmata truncata tria quoque alterum ſolidum $pqr\pi\Phi\varrho\sigma$ reſolui poteſt, quae ſunt:

I. $pqs\pi\Phi\sigma$; II. $prs\pi\varrho\sigma$; III. $qrs\Phi\varrho\sigma$

 ſicque

ſicque effici debet, vt ſit

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = pqs\pi\Phi\sigma + prs\pi\varrho\sigma + qrs\Phi\varrho\sigma - pqr\pi\Phi\varrho.$$

Cum autem huiusmodi priſma baſi ſuae inferiori normaliter inſiſtat, tres autem altitudines habeat inaequales, eius ſoliditas reperietur, ſi baſis multiplicetur per trientem ſummae trium iſtarum altitudinum.

31. Hinc ergo ſoliditates horum priſmatum truncatorum erunt:

$$pqs\pi\Phi\sigma = \tfrac{1}{3}pqs(p\pi + q\Phi + s\sigma)$$
$$prs\pi\varrho\sigma = \tfrac{1}{3}prs(p\pi + r\varrho + s\sigma)$$
$$qrs\Phi\varrho\sigma = \tfrac{1}{3}qrs(q\Phi + r\varrho + s\sigma)$$
$$pqr\pi\Phi\varrho = \tfrac{1}{3}pqr(p\pi + q\Phi + r\varrho).$$

Cum autem ſit $pqr = pqs + prs + qrs$, erit ſumma trium priorum priſmatum poſtremo minuta, ſiue

$$\tfrac{1}{6}dx\,dy\,dz = -\tfrac{1}{3}p\pi.qrs - \tfrac{1}{3}q\Phi.prs - \tfrac{1}{3}r\varrho.pqs + \tfrac{1}{3}s\sigma.pqr;$$

ſiue

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.s\sigma - 2pqs.r\varrho - 2prs.q\Phi - 2qrs.p\pi.$$

32. Supereſt igitur, vt horum priſmatum baſes definiantur: verum antequam hoc faciamus, ponamus ad ſequentem calculum contrahendum:

$$AQ = AP + Q;\ Qq = Pp + q;\ q\Phi = p\pi + \Phi$$
$$AR = AP + R;\ Rr = Pp + r;\ r\varrho = p\pi + \varrho$$
$$AS = AP + S;\ Ss = Pp + s;\ s\sigma = p\pi + \sigma$$

atque his poſtremis valoribus ſubſtitutis, termini $p\pi$ continentes ſe mutuo deſtruent, eritque

$$dx\,dy\,dz = 2pqr.\sigma - 2pqs.\varrho - 2prs.\Phi$$

ſicque

ſicque numerus baſium inueſtigandarum, vnitate eſt imminutus.

33. Iam triangulum pqr reperitur, ſi a figura $PprqQ$, ſeu a ſumma trapeziorum $PprR + RrqQ$ auferatur trapezium $PpqQ$; vnde erit

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}PR(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}RQ(Rr+Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp+Qq);$$

ſiue ob $PR = R$; $RQ = Q - R$; et $PQ = Q$ erit.

$$\Delta pqr = \tfrac{1}{2}R(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Qr - \tfrac{1}{2}Rq.$$

Simili modo erit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}PS(Pp+Ss) + \tfrac{1}{2}SQ(Ss+Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp+Qq), \text{ ſeu}$$

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp+Ss) + \tfrac{1}{2}(Q-S)(Ss+Qq) - \tfrac{1}{2}Q(Pp+Qq)$$

vnde fit:

$$\Delta pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Ss - Pp) = \tfrac{1}{2}Qs - \tfrac{1}{2}Sq.$$

Ac denique

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}PR(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}RS(Rr+Ss) - \tfrac{1}{2}PS(Pp+Ss) \text{ ſeu}$$

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp+Rr) + \tfrac{1}{2}(S-R)(Rr+Ss) - \tfrac{1}{2}S(Pp+Ss)$$

vnde fit:

$$\Delta prs = \tfrac{1}{2}R(Pp - Ss) + \tfrac{1}{2}S(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Sr - \tfrac{1}{2}Rs.$$

34. His igitur valoribus ſubſtitutis, obtinebimus

$$dx\,dy\,dz = (Qr - Rq)\sigma + (Sq - Qs)\varrho + (Rs - Sr)\Phi$$

ſiue pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ſoliditas erit

$$\tfrac{1}{6}(Qr - Rq)\sigma + \tfrac{1}{6}(Sq - Qs)\varrho + \tfrac{1}{6}(Rs - Sr)\Phi$$

Eſt autem ex coordinatarum valoribus ſupra §. 28 exhibitis

$$\begin{array}{lll} Q = dx + L\,dx\,dt & q = M\,dx\,dt & \Phi = N\,dx\,dt \\ R = l\,dy\,dt & r = dy + m\,dy\,dt & \varrho = n\,dy\,dt \\ S = \lambda\,dz\,dt & s = \mu\,dz\,dt & \sigma = dz + \nu\,dz\,dt. \end{array}$$

35. Cum igitur hinc fiat

$$Qr - Rq = dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2)$$
$$Sq - Qs = dxdz(-\mu dt - L\mu dt^2 + M\lambda dt^2)$$
$$Rs - Sr = dydz(-\lambda dt - m\lambda dt^2 + l\mu dt^2)$$

reperietur ſoliditas pyramidis $\pi\Phi\varrho\sigma$ ita expreſſa

$$\tfrac{1}{6}dxdydz\left\{\begin{array}{llll} & +Ldt & +Lmdt^2 & +Lm\nu dt^3 \\ & +mdt & -Mldt^2 & -Ml\nu dt^3 \\ 1 & +\nu dt & +L\nu dt^2 & -Ln\mu dt^3 \\ & & +m\nu dt^2 & +Mn\lambda dt^3 \\ & & -n\mu dt^2 & -Nm\lambda dt^3 \\ & & -N\lambda dt^2 & +Nl\mu dt^3 \end{array}\right\}$$

quae cum debeat eſſe aequalis pyramidi $\lambda\mu\nu o = \frac{1}{6}dxdydz$ habebitur, diuiſione per dt inſtituta, haec aequatio:

$$0 = L + m + \nu + dt(Lm + L\nu + m\nu - Ml - N\lambda - n\mu)$$
$$+ dt^2(Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - Nl\mu)$$

36. Reiectis igitur terminis infinite paruis habebitur haec aequatio: $L + m + \nu = 0$, qua ratio celeritatum u, v, w determinatur, vt motus fluidi fiat poſſibilis. Cum igitur ſit $L = \frac{du}{dx}$, $m = \frac{dv}{dy}$ et $\nu = \frac{dw}{dz}$: criterium motus poſſibilis, ſi puncto fluidi cuicunque λ, cuius ſitus ternis coordinatis x, y et z definitur, eiusmodi celeritates u, v et w ſecundum easdem coordinatas directae tribuantur, vt ſit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Hac ſcilicet conditione id obtinetur, vt nulla fluidi pars in motu, neque in magis, neque in minus ſpatium, transferatur, ac perpetuo cum fluidi continuitas, tum eadem denſitas, conſeruetur.

37. Haec autem proprietas ita eſt interpretanda, vt pro eodem temporis momento ad omnia fluidi puncta extendatur: eodem ſcilicet momento omnium punctorum ternae celeritates u, v, w tales eſſe debent functiones ternarum coordinatarum x, y et z, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$: ſicque natura iſtarum functionum motum ſingulorum fluidi punctorum ad inſtans propoſitum definiet. Alio autem tempore eorundem punctorum motus vtcunque diuerſus eſſe poterit, dummodo pro quouis temporis puncto inuenta proprietas per totum fluidum locum habeat. Tempus ſcilicet hactenus tanquam quantitatem conſtantem ſum contemplatus.

38. Sin autem tempus quoque variabile ſpectare velimus, ita vt motus puncti λ, cuius ſitus ternis coordinatis $AL = x$, $Ll = y$ et $l\lambda = z$ indicatur, elapſo tempore t definiri debeat, manifeſtum eſt, ternas celeritates u, v et w non ſolum a coordinatis x, y et z, ſed inſuper etiam a tempore t pendere, ſeu functiones fore quatuor harum quantitatum x, y, z et t; ita vt earum differentialia huiusmodi formas ſint habitura:

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt;\quad dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt;\quad dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt.$$

Interim tamen ſemper erit $L + m + \nu = 0$, propterea, quod quouis inſtanti tempus t pro conſtanti habetur, ſeu ſit $dt = 0$. Vtcunque igitur functiones u, v, et w cum tempore t mutentur, neceſſe eſt, vt pro omni temporis momento ſit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cum enim hac conditione efficiatur, vt quaeuis fluidi portio tempuſculo dt in ſpatium ſibi aequale transferatur,

tur, idem etiam per eandem conditionem in elemento temporis ſequenti, omnibus ergo ſequentibus temporis elementis euenire debebit.

PARS ALTERA.

39. Expoſitis ergo iis, quae ad motum tantum poſſibilem attinent, inueſtigemus nunc etiam indolem eius motus, qui re vera in fluido ſubſiſtere poteſt. Hic igitur, praeter fluidi continuitatem, eiusdemque denſitatis permanentiam, ratio quoque erit habenda virium, quibus ſingula fluidi elementa actu ſollicitantur. Quando enim cuiusuis elementi motus, vel non eſt vniformis, vel non in directum porrigitur, motus immutatio viribus hoc elementum ſollicitantibus conformis eſſe debet. Quare cum ex cognitis his viribus motus mutatio innoteſcat, praecedentes autem formulae etiam hanc motus mutationem contineant, hinc nouae deducentur determinationes, quibus motus hactenus tantum poſſibilis ad motum actualem reſtringitur.

40. Inſtituamus quoque hanc inueſtigationem bipartito; ac primo concipiamus totum fluidi motum in eodem plano fieri. Sint ergo, vt ante, coordinatae ſitum puncti cuiusuis l definientes $AL = x$, $Ll = y$; ac
Tab. IV. Fig. 1. nunc quidem elapſo tempore t ſint puncti l binae celeritates ſecundum directiones axibus AL et AB parallelas u et v: erunt u et v, quoniam nunc variabilitatis temporis ratio haberi debet, functiones ipſarum x, y et t, quo circa ponatur

$$du = L\,dx + l\,dy + \mathfrak{L}\,dt \text{ et } dv = M\,dx + m\,dy + \mathfrak{M}\,dt$$

atque

atque ob priorem conditionem iam ſupra inuenimus, eſſe debere $L + m = 0$.

41. Cum igitur elapſo tempuſculo $= dt$ punctum l transferatur in p, abſoluto ſecundum axem AL ſpatiolo $= udt$, ſecundum alterum axem AB autem ſpatiolo $= vdt$; vt incrementa celeritatum u et v puncti l, quae tempuſculo dt ipſi inducuntur, obtineamus, pro dx et dy ſcribi oportet ſpatiola udt et vdt, vnde haec vera celeritatum incrementa prodibunt:

$$du = Ludt + lvdt + \mathfrak{L}dt \text{ et } dv = Mudt + mvdt + \mathfrak{M}dt$$

Ex quo vires acceleratrices, quae has accelerationes producere valent, erunt:

Vis accel. ſecundum $AL = 2(Lu + lv + \mathfrak{L})$

Vis accel. ſecundum $AB = 2(Mu + mv + \mathfrak{M})$

quibus ergo vires actu in aquae particulam l agentis aequales eſſe debebunt.

42. Inter vires autem, quae aquae particulas actu ſollicitant, primum conſideranda venit grauitas; cuius autem effectus, ſi planum, in quo fit motus, eſt horizontale, pro nihilo erit habendus. Sin autem fuerit decliue, axisque AL decliuitatem ſequatur, altero AB exiſtente horizontali, a grauitate orietur vis acceleratrix ſecundum AL conſtans, quae ſit $= \alpha$. Deinde non praetermittenda eſt frictio, qua ſaepe motus aquae non mediocriter impeditur; quanquam autem eius leges nondum ſunt ſatis exploratae, tamen frictionem corporum ſolidorum ſequentes non multum fortaſſe a ſcopo aberrabimus, ſi frictionem vbique preſſioni, qua aquae particulae ſe inuicem premunt, proportionalem ſtatuerimus.

43. Inprimis autem in computum eſt ducenda preſſio, qua particulae aquae vbique in ſe mutuo agunt, qua fit, vt quaelibet particula vndique ab adiacentibus comprimatur, et quatenus haec preſſio vndequaque non fuerit aequalis, eatenus particulae motus afficiatur. Vbique ſcilicet aqua in certo quodam ſtatu compreſſionis verſabitur, qui ſimilis erit ei, in quo aqua ſtagnans ad certam profunditatem exiſtit. Haec ergo profunditas, ad quam in aqua ſtagnante aqua in pari compreſſionis ſtatu reperitur, commodiſſime adhibebitur ad preſſionem in quouis fluidi puncto l exprimendam. Sit igitur p iſta altitudo, ſeu profunditas, ſtatum compreſſionis in l exprimens, eritque p functio quaedam coordinatarum x et y, ac ſi preſſio cum tempore in l quoque varietur, tempus quoque t in functionem p ingredietur.

Tab. IV. Fig. 3. 44. Ponamus ergo $dp = \mathrm{R}dx + rdy + \mathfrak{R}dt$, et conſideremus elementum aquae quadrangulare rectangulum $lmno$, cuius latera ſint $lm = no = dx$ et $ln = mo = dy$; areaque $= dxdy$. Cum iam preſſio in l ſit $= p$; preſſio in m erit $= p + \mathrm{R}dx$, in $n = p + rdy$ et in $o = p + \mathrm{R}dx + rdy$. Hinc latus lm premitur vi $= dx(p + \frac{1}{2}\mathrm{R}dx)$, latus vero no contra premetur vi $= dx(p + \frac{1}{2}\mathrm{R}dx + rdy)$; ab his ergo duabus viribus elementum $lmno$ ſecundum directionem ln vrgebitur vi $= -rdxdy$. Simili autem modo ex viribus $dy(p + \frac{1}{2}rdy)$ et $dy(p + \mathrm{R}dx + \frac{1}{2}rdy)$, quae agunt in latera ln et mo, reſultabit vis elementum vrgens ſecundum directionem $lm = -\mathrm{R}dxdy$.

45. Hinc

45. Hinc igitur orietur vis acceleratrix ſecundum $lm = -\mathrm{R}$, et vis acceleratrix ſecundum $ln = -r$, quarum illa cum vi a grauitate orta α praebet $\alpha - \mathrm{R}$. Frictione ergo adhuc ſemota, has habebimus aequationes:

$$\alpha - \mathrm{R} = 2\mathrm{L}u + 2lv + 2\mathfrak{L} \text{ ſeu } \mathrm{R} = \alpha - 2\mathrm{L}u - 2lv - 2\mathfrak{L}$$

$$-r = 2\mathrm{M}u + 2mv + 2\mathfrak{M} \text{ et } r = -2\mathrm{M}u - 2mv - 2\mathfrak{M}$$

vnde colligimus fore

$$dp = \alpha dx - 2(\mathrm{L}u + lv + \mathfrak{L})dx - 2(\mathrm{M}u + mv + \mathfrak{M})dy + \mathfrak{N}dt$$

quod differentiale oportet eſſe completum, ſeu integrabile.

46. Quia terminus αdx per ſe eſt integrabilis, et pro $\mathfrak{N}$ nihil eſt definitum, ex natura differentialium completorum neceſſe eſt, vt ſit ſignandi modo iam ſupra adhibito:

$$\frac{d.\,(\mathrm{L}u + lv + \mathfrak{L})}{dy} = \frac{d.\,(\mathrm{M}u + mv + \mathfrak{M})}{dx}$$

vnde ob $\frac{du}{dx} = \mathrm{L}$, $\frac{du}{dy} = l$; $\frac{dv}{dx} = \mathrm{M}$, et $\frac{dv}{dy} = m$, orietur

$$\mathrm{L}l + \frac{u d\mathrm{L}}{dy} + lm + \frac{v\,dl}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \mathrm{ML} + \frac{u\,d\mathrm{M}}{dx} + m\mathrm{M} + \frac{v\,dm}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(\mathrm{L} + m)(l - \mathrm{M}) + u\left(\frac{d\mathrm{L}}{dy} - \frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) + v\left(\frac{dl}{dy} - \frac{dm}{dx}\right) + \frac{d\mathfrak{L}}{dx}\ \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$$

47. Verum ob differentialia $\mathrm{L}dx + ldy + \mathfrak{L}dt$ et $\mathrm{M}dx + mdy + \mathfrak{M}dt$ completa nouimus eſſe

$$\frac{d\mathrm{L}}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dm}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dy};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt} \text{ et } \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dt}$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus iſtam aequationem:

$$(\mathrm{L} + m)(l - \mathrm{M}) + u\left(\frac{dl - d\mathrm{M}}{dx}\right) + \left(\frac{dl - d\mathrm{M}}{dy}\right) + \frac{dl - d\mathrm{M}}{di} = 0$$

cui aperte ſatisfacit $l = \mathrm{M}$: ita vt ſit $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$. Cum igitur haec conditio requirat, vt ſit $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx}$, viciſſim apparet, formulam differentialem hanc $udx + vdy$ eſſe debere completam in quo ergo criterium motus actualis conſiſtit.

 48. Cri-

48. Criterium hoc independens eſt a praecedente, quod continuitas fluidi eiusque conſtans denſitas vniformis ſuppeditauit. Quare etiamſi fluidum in motu denſitatem ſuam mutaret, vti in motu fluidorum elaſticorum, veluti aëris euenire ſolet, haec proprietas nihilominus locum habere debet, vt ſit $udx + vdy$ differentiale completum. Siue celeritates u et v ſemper eiusmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y, praeter tempus t, vt poſito tempore conſtante formula $udx + vdy$ integrationem admittat.

49. Hinc autem porro ipſam preſſionem p definire poterimus, id quod abſolute eſt neceſſarium, ad motum fluidi perfecte determinandum. Cum enim inuenerimus $M = l$, erit

$$dp = adx - 2u(Ldx + ldy) - 2v(ldx + mdy) - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{R}dt$$

At eſt $Ldx + ldy = du - \mathfrak{L}dt$; $ldx + mdy = dv - \mathfrak{M}dt$, vnde fit:

$$dp = adx - 2udu - 2vdv + 2\mathfrak{L}udt + 2\mathfrak{M}vdt - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{R}dt.$$

Quodſi ergo preſſionem in ſingulis fluidi punctis pro tempore praeſente definire velimus, nullo reſpectu ad eius mutationem cum tempore oriundam habito, iſta nobis conſideranda erit aequatio:

$$dp = adx - 2udu - 2vdv - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy$$

eſtque noſtro deſignandi modo $L = \frac{du}{dt}$ et $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; hincque

$$dp = adx - 2udu - 2vdv - 2\frac{du}{dt}\,dx - 2\frac{dv}{dt}\cdot dy$$

in cuius aequationis integratione tempus t pro conſtanti eſt habendum.

50. Haec

50. Haec autem aequatio per hypotheſin eſt integrabilis, atque reuera talis deprehenditur, ſi ad criterium huius motus attendamus, quo vidimus, eſſe debere $udx + vdy$ differentiale completum, ſi quidem tempus t conſtans aſſumamus. Sit igitur S eius integrale, quod ergo eiusmodi erit functio ipſarum x, y et t, vt poſito $dt = o$, prodeat $dS = udx + vdy$: ſumto autem quoque tempore t variabili ponamus haberi

$$dS = udx + vdy + U dt$$

eritque propterea $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}$. Tum vero eſt $U = \frac{dS}{dt}$.

51. His valoribus introductis habebitur:

$$\frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy$$

huiusque formulae cum tempus t conſtans ſumatur integrale manifeſto eſt $= U$. Quod quo clarius appareat, ponamus $dU = K dx + k dy$, erit $\frac{dU}{dx} = K$ et $\frac{dU}{dy} = k$, vnde $\frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy = K dx + k dy = dU$. Cum igitur huius integrale ſit $= U = \frac{dS}{dt}$: erit

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2dU$$

vnde integrando prodit:

$$p = \text{Conſt.} + \alpha x - uu - vv - \frac{2dS}{dt}.$$

exiſtente S functione ipſarum x, y et t, cuius differentiale, poſito $dt = o$, eſt $udx + vdy$.

52. Quo indoles huius formulae melius intelligatur, conſideremus puncti l celeritatem veram, quae ſit $= V = \sqrt{(uu + vv)}$. Atque erit preſſio: $p = \text{Conſt.} + \alpha x - VV - \frac{2dS}{dt}$: in quo poſtremo termino dS denotat,

notat differentiale ipſius $S = \int(udx + vdy)$, ſi tantum tempus t vt variabile ſpectetur.

53. Si iam frictionis quoque rationem habere velimus, eamque preſſioni p proportionalem ſtatuamus, dum punctum l elementum ds percurrit, erit vis retardatrix a frictione oriunda $= \frac{p}{f}$; vnde poſito $\frac{ds}{dt} = U$, aequatio noſtra differentialis, poſito t conſtante, erit:

$$dp = \alpha dx - \frac{p}{f} ds - 2VdV - 2dU$$

vnde integrando oritur, ſumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$,

$$p = e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha dx - 2VdV - 2dV) \text{ ſiue}$$

$$p = \alpha x - VV - 2U - \tfrac{1}{f} e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha x - VV - 2U) ds$$

54. Cum igitur criterium motus, quo fluidum re vera mouetur, in hoc conſiſtat, vt poſito tempore conſtante, differentiale $udx + vdy$ ſit completum: continuitas autem et conſtans vniformis denſitas exigat, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$, hinc ſequitur quoque hoc differentiale $udy + vdx$ fore completum. Quare vtrinque coniunctim celeritates u et v eiuſmodi debent eſſe functiones coordinatarum x et y cum tempore t, vt hae ambae formulae $udx + vdy$ et $udy + vdx$ ſint differentialia completa.

55. Inſtituamus iam eandem inueſtigationem in genere, poſitisque puncti λ ternis celeritatibus ſecundum axes AL, AB, AC directis u, v, w ſint eae eiuſmodi functiones cum coordinatarum x, y, z, tum temporis t, vt differentiatione inſtituta fiat:

$du =$

$$du = L\,dx + l\,dy + \lambda\,dz + \mathfrak{L}\,dt$$
$$dv = M\,dx + m\,dy + \mu\,dz + \mathfrak{M}\,dt$$
$$dw = N\,dx + n\,dy + \nu\,dz + \mathfrak{N}\,dt$$

et quanquam hic quoque tempus t variabile eſt aſſumtum, tamen, vt motus ſit poſſibilis, per conditionem praecedentem oportet eſſe $L + m + \nu = 0$, ſiue quod eodem redit:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

a qua proprietate quidem praeſens examen non pendet.

56. Elapſo autem tempuſculo dt, punctum λ transfertur in π, et ſecundum axem AL percurrit ſpatiolum $= u\,dt$, ſecundum axem AB ſpatiolum $= v\,dt$ et ſecundum axem AC ſpatiolum $w\,dt$. Quare nunc puncti λ in π exiſtentis ternae celeritates erunt:

ſecund. $AL = u + Lu\,dt + lv\,dt + \lambda w\,dt + \mathfrak{L}\,dt$
ſecund $AB = v + Mu\,dt + mv\,dt + \mu w\,dt + \mathfrak{M}\,dt$
ſecund. $AC = w + Nu\,dt + nv\,dt + \nu w\,dt + \mathfrak{N}\,dt$

hincque accelerationes ſecundum easdem directiones erunt:

ſec. $AL = 2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$
ſec. $AB = 2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M})$
ſec. $AC = 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N})$

57. Si axem AC verticalem ſtatuamus, ita vt reliqui bini AL et AB ſint horizontales, ob grauitatem vis acceleratrix oritur ſecundum Axem $AC = -1$. Tum vero poſita preſſione in $\lambda = p$, eiusque differentiali, ſumto tempore conſtante,

$$dp = R\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$$

hinc

hinc orientur ternae vires acceleratrices

ſec. AL $= -\mathrm{R}$; ſec. AB $= -r$ et ſec. AC $= -\varrho$

quippe quae facile ſimili modo colliguntur, quo ante §. 44 et 45. ſumus vſi, ita vt ſuperfluum foret, idem ratiocinium repetere. Quam ob rem habebimus has aequationes:

$$\mathrm{R} = -2(\mathrm{L}u + lv + \lambda w + \mathfrak{L})$$
$$r = -2(\mathrm{M}u + mv + \mu w + \mathfrak{M})$$
$$\varrho = -1 - 2(\mathrm{N}u + nv + \nu w + \mathfrak{N})$$

58. Cum autem formula $dp = \mathrm{R}\,dx + r\,dy + \varrho\,dz$ debeat eſſe differentiale completum, erit

$$\frac{d\mathrm{R}}{dy} = \frac{dr}{dx};\quad \frac{d\mathrm{R}}{dz} = \frac{d\varrho}{dx};\quad \frac{dr}{dz} = \frac{d\varrho}{dy}.$$

at differentiatione peracta obtinebuntur per -2 diuidendo tres ſequentes aequationes

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} \frac{u\,d\mathrm{L}}{dy} + \frac{v\,dl}{dy} + \frac{w\,d\lambda}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \mathrm{L}l + lm + \lambda n = \\ \frac{u\,d\mathrm{M}}{dx} + \frac{v\,dm}{dx} + \frac{w\,d\mu}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \mathrm{ML} + m\mathrm{M} + \mu\mathrm{N} \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} \frac{u\,d\mathrm{L}}{dz} + \frac{v\,dl}{dz} + \frac{w\,d\lambda}{dz} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} + \mathfrak{L}\lambda + l\mu + \lambda\nu = \\ \frac{u\,d\mathrm{N}}{dx} + \frac{v\,dn}{dx} + \frac{w\,d\nu}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \mathrm{NL} + n\mathrm{M} + \nu\mathrm{N} \end{cases}$$

$$\mathrm{III}\ \begin{cases} \frac{u\,d\mathrm{M}}{dz} + \frac{v\,dm}{dz} + \frac{w\,d\mu}{dz} + \frac{d\mathfrak{M}}{dz} + \mathrm{M}\lambda + m\mu + \mu\nu = \\ \frac{v\,d\mathrm{N}}{dy} + \frac{v\,dn}{dy} + \frac{w\,d\nu}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + \mathrm{N}l + nm + \nu n \end{cases}$$

59. Eſt autem ex natura differentialium completorum

$$\frac{d\mathrm{L}}{dy} = \frac{dl}{dx};\quad \frac{dm}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dy};\quad \frac{d\lambda}{dy} = \frac{dl}{dz};\quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{d\mathrm{M}}{dt}$$
$$\frac{d\mathrm{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dx};\quad \frac{dl}{dz} = \frac{d\lambda}{dy};\quad \frac{dn}{dx} = \frac{d\mathrm{N}}{dy};\quad \frac{d\nu}{dx} = \frac{d\mathrm{N}}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{L}}{dz} = \frac{d\lambda}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{N}}{dx} = \frac{d\mathrm{N}}{dt}$$
$$\frac{d\mathrm{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dx};\quad \frac{d\mathrm{N}}{dy} = \frac{dn}{dx};\quad \frac{dm}{dz} = \frac{d\mu}{dy};\quad \frac{d\nu}{dy} = \frac{dn}{dz};\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = \frac{d\mu}{dt};\quad \frac{d\mathfrak{N}}{dy} = \frac{dn}{dt}$$

quibus

quibus valoribus ſubſtitutis tres illae aequationes abibunt in has:

$$\left(\frac{dl-dM}{dt}\right)+u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right)+v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right)+w\left(\frac{dl-dM}{dz}+(l-M(L+m)+\lambda n-\mu N=0\right.$$

$$\left(\frac{d\lambda-dN}{dt}\right)+u\left(\frac{d\lambda-dN}{dx}\right)+v\left(\frac{d\lambda-dN}{dy}\right)+w\left(\frac{d\lambda-dN}{dz}\right)+(\lambda-N)(L+\nu)+l\mu-nM=0$$

$$\left(\frac{d\mu-dn}{dt}\right)+u\left(\frac{d\mu-dn}{dx}\right)+v\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+w\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+(\mu-n)(m+\nu)+M\lambda-Nl=0$$

60. Manifeſtum iam eſt, his tribus aequationibus ſatisfieri ſequentibus tribus valoribus:

$$l=M;\quad \lambda=N;\quad \mu=n$$

quibus continetur criterium, quod conſideratio ſollicitationum ſuppeditat. Hinc ergo ſequitur fore recepto deſignandi modo

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx};\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx};\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

hae autem ipſae ſunt illae conditiones, quae requiruntur, vt haec formula $udx+vdy+wdz$ ſit differentiale completum. Ex quo hoc criterium in eo conſiſtit, vt ternae celeritates u, v et w eiusmodi eſſe debeant functiones ipſarum x, y et z vna cum t, vt poſito tempore conſtante formula $udx+vdy+wdz$ integrationem admittat.

61. Cum ergo poſito tempore t conſtante, ſeu $dt=0$, ſit

$$du=Ldx+Mdy+Ndz$$
$$dv=Mdx+mdy+ndz$$
$$dw=Ndx+ndy+\nu dz$$

valores autem pro R, r et ϱ fiant:

$$R=-2(Lu+Mv+Nw+\mathfrak{L})$$
$$r=-2(Mu+mv+nw+\mathfrak{M})$$
$$\varrho=-1-2(Nu+nv+\nu w+\mathfrak{N})$$

 pro

pro ſtatu preſſionis p haec habebitur aequatio

$$\begin{aligned} dp = -dz - 2u(\mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dz) &= -dz - 2udu - 2vdv - 2wdw \\ -2v(\mathrm{M}dx + mdy + ndz) &\quad -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz \\ -2w(\mathrm{N}dx + ndy + vdz) & \\ -2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz & \end{aligned}$$

62. Quia vero eſt $\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}$; $\mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$; $\mathfrak{N} = \frac{dw}{dt}$; erit integrando:

$$p = \mathrm{C} - z - uu - vv - ww - 2\int\left(\frac{du}{dt}.dx + \frac{dv}{dt}.dy + \frac{dw}{dt}.dz\right).$$

Cum autem per conditionem inuentam ſit $udx + vdy + wdz$ integrabile, ponatur eius integrale $= \mathrm{S}$, quod, quoniam etiam tempus t inuoluere poteſt, ſit ſumto quoque t variabili:

$$d\mathrm{S} = udx + vdy + wdz + \mathrm{U}dt$$

eritque $\frac{du}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dx}$; $\frac{dv}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dy}$; $\frac{dw}{dt} = \frac{d\mathrm{U}}{dz}$; Quare cum ſit in genere ſumto tempore t conſtante, vti id quidem in ſuperiori integrali aſſumitur,

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}.dx + \frac{d\mathrm{U}}{dy}.dy + \frac{d\mathrm{U}}{dz}.dz = d\mathrm{U}$$

habebimus:

$$p = \mathrm{C} - z - uu - vv - ww - 2\mathrm{U}, \text{ ſiue}$$

$$p = \mathrm{C} - z - uu - vv - ww - 2.\frac{d\mathrm{S}}{dt}$$

63. Perſpicuum hic eſt, $uu + vv + ww$ exprimere quadratum verae puncti λ celeritatis ita, vt, ſi celeritas huius puncti vera dicatur $= \mathrm{V}$, habeatur pro preſſione iſta aequatio:

$$p = \mathrm{C} - z - \mathrm{VV} - \frac{2d\mathrm{S}}{dt}.$$

ad quam ergo inueniendam, primum formulae $udx + vdy + wdz$, quam completam eſſe oportet, quaeratur integrale S, hocque denuo differentietur, poſito ſolo tempore

pore t variabili, quod differentiale per dt diuiſum, dabit valorem formulae $\frac{ds}{dt}$, quae in expreſſionem pro ſtatu preſſionis p inuentam ingreditur.

64. Quodſi iam prius criterium, quo motus ſaltem poſſibilis continetur, hic adiungamus, ternae celeritates u, v, w eiusmodi functiones ternarum coordinatarum x, y et z vna cum tempore t eſſe debent, vt primo ſit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum; deinde vero, vt ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Hisque duabus conditionibus omnis fluidorum motus, ſiquidem denſitate inuariabili ſint praeditae, ſubiicitur. Praeterea vero, ſi ſumto etiam tempore t variabili, haec formula $udx + vdy + wdz + Udt$ fuerit differentiale completum, ſtatus preſſionis in puncto quocunque λ exprimitur, altitudine p, vt ſit:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U$$

ſiquidem fluidum grauitate naturali gaudeat, et planum BAL fuerit horizontale.

65. Si grauitati aliam directionem tribuiſſemus, ſiue etiam vires vtcunque variabiles aſſumſiſſemus, quibus ſingulae fluidi particulae ſollicitarentur, inde tantum diſcrimen in valorem preſſionis p eſſet ingreſſum, neque inde lex, quam ternae cuiusque puncti fluidi celeritates ſequi debent, vllam mutationem eſſet paſſa. Semper ergo, quaecunque fuerint vires ſollicitantes, ternae celeritates u, v, et w ita debent eſſe comparatae, vt formula $udx + vdy + wdz$ fiat differentiale completum, atque vt inſuper ſit $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Infinitis igitur modis conſtitui poterunt ternae celeritates

u, v et w, vt his duabus conditionibus ſatisfiat; atque tum preſſio fluidi in ſingulis punctis poterit aſſignari.

66. Multo difficilior autem foret quaeſtio, ſi, datis viribus ſollicitantibus, vna cum preſſione in quibusdam locis, ipſe motus fluidi in ſingulis punctis determinari deberet. Tum enim haberentur aliquot aequationes formae $p = C - z - uu - vv - ww - 2U$, ex quibus, cum conſtans C, tum vero ratio functionum u, v et w ita definiri deberet, vt non ſolum his caſibus iſtis aequationibus ſatisfieret, ſed etiam ante allatae regulae obſervarentur, quod opus vtique maximam calculi vim requireret. Conueniet igitur in genere in naturam functionum idonearum inquiri, quae vtrique criterio futurae ſint conformes.

67. Commodiſſime igitur incipiemus ab ipſa quantitate integrali, cuius differentiale eſſe oportet formulam $udx + vdy + wdz$ poſito tempore conſtante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipſarum x, y et z, tempore t in quantitatibus conſtantibus involuto; atque ſi haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz ſtatim praebebunt celeritates u, v et w, quae quidem praeſenti tempore conveniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae ſunt x, y et z. Quaeſtio autem huc redit: vt definiatur, quales functiones ipſarum x, y et z, pro S aſſumi debeant, vt etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; ſeu cum ſit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, vt ſit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

68. Quo-

68. Quoniam non patet, quomodo hoc generaliter praeſtari poſſit, caſus quosdam generaliores contemplabor. Sit igitur

$$S=(Ax+By+Cz)^n$$

eritque

$$\frac{dS}{dx}=nA(Ax+By+Cz)^{n-1} \text{ et } \frac{ddS}{dx^2}=n(n-1)AA(Ax+By+Cz)^{n-2}$$

ſimilesque erunt formae pro $\frac{ddS}{dy^2}$ et $\frac{ddS}{dz^2}$, vnde effici debet, vt ſit

$$n(n-1)(Ax+By+Cz)^{n-2}(AA+BB+CC)=0$$

cui primo ſatisfit, ſi vel $n=0$, vel $n=1$; ex quo iam duo valores idonei obtinentur, ſcilicet $S=$ Conſt. et $S=Ax+By+Cz$, vbi conſtantes A, B, C etiam tempus vtcunque in ſe complecti poſſunt.

69. Sin autem n neque $=0$, neque $=1$, neceſſe eſt, vt ſit: $AA+BB+CC=0$: tumque pro S valor idoneus erit

$$S=(Ax+By+Cz)^n$$

quicunque numerus pro exponente n ſumatur, quin etiam ipſum tempus t in n poterit ingredi. Patet etiam aggregatum quotcunque huiusmodi formularum idoneum valorem pro S praebere, ita, vt ſit:

$$S=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta z+\epsilon(Ax+By+Cz)^n+\zeta(A'x+B'y+C'z)^{n'}$$
$$+\eta(A''x+B''y+C''z)^{n''}+\theta(A'''x+B'''y+C'''z)^{n'''} \text{ etc.}$$

dummodo fuerit:

$$AA+BB+CC=0;\ A'A'+B'B'+C'C'=0;\ A''A''$$
$$+B''B''+C''C''=0 \text{ etc.}$$

70. Hinc valores idonei pro S ex inferioribus ordinibus, vbi coordinatae x, y, z, vel vnam, vel

duas, vel tres, vel quatuor habent dimenſiones, erunt ſequentes.

I. $S = A$

II. $S = Ax + By + Cz$

III. $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$
exiſtente $A + B + C = 0$

IV. $S = Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxxy + 3Fxxz + 3Hyyz + 6Kxyz + 3Exxy + 3Gxzz + 3Iyzz$
exiſtente $A + E + G = 0$; $B + D + I = 0$; $C + F + H = 0$

V. $S = \begin{cases} + Ax^4 + 6Dxxyy + 4Gx^3y + 4Hxy^3 + 12Nxxyz \\ + By^4 + 6Exxzz + 4Ix^3z + 4Kxz^3 + 12Oxyyz \\ + Cz^4 + 6Fyyzz + 4Ly^3z + 4Myz^3 + 12Pxyzz \end{cases}$

exiſtente $A + D + E = 0$ $G + H + P = 0$
$B + D + F = 0$ $I + K + O = 0$
$C + E + F = 0$ $L + M + N = 0$

71. Hinc perſpicuum eſt, quomodo hae formulae pro quolibet ordine ſe ſint habiturae: ſingulis ſcilicet terminis primo iidem dentur coefficientes numerici, qui iisdem terminis ex lege permutationum conveniunt, ſeu, qui oriuntur, ſi trinomium $x + y + z$ ad poteſtatem eiusdem ordinis eleuetur. Numericis autem coefficientibus adiungantur litterales indefiniti A, B, C, etc. Tum reiectis numericis diſpiciatur, quoties eiusmodi terni termini occurrunt $LZxx + MZyy + NZzz$, qui ſcilicet factorem communem Z ex variabilibus formatum habeant, totiesque ſumma coefficientium litteralium $L + M + N$ ſtatuatur nihilo aequalis. Ita cum pro poteſtate quinta habeatur.

$$S = \begin{cases} + Ax^5 + 5Dx^4y + 5\mathfrak{D}x^4z + 10Gx^3yy + 10\mathfrak{G}x^3zz + 20Kx^3yz + 30Nxyyzz \\ + By^5 + 5Exy^4 + 5\mathfrak{E}y^4z + 10Hx^2y^3 + 10\mathfrak{H}y^3zz + 20Lxy^3z + 30Oxxyzz \\ + Cz^5 + 5Fxz^4 + 5\mathfrak{F}yz^4 + 10Ixxz^3 + 10\mathfrak{I}yyz^3 + 20Mxyz^3 + 30Pxxyyz \end{cases}$$

ſequen-

ſequentes habebuntur coefficientium litteralium determinationes:

$A+G+\mathfrak{G}=0$; $D+H+O=0$; $\mathfrak{D}+I+P=0$

$B+H+\mathfrak{H}=0$; $E+G+N=0$; $\mathfrak{E}+\mathfrak{I}+P=0$; $K+L+M=0$

$C+I+\mathfrak{I}=0$; $F+\mathfrak{G}+N=0$; $\mathfrak{F}+\mathfrak{H}+O=0$

Simili modo pro ordine ſexto huiusmodi determinationes prodibunt 15, pro ſeptimo 21, pro octauo 28 et ita porro.

72. Iam formula prima $S=A$, quoniam coordinatas x, y et z plane non in ſe complectitur, ternas celeritates u, v, et w nihilo aequales praebebit, ſicque ſtatum fluidi quietum exhibebit. Preſſio tamen in quouis puncto pro variis temporibus vtcunque poterit eſſe variabilis. Cum enim A ſit functio quaecunque temporis, ad datum tempus t preſſio in puncto λ erit $p=C-\frac{2\,dA}{dt}-z$: qua formula eiusmodi fluidi ſtatus indicatur, vbi fluidum quouis momento a viribus quibuscunque ſollicitatur, quae tamen ſe ſemper in aequilibrio teneant, vt ab illis nullus motus in fluido oriri queat: vbi euenit, ſi fluidum vaſi fuerit incluſum, ex quo nusquam erumpere queat, atque in eo a viribus quibuscunque comprimatur.

73. Formula autem ſecunda $S=Ax+By+Cz$ differentiata, has praebebit puncti λ ternas celeritates:

$$u=A;\ v=B \text{ et } w=C.$$

Eodem ergo tempore omnia fluidi puncta pari motu feruntur ſecundum eandem directionem. Ex quo totum fluidum, perinde ac corpus ſolidum, mouebitur, quod ſolo motu progreſſiuo fertur. Diuerſo autem tempore

pore

pore huius motus tam celeritas, quam directio, vtcunque variari poterit, prout vires extrinſecus vrgentes exegerint. Preſſio ergo in puncto λ ad tempus t, cuius A, B, C ſunt functiones, erit $p = C - z - AA - CC - 2x.\frac{dA}{dt} - 2y.\frac{dB}{dt} - z\frac{dC}{dt}$.

74. Formula tertia $S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$, vbi eſt $A + B + C = 0$, has praebebit ternas puncti λ celeritates: $u = 2Ax + 2Dy + 2Ez$; $v = 2By + 2Dx + 2Fz$; $w = 2Cz + 2Ex + 2Fy$, ſeu $w = 2Ex + 2Fy - 2(A + B)z$. Hoc ergo caſu etiam eodem temporis momento diuerſa fluidi puncta diuerſo motu feruntur; ſucceſſu autem temporis etiam eiusdem puncti motus quomodocunque variabilis exiſtere poteſt, quia pro A, B, D, E, F functiones quascunque temporis t aſſumere licet. Multo maior autem varietas locum habebit, ſi functioni S valores magis compoſiti tribuantur.

75. Quia caſu ſecundo motus fluidi conueniebat cum motu corporis ſolidi progreſſiuo, quo ſcilicet vnoquoque momento ſingulae partes motu aequali ſibique parallelo feruntur: ſuſpicari liceat, in aliis caſibus motum fluidi, quoque cum motu corporis ſolidi, ſiue rotatorio, ſiue vtcunque anomalo conuenire poſſe. Satis igitur erit oſtendiſſe huiusmodi conuenientiam, praeter
Tab. IV. caſum ſecundum, nunquam locum habere poſſe. Vt
Fig. 2. enim hoc eueniret, neceſſe eſſet, vt pyramis $\pi\phi\varrho\sigma$ non ſolum aequalis, ſed etiam ſimilis fieret pyramidi $\lambda\mu\nu o$; ſeu vt foret:

$\pi\phi =$

$$\pi\Phi = \lambda\mu = dx = \sqrt{(QQ + qq + \Phi\Phi)}$$
$$\pi\varrho = \lambda\nu = dy = \sqrt{(RR + rr + \varrho\varrho)}$$
$$\pi\sigma = \lambda o = dz = \sqrt{(SS + ss + \sigma\sigma)}$$
$$\Phi\varrho = \mu\nu = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{((Q-R)^2 + (q-r)^2 + (\Phi-\varrho)^2)}$$
$$\Phi\sigma = \mu o = \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \sqrt{((Q-S)^2 + (q-s)^2 + (\Phi-\sigma)^2)}$$
$$\varrho\sigma = ro = \sqrt{(dy^2 + dz^2)} = \sqrt{((R-S)^2 + (r-s)^2 + (\varrho-\sigma)^2)}$$

adhibitis valoribus in §. 32. vſurpatis.

76. Ternae autem poſteriores aequationes, cum prioribus coniunctae, reducentur ad has:

$$QR + qr + \Phi\varrho = o;\ QS + qs + \Phi\sigma = o \text{ et } RS + rs + \varrho\sigma = o$$

ternae autem priores, ſi pro litteris Q, R, S, q, r, s, Φ, ϱ, σ valores in §. 34. aſſignati ſubſtituantur, terminique prae reliquis euaneſcentes praetermittantur, dabunt has aequationes:

$$1 = 1 + 2Ldt;\ l + M = o$$
$$1 = 1 + 2mdt;\ \lambda + N = o$$
$$1 = 1 + 2\nu dt;\ \mu + n = o$$

vnde fit $L = o$, $m = o$, et $\nu = o$, $M = -l$; $N = -\lambda$ et $n = -\mu$.

77. Celeritates ergo ternae cuiusque puncti λ eſſe deberent ita comparatae, vt foret

$$du = l\,dy + \lambda\,dz$$
$$dv = l\,dx + \mu\,dz$$
$$dw = \lambda\,dx + \mu\,dy$$

Verum ſecunda conditio motus fluidorum poſtulat, vt ſit $l = M$, $\lambda = N$ et $n = \mu$; vnde omnes coefficien-

tes l, λ et μ euaneſcent, celeritatesque u, v et w pro eodem tempore in omnibus fluidi punctis eaedem, ſeu conſtantes, prodibunt. Patet igitur, non niſi hoc caſu fluidi motum cum motu corporis ſolidi conuenire poſſe.

78. Vt autem effectus virium, quae extrinſecus in fluidum agunt, definiri poſſit, primum eae vires determinari debent, quae ad motum, quem fluido ineſſe aſſumimus, efficiendum requiruntur: his enim viribus eae, quae actu fluidum ſollicitant, aequiualentes ſtatui debent, ſupra autem §. 56. vidimus, in puncto λ ternas vires acceleratrices requiri, quae ibi ſunt relatae. Quare ſi fluidi elementum ibi concipiatur, cuius volumen, ſeu maſſa, ſit $= dxdydz$, vires motrices ad motum requiſitae erunt

$$\text{ſec. } AL = 2dxdydz(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L}) = 2dxdydz\left(u.\frac{du}{dx} + v.\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}\right)$$

$$\text{ſec. } AB = 2dxdydz(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M}) = 2dxdydz\left(u\frac{dv}{dx} + v.\frac{dv}{dy} + w.\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\text{ſec. } AC = 2dxdydz(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}) = 2dxdydz\left(u.\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w.\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}\right)$$

vnde per triplicem integrationem vires totales, quae totam fluidi maſſam ſecundum easdem directiones ſollicitare debent, colligentur.

79. Cum autem ſecunda conditio poſtulet, vt ſit $udx + vdy + wdz$ differentiale completum, cuius integrale ſit $= S$; ponatur poſito quoque tempore variabili, vt ante: $dS = udx + vdy + wdz + Udt$, vnde ob $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$; $\frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}$; $\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}$ etc. tres illae vires motrices euadent:

$$\text{ſec. } AL = 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + dU}{dx}\right)$$

$$\text{ſec. } AB = 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdwdU}{dy}\right)$$

$$\text{ſec. } AC = 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + dU}{dz}\right).$$

80. Po-

80. Ponatur nunc $uu+vv+ww+2U=T$, eritque T functio coordinatarum x, y, z; ponatur ergo poſito tempore conſtante,

$$dT=Kdx+kdy+udz$$

eruntque tres illae vires motrices elementi $dxdydz$

ſec. $AL=Kdxdydz$

ſec. $AB=k\,dxdydz$

ſec. $AC=k\,dxdydz$

triplici ergo integratione hae formulae per totam fluidi maſſam ſunt extendendae, vt inde vires omnibus aequiualentes earumque mediae directiones obtineantur. Verum haec diſcuſſio eſt altioris indaginis, cui hic non immoror.

81. Quantitas autem haec $T=uu+vv+ww+2U$, cuius in hoc calculo ratio eſt habenda, etiam ſimpliciorem formulam pro altitudine p preſſionem exprimente ſuppeditat; eſt enim $p=C-z-T$: ſiquidem ſingulae fluidi particulae a ſola grauitate vrgeantur Sin autem quaelibet particula λ a ternis viribus acceleratricibus ſollicitetur, quae ſint Q, q et Φ, ſecundum directiones axium AF, AB et AC reſpectiue agentes, et calculo, vt ſupra, ſubducto reperietur preſſio:

$$p=C+\int(Qdx+qdy+\Phi dz)-T$$

vnde patet differentiale $Qdx+qdy+\Phi dz$ completum eſſe debere, alioquin ſtatus aequilibrii, vel ſaltem poſſibilis, non daretur. Hanc autem conditionem in vires ſollicitantes Q, q et Φ competere oportere, a Cel. D^m. *Clairaut* iam praeclare eſt demonſtratum.

 82. En

82. En ergo principia vniuerſae doctrinae de motu fluidorum, quae etſi primo intuitu non admodum foecunda videantur, tamen fere omnia, quae adhuc tam in hydroſtatica, quam in hydraulica ſunt tradita, in ſe complectuntur, ita vt haec principia latiſſime patere ſint cenſenda. Quod quo clarius appareat, operae pretium erit oſtendere, quomodo cognita hydroſtaticae et hydraulicae praecepta ex hactenus traditis principiis plane ac dilucide conſequantur.

83. Conſideremus igitur primo fluidum in ſtatu quietis, ita vt ſit $u = 0$; $v = 0$ et $w = 0$, eritque preſſio in quouis fluido puncto λ, ob $T = 2U$,

$$p = C + \int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - 2U$$

vbi, cum U ſit functio ipſius temporis t, quod conſtans aſſumimus, quia preſſionem ad datum tempus inveſtigamus, haec quantitas U in ipſa conſtante C comprehendi poterit, ita vt ſit:

$$p = C + \int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz)$$

vbi Q, q et Φ ſunt vires particulam aquae λ ſecundum axes AL, AB et AC ſollicitantes.

84. Quoniam preſſio p non niſi a ſitu puncti λ, hoc eſt a coordinatis x, y et z, pendere poteſt, neceſſe eſt, vt $\int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz)$ ſit earum functio determinata, quae ergo integrationem admittat. Vnde primo patet, quod modo innui, fluidum in aequilibrio ſubſiſtere non poſſe, niſi vires, ſingula fluidi elementa ſollicitantes, ita fuerint comparatae, vt formula $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ ſit differentiale completum. Cuius ergo integrale ſi ponatur $= P$, erit preſſio in λ, $p = C + P$;

C+P: Ita ſi ſola adſit grauitas ſecundum directionem CA vrgens, erit $p=C-z$, vnde ſi preſſio in vno puncto λ conſtet, vnde conſtans C colligi queat, pro eodem tempore inde preſſio in omnibus omnino punctis definietur.

85. Interim tamen tempore fluente preſſio in eodem loco variari poterit, id quod ſcilicet eueniet, ſi vires aquam extrinſecus vrgentes, quarum ratio nondum eſt habita in iis viribus, quae in ſingula elementa ſingulatim agere aſſumuntur, fuerint variabiles, ita tamen, vt ſe mutuo in aequilibrio ſeruent, nullumque motum producant. Quod ſi autem hae vires nulli mutationi ſint obnoxiae, littera C denotabit quantitatem reuera conſtantem, neque a tempore t pendentem; eodemque in loco λ perpetuo eadem preſſio $p=C+P$ reperietur.

86. In huiusmodi ergo fluidi ſtatu permanente eius extrema figura, quae nullis viribus eſt expoſita, determinari poterit. In hac enim extremitate, qua fluidum ſibi eſt relictum, neque a parietibus vaſis, cui forte eſt incluſum, continetur, neceſſe eſt, vt preſſio ſit nulla. Habebitur ergo haec aequatio: $P=$ conſt. qua figura extremae ſuperficiei fluidi per relationem inter ternas coordinatas x, y et z, exprimetur. Atque ſi pro extremitate fuerit $P=E$, ob $C=-E$, in quouis alio loco λ interno erit preſſio $p=P-E$. Ita ſi particulae fluidi a ſola grauitate vrgeantur, ob $p=C-z$, pro extremitate ſuperficiei habebitur $z=C$, qua intelligitur, extremam ſuperficiem liberam eſſe horizontalem.

87. Deinde etiam omnia, quae adhuc de motu fluidi per tubos ſunt eruta, ex his principiis facile deducuntur. Tubi autem vel anguſtiſſimi conſiderari ſolent, vel tales aſſumuntur, vt per quamlibet ſectionem ad tubum normalem fluidum aequali motu transfluat: vnde haec regula naſcitur, vt celeritas fluidi in quouis tubi loco ſit eius amplitudini reciproce proportionalis. Sit igitur λ punctum quodcunque huiusmodi tubi,
Tab. IV. Fig. 2. cuius figura per geminam aequationem inter ternas coordinatas x, y et z exprimetur, ita vt inde pro quauis abſciſſa x, ambae reliquae y et z definiri queant.

88. Sit praeterea huius tubi amplitudo in $\lambda = rr$, in alio autem tubi loco fixo, vbi amplitudo ſit $= ff$, ſit tempore praeſente fluidi celeritas $= \upsilon$, de hinc autem elapſo tempuſculo dt euadat ea $= \upsilon + d\upsilon$ eritque ergo υ functio tempus t tantum, pariter ac $\frac{d\upsilon}{dt}$. Hinc ergo vera fluidi celeritas in λ erit tempore praeſenti $V = \frac{ff\upsilon}{rr}$. Cum nunc ex figura tubi dentur y et z per x, ſit $dy = \eta dx$ et $dz = \theta dx$; vnde ternae puncti fluidi in λ celeritates erunt ſecundum directiones AL, AB et AC ſequentes:

$$u = \frac{ff\upsilon}{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}};\ v = \frac{ff\upsilon}{rr} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}};\ w = \frac{ff\upsilon}{rr} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}}$$

hincque ſit $uu + vv + ww = VV = \frac{f^4 \upsilon\upsilon}{r^4}$: eſtque rr functio ipſius x, indeque pendentium y et z.

89. Cum nunc $udx + vdy + wdz$ debeat eſſe differentiale completum, cuius integrale poſuimus $= S$, erit:

$$dS = \frac{ff\upsilon}{rr} \cdot \frac{dx(1+\eta\eta+\theta\theta)}{\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}} = \frac{ff\upsilon}{rr} \cdot dx\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}.$$

At $dx\sqrt{(1+\eta\eta+\theta\theta)}$ exprimit elementum ipſius tubi,

ſi, quod ſi ponamus $= ds$, erit $dS = \frac{ffv\,ds}{rr}$: vnde cum hic tempus t conſtans ſit aſſumtum, cuius functio eſt v, quantitates autem s et rr non a tempore t, ſed tantum a figura tubi, pendeant, erit $S = v \int \frac{ff\,ds}{rr}$.

90. Ad preſſionem iam p, quae nunc in tubi puncto λ locum habet, inueniendam, conſiderari debet quantitas U, quae ex differentiatione quantitatis S oritur, ſi ſolum tempus t, vt variabile, tractetur, ita vt ſit $U = \frac{dS}{dt}$. Cum igitur formula integralis $\int \frac{ff\,ds}{rr}$ tempus t non inuoluat, erit vtique $\frac{dS}{dt} = U = \frac{dU}{dt} \int \frac{ff\,ds}{rr}$; ſicque erit ex §. 80:

$$T = \frac{f^4 vv}{r^4} + \frac{2\,dv}{dt} \int \frac{ff\,ds}{rr}$$

Quare poſitis quibuscunque viribus ſollicitantibus Q, q et Φ, erit preſſio in λ:

$$p = C + \int (Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz) - \frac{f^4 vv}{r^4} - \frac{2\,dv}{dt} \int \frac{ff\,ds}{rr}.$$

quae eſt ea ipſa formula, quae vulgo pro motu fluidi per tubos erui ſolet; atque adeo multo latius patens, quia vires quaecunque fluidum ſollicitantes hic ſunt aſſumtae, dum vulgo haec formula ad ſolam grauitatem adſtringitur. Interim hic probe eſt recordandum, ternas vires Q, q, et Φ neceſſario ita comparatas eſſe oportere, vt formula: $Q\,dx + q\,dy + \Phi\,dz$ ſit differentiale completum, ſeu integrationem admittat.

DE

DE MOTV ET REACTIONE AQVAE PER TVBOS MOBILES TRANSFLVENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Tab. V. Fig. 1. Conſidero hic tubum figurae cuiuscunque ARF, qui circa axem fixum AC motu quocunque in gyrum agatur, eumque aqua plenum, quae ex eius orificio F erumpat. Quaeritur itaque primum motus, quo aqua ſit effluxura, tum vero vis reactionis, quam tubus ab aqua transfluente quouis momento ſuſtineat.

2. Binae hae quaeſtiones ita inter ſe ſunt complicatae, vt altera ſine altera reſolui nequeat: ſi enim vim reactionis aquae in tubum definire velimus, motum aquae tanquam cognitum ſpectari oportet; motus autem determinatio reactionis cognitionem requirit.

3. Primum ergo motum aquae pro cognito aſſumam; atque vt ex eo cum motu tubi coniuncto vis reactionis determinari queat, duplices vires contemplari oportet: alteras, quibus aqua in tubo actu ſollicitatur, vel ob grauitatem, vel ob alias impulſiones, quibus extrinſecus ad motum vrgetur: alteras vero, quae ad motus, quem ineſſe aſſumimus, conſeruationem, ſecundum principia mechanica, requiruntur.

4. Si

4. Si enim vires, quibus aqua actu ad motum ſollicitatur, littera P complectamur, vires autem ad eius conſeruationem, requiſitas littera Q: vires autem reactionis littera R indicentur: quoniam tubus pari vi in aquam reagit; aqua hinc ſollicitabitur vi $= -R$, ſicque omnino ad motum, tam extrinſecus, quam ab ipſo tubo impelletur vi $= P - R$.

5. Haec ergo vis $P - R$ aequalis ſit neceſſe eſt ipſi vi Q, quae ad motus inſiti conſeruationem per principia mechanica requiritur. Vnde cum habeamus $P - R = Q$, obtinebimus $R = P - Q$, ſicque vis reactionis aequabitur viribus aquam actu extrinſecus impellentibus, demtis inde viribus ad motus conſeruationem requiſitis.

6. Principio hoc, cui omnis reactionis vis innititur, ſtabilito, inueſtigationem ordiri conueniet ab indagatione virium Q, quae ad conſeruationem eius motus, quem in aqua ineſſe aſſumimus, ſecundum principia mechanica requiruntur: inde ſcilicet, quod omnis motus mutatio certam virium actionem exigit.

7. Quod igitur primo ad motum tubi attinet, ponamus, elapſo iam a motus initio tempore $= t$, celeritatem orificii F, qua circa axem AC gyratur, debitam eſſe altitudini $= u$, ita vt u ſit functio quaecunque temporis iam elapſi t: vnde ſi diſtantia orificii ab axe CF ponatur $= b$, exprimet $\frac{\sqrt{u}}{b}$ celeritatem gyratoriam tubi

8. Deinde ſit v altitudo debita celeritati, qua aqua nunc quidem ex orificio F effluit. Hic autem $\sqrt{v}$ non veram aquae celeritatem deſignat, ſed eius

celeritatem relatiuam reſpectu tubi, qui ipſe moueri aſſumitur; motus enim verus componetur ex motu hoc relatiuo et ipſo tubi motu. Erit autem v etiam functio temporis t.

9. Si igitur amplitudo orificii F ponatur $= ff$, quoniam $\sqrt{v}$ eſt celeritas, qua aqua ex orificio effluit, temporis elemento dt aqua effluens ratione tubi conficiet ſpatiolum $= dt\sqrt{v}$; ideoque copia aquae hoc tempuſculo ex tubo exeuntis erit $= ffdt\sqrt{v}$.

10. Conſideretur nunc tubi punctum quodcunque R, in quo ſit amplitudo tubi $= zz$, quae ergo non a tempore t, ſed a loco puncti R in tubo pendebit: atque nunc quidem, vbi aqua ex orificio $F = ff$ effluere ponitur celeritate $= \sqrt{v}$, celeritas aquae in R, qua in tubo ſecundum Rr progreditur, erit $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$; quae cum motu gyratorio puncti R coniuncta, dabit veram celeritatem aquae in puncto R haerentis.

11. Concipiatur planum ad axem tubi AC normale per orificium F tranſiens, FCB, ad quod ex puncto R demittatur perpendicularis, ſeu axi motus AC parallela RQ, ſitque curua CQF proiectio tubi ARF in hoc plano facta, cuius corda CQ ponatur $= y$, quae cum exprimat diſtantiam puncti R ab axe AC, erit huius puncti celeritas gyratoria circa axem $= \frac{y\sqrt{u}}{b}$.

12. Cum nunc elapſo tempore $= t$, tubus ſitum ARF, eiusque proiectio ſitum CQF teneat, ponamus initio huius temporis proiectionem in ſitu CMB fuiſſe, indeque tempore t per angulum BCF $= \Phi$ circa axem AC eſſe promotam; orificium ergo F tempuſculo dt

proue-

prouehetur per ſpatiolum $bd\Phi$ ob $CB = CF = b$; eritque igitur $bd\Phi = dt\sqrt{u}$: ita vt etiam angulus Φ ſit functio ipſius temporis t.

13. Referamus curuam CMB ad rectam CB tanquam axem, ſitque M punctum ipſi Q analogum, ideoque $CM = CQ = y$; ac ponatur angulus $MCL = QCP = \theta$, qui erit functio ipſius y, non a tempore t pendens; vnde ducta ML ad CB normali, habebitur $CL = y\,\text{coſ.}\,\theta$, et $LM = y\,\text{ſin.}\,\theta$

14. Initio ergo temporis t ſitus puncti R, quod tum puncto M imminebat, his formulis definitur, vnde ſi eius altitudo ſupra planum BCF, ſcilicet perpendiculum RQ, ponatur $= r$, quod perpetuo idem manet, etiam r tanquam functio ipſius y ſpectari debet, ſicque ex natura functionum θ et r figura tubi determinatur.

15. Cum autem elapſo tempore t, punctum M ob motum gyratorium tranſlatum ſit in Q, erit angulus $MCQ = BCF = \Phi$, ideoque angulus $BCQ = \theta + \Phi$: vnde ſi ex Q ad rectam fixam CB ducatur penpendicularis QX, erit $CX = y\,\text{coſ}\,(\theta + \Phi)$ et $XQ = y\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi)$.

16. Situm ergo puncti R ternis coordinatis, rectis fixis CB, CD et CA inter ſe normalibus, parallelis definitum habemus, quae ſint: $CX = y\,\text{coſ.}\,(\theta + \Phi) = X$; $XQ = y\,\text{ſin.}\,(\theta + \Phi) = Y$ et $QR = r$, quarum illae duae tantum ab angulo Φ cum tempore variabili pendent; dum poſtrema a ſola variabili y pendet.

17. Progrediatur aquae particula nunc in R haerens tempuſculo dt per ſpatiolum Rr in tubo, dum

 tubus

tubus ipſe quoque motu angulari circa axem AC gyratur: ſitus ergo ſequens huius aquae particulae ſuperioribus formulis indicabitur, ſi tam y, quam Φ, pro variabilibus aſſumantur, ſcilicet $X + dX$; $Y + dY$ et $r + dr$ erunt coordinatae pro hoc ſitu.

18. Denotet m maſſam particulae nunc in R haerentis, et cum eius motus a variabilitate coordinatarum X, Y et r pendeat, ſi tam y quam tempus t pro variabili capiatur; tribus opus erit viribus ad motum huius particulae moderandum, quae ſecundum ternos axes CB, CD et CA erunt directae.

19. Ac ſecundum principia mechanica quidem, ſi elementum temporis dt capiatur conſtans, tres iſtae vires ita ſe habebunt.

I. Vis ſecundum directionem CA agens $= \frac{2mddr}{dt^2}$

II. Vis ſecundum directionem CB agens $= \frac{2mddX}{dt^2}$

III. Vis ſecundum directionem CD agens $= \frac{2mddY}{dt^2}$

20. Motus etiam verus particulae iſtius aquae ſecundum eaſdem directiones reſolutus, producet triplicem celeritatem:

I. Celeritatem ſecundum directionem CA $= \frac{dr}{dt}$

II. Celeritatem ſecundum directionem CB $= \frac{dX}{dt}$

III. Celeritatem ſecundum directionem CD $= \frac{dY}{dt}$

21. Ponamus autem elementum tubi $Rr = ds$, quod eſt ſpatiolum a particula aquae m tempuſculo in tubo percurſum; quia ergo celeritas huius particulae in tubo eſt $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, erit $ds = \frac{ffdt\sqrt{v}}{zz}$, ſeu $zzds = ffdt\sqrt{v}$. Eſt vero etiam, vti vidimus, $bd\Phi = dt\sqrt{u}$.

At

At differentiale ds a figura tubi pendet, ideoque per relationem inter y, θ et r definitur.

22. Cum igitur ſit $X = y \operatorname{coſ.}(\theta + \Phi)$ et $Y = y \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi)$, erit differentiando:

$$dX = dy \operatorname{coſ.}(\theta + \Phi) - y(d\theta + d\Phi) \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi)$$
$$dY = dy \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi) + y(d\theta + d\Phi) \operatorname{coſ.}(\theta + \Phi)$$

ac denuo differentiando:

$$ddX = ddy \operatorname{coſ.}(\theta + \Phi) - 2dy(d\theta + d\Phi) \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi)$$
$$- y(d\theta + d\Phi)^2 \operatorname{coſ}(\theta + \Phi) - y(dd\theta + dd\Phi) \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi)$$
$$ddY = ddy \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi) + 2dy(d\theta + d\Phi \operatorname{coſ.}(d\theta + \Phi)$$
$$- y(d\theta + d\Phi)^2 \operatorname{ſin.}(\theta + \Phi) + y(dd\theta + dd\Phi) \operatorname{coſ.}(\theta + \Phi)$$

23. Quodſi ergo hi valores in formulis ſuperioribus ſubſtituantur, habebuntur tam celeritates verae particulae aquae m, quam vires ad eius motum ſecundum ternas directiones CA, CB, et CD requiſitae. Quoniam autem hic motus rotatorius ſpectatur, non tam iſtas vires ipſas, quam earum momenta reſpectu axis CA ſunt quaerenda, vt inde vis aquae, qua motus tubi gyratorius afficitur, definiatur.

24. Vis igitur ſecundum directionem CA nullo modo rotationem afficit, ex vi ſecundum CB autem puncto R applicata naſcitur momentum $= \frac{2m\,ddX}{dt^2} \cdot y \operatorname{ſin}(\theta + \Phi)$, at ex vi ſecundum CD momentum $= \frac{2m\,ddY}{dt^2} y \operatorname{coſ.}(\theta + \Phi)$; quorum illud in plagam FD, hoc vero in plagam oppoſitam BF tendit, ſicque cum motus directione conueniet.

25. Momentum ergo ex his viribus coniunctim ortum, et in plagam BF tendens, erit $= \frac{2my}{dt^2}(ddY \operatorname{coſ.}$

$(\theta + \Phi) - ddX \sin.(\theta + \Phi)$, quod ſubſtitutis valoribus ſuperioribus abit in hanc formam:

$$\frac{2my}{dt^2}(2dy(d\theta + d\Phi) + y(dd\theta + dd\Phi))$$

ſiue $\frac{2m}{dt^2} d.yy(d\theta + d\Phi) = \frac{2m}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$.
in qua poſtrema formula nullius differentialis pro conſtanti aſſumti ratio habetur.

26. Ponamus iam particulam aquae m totum tubi elementum Rr implere, cuius capacitas eſt $= zz\,ds$; quo valore pro m ſubſtituto, ad elementi Rr motum requiritur vis, cuius momentum in plagam BF tendens ſit $= \frac{2zz\,ds}{dt} d.\frac{yy(d\theta + d\Phi)}{dt}$; cum autem ſit $zzds = ffdt\sqrt{v}$ et $bd\Phi = dt\sqrt{u}$, erit hoc momentum:

$2ff\sqrt{v}.d.(\frac{ffyyd\theta}{zzds}\sqrt{v} + \frac{yy\sqrt{u}}{b})$ et differentiatione abſoluta
$ffdv.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + 2ffv.d.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + \frac{ffyydu\sqrt{v}}{b\sqrt{u}} + \frac{4ffydy\sqrt{vu}}{b}$.

27. Hinc integrando colligi poterit, quantum momentum virium ad motum aquae in tubi portione AR contentae requiratur, quia autem haec integratio praeſens temporis punctum ſpectat, tempus t eiusque functiones tanquam quantitates conſtantes ſunt conſiderandae, ſolaeque eae, quae a variabilitate puncti R in tubo pendent, variabilium locum obtinebunt.

28. Quantitates ergo conſtantes in hac integratione primum erunt v et u, et quia functiones ſunt temporis t, eodem quoque pertinebunt earum differentiales $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$; quodſi ergo hoc modo has quantitates pro conſtantibus habendas a variabilibus ſeparemus, prodibit momentum illud ita expreſſum:

$$\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.yyd\theta + 2ffv.d.\frac{ffyyd\theta}{zzds} + \frac{du}{dt\sqrt{u}}.\frac{yyzzds}{b} + \frac{4\sqrt{vu}}{b}.ffydy.$$

29. In-

29. Integratione ergo inſtituta, aqua AR vires requirit ad ſuum motum, quarum momentum in plagam BF tendens erit:

$$\text{Conſt.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{u}} \int yyd\theta + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} \int yyzzds + 2f^4v . \frac{yyd\theta}{zzds} + \frac{2\sqrt{vu}}{b} . ffyy$$

vbi conſtans per integrationem ingreſſa ex termino aquae altero definiri debet, ita vt, ſi punctum R in tubo ibi capiatur, vbi aqua incipit, hoc momentum euaneſcat.

30. Extendatur hoc integrale per totum tubum, fiatque pro toto tubo: $\int yy\,d\theta = M$, et $\int yyzz\,ds = N$; et quia tum fit $y = b$; $zz = ff$; erit momentum pro omni aqua in tubo contenta requiſitum:

$$\text{Conſt.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} . M + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . N + 2ffv . \frac{bbd\theta}{ds} + 2bff\sqrt{vu}$$

vbi valor fractionis $\frac{bd\theta}{ds}$ ex directione orificii F, ſecundum quam aqua erumpit, reſpectu arcus BF definiri debet. Exprimit autem $\frac{bd\theta}{ds}$ coſinum anguli, quem vena aquae Ffe tubo exiens cum directione motus puncti F conſtituit.

31. In genere enim fractio $\frac{yd\theta}{ds}$ exprimit coſinum anguli, quem directio motus aquae in tubi puncto R, ſeu elemento Rr, cum directione motus ipſius puncti R, quo ob motum gyratorium mouetur, facit. Quare ſi hic angulus rRS, denotante RS directionem motus puncti R, ponatur $= \omega$, qui in orificio F abeat in α, erit $\frac{yd\theta}{ds} = \text{coſ.}\,\omega$, et pro orificio $\frac{bd\theta}{ds} = \text{coſ.}\,\alpha$.

32. Hinc pro aqua, portionem tubi AR occupante, habebitur momentum virium, in directionem BF, ſeu RS, tendens, hoc:

$$\text{Conſt.} + \frac{ffdv}{dt\sqrt{v}} \int yds\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{du}{bdt\sqrt{u}} . \int yyzzds + 2f^4v . \frac{y\,\text{coſ.}\,\omega}{zz} + \frac{2\sqrt{vu}}{b} . ffyy$$

ac

ac poſito pro omni aqua in tubo contenta:

$$\int y\,ds\,\text{coſ.}\,\omega = M \quad \text{et} \quad \int yyzz\,ds = N$$

erit momentum virium omni aquae conueniens:

$$\text{Conſt.} + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}.M + \frac{du}{b\,dt\sqrt{u}}.N + 2bff(v\,\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{vu})$$

33. Si ſuprema aqua in tubo haereat in E, ſitque huius puncti ab axe rotationis AC diſtantia $= c$, integralia $\int y\,ds\,\text{coſ.}\,\omega$ et $\int yyzz\,ds$ ita capi debent, vt euaneſcant puncto R in E tranſlato. Ac ſi amplitudo tubi in E ſit $= ee$; ibique angulus ω abeat in ε, fiet conſtans illa $= -2f^4v\frac{c\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{ee} - \frac{2\sqrt{vu}}{b}.ccff = -2cff(\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$ vnde momentum virium, toti aquae conueniens, erit

$$\frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}M + \frac{du}{b\,dt\sqrt{u}}.N + 2bff(v\,\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{vu}) - 2cff(\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b}).$$

34. Cum igitur hoc momentum ex illis viribus, quas ſupra ſub littera Q ſumus complexi, oriatur, ſit S momentum ex viribus aquam actu extrinſecus ſollicitantibus P natum, et in eandem plagam BF vergens, atque ex reactione aquae reſultabit virium momentum, ad motum tubi rotatorium accelerandum tendens,

$$S - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}}M - \frac{du}{b\,dt\sqrt{u}}.N - 2bff(v\,\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{vu}) + 2cff(\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b})$$

in quo effectus reactionis conſumitur.

35. Videmus ergo effectum reactionis non ſolum ab vtraque celeritate ipſa $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ pendere, ſed etiam ab vtriusque variabilitate, ſiue acceleratione, ſiue retardatione. Tum vero litterae M et N figuram et amplitudinem totius tubi inuoluunt, reliqui termini autem tantum a ſummitate aquae E et orificio F pendent, vnde ſi vterque motus fuerit vniformis figura

tubi

tubi nihil confert ad vim reactionis, tum enim, ob $dv=0$ et $du=0$, litterae M et N ex calculo euaneſcunt.

36. Vi ergo reactionis aquae in tubum definita, progrediamur ad ipſum aquae motum per tubum inueſtigandum: ac primo quidem vires, quibus quamuis aquae particulam in tubo ob motum, quem ineſſe aſſumimus, ſollicitari debere inuenimus, accuratius euolui opus eſt. Poſita autem particulae aquae in R haerentis maſſa $=m$, ternae vires, quibus ſollicitatur, ſunt: I. Secundum $CB=\frac{2m\,ddX}{dt^2}$; II ſec. $CD=\frac{2m\,ddY}{dt^2}$; III. ſec. $CA=\frac{2m\,ddr}{dt^2}$. Tab. V. Fig. 2.

37. Binas vires priores reſoluamus ſecundum directiones QS et QT, quarum illa in directum iacet cum CQ, haec vero ad QS eſt normalis. Iam, ob angulum $BCQ=\theta+\Phi$, erit vis $QS=\frac{2m}{dt^2}(ddX\,\mathrm{coſ.}(\theta+\Phi)+ddY\,\mathrm{ſin.}(\theta+\Phi))$ et vis $QT=\frac{2m}{dt^2}(ddY\,\mathrm{coſ.}\theta+\Phi)-ddX\,\mathrm{ſin.}(\theta+\Phi))$; valoribus ergo pro ddX et ddY inuentis ſubſtitutis, hae vires prodibunt:

I. Vis $QS=\frac{2m}{dt^2}(ddy-y(d\theta+d\Phi)^2)$

II. Vis $QT=\frac{2m}{dt^2}(2dy(d\theta+d\Phi)+y(dd\theta+dd\Phi))$.

38. Particula igitur aquae m in R iam cum ab his duabus viribus, tum a tertia ſecundum $CA=\frac{2m\,ddr}{dt^2}$ ſollicitari debet: quas vires porro ſecundum directionem tubi Rr, aliasque duas directiones ad tubum normales reſolui conuenit. Ducta autem Cq, erit $tq=dy$ et $Qt=-yd\theta$, vnde fit $\mathrm{ſin.}\,SQq=\frac{-yd\theta}{Qq}$ et $\mathrm{coſ.}\,SQq=\frac{dy}{Qq}$. Ducatur recta QN in plano BCF ad elementum Qq normalis; erit

$$\text{Vis } Qq = \text{vis } QS.\text{coſ}.SQq - \text{vis } QT.\text{ſin}.SQq$$
$$\text{Vis } QN = \text{vis } QS.\text{ſin}.SQq + \text{vis } QT\,\text{coſ}.SQq$$

39. Vires ergo ſecundum has duas directiones Qq et QN ex viribus ſuperioribus QS et QT ortae erunt:

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq\,dt^2}\big(dyddy - ydy(d\theta + d\Phi)^2 + 2ydyd\theta(d\theta + d\Phi) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big)$$

$$\text{II. Vis } QN = \frac{2m}{Qq\,dt^2}\big(-yd\theta ddy + yyd\theta(d\theta + d\Phi)^2 + 2dy^2(d\theta + d\Phi) + ydy(dd\theta + dd\Phi)\big)$$

ac prior quidem abit in hanc:

$$\text{I. Vis } Qq = \frac{2m}{Qq.dt^2}\big(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big)$$

40. Cum vis poſterior QN iam ſit ad directionem tubi quoque Rr normalis, ea relinquatur; ac ducta Rs elemento proiectionis Qq parallela erit $rs = dr$, et particula aquae in R vlterius vrgetur a viribus Rs $=$ vi Qq et $sr = \frac{2mddr}{dt^2}$. Hinc ducta rv ad Rr in plano Rq normali obtinebitur:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{ds\,dt^2}\big(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big) + \frac{2mdrddr}{ds\,dt^2}$$

$$\text{Vis } rv = \frac{2mdr}{Qq.ds\,dt^2}\big(dyddy + ydy(d\theta^2 - d\Phi^2) + yyd\theta(dd\theta + dd\Phi)\big) - \frac{2mQq.ddr}{ds\,dt^2}.$$

41. Eſt autem $Qq = \surd(dy^2 + yyd\theta^2)$ et $Rr = ds = \surd(dy^2 + yyd\theta^2 + dr^2)$;
vnde fit $dr^2 = ds^2 - dy^2 - yyd\theta^2$ et

$$drddr = dsdds - dyddy - ydyd\theta^2 - yyd\theta dd\theta$$

quo valore ſubſtituto, habebitur vis ſecundum directionem tubi:

$$\text{Vis } Rr = \frac{2m}{ds\,dt^2}\big(dsdds - ydyd\Phi^2 + yyd\theta dd\Phi\big)$$

quae,

quae, vt a conſideratione differentialis conſtantis dt liberetur, in hanc formam tranſit:

$$\text{Vis}\,\text{R}r = \frac{2m}{dt}\left(d.\frac{ds}{dt} - \frac{y\,dy\,d\Phi^2}{ds\,dt} + \frac{yy\,d\theta}{ds}\,d.\frac{d\Phi}{dt}\right)$$

42. Cum vis per maſſam, in quam agit, diviſa praebeat accelerationem, erit acceleratio aquae in R ſecundum directionem tubi tempuſculo dt producta

$$= \frac{2}{dt}d.\frac{ds}{dt} - \frac{2y\,dy\,d\Phi^2}{ds\,dt^2} + \frac{2yy\,d\theta}{ds\,dt}\,d.\frac{d\Phi}{dt}$$

Haec ſcilicet acceleratio requiritur ad motum aquae eum producendum, quem ei ineſſe aſſumimus, vna cum motu ipſius tubi.

43. Haec igitur acceleratio aequalis eſſe debet ei, quae aquae in R verſanti actu inducitur; ac primo quidem haec aqua ſollicitatur a preſſione aquae. Ponamus ergo, aquam in R in pari ſtatu compreſſionis verſari, ac ſi ipſi incumberet columna aquea altitudinis $= p$. in r igitur ſtatus compreſſionis exprimitur altitudine $p + dp$, vnde acceleratio orietur $= \frac{-dp}{ds}$.

44. Praeterea autem aqua in R haerens a propria grauitate vrgetur. Quodſi ergo axem CA horizonti verticaliter inſiſtentem aſſumamus, a grauitate orietur acceleratio ſecundum directionem tubi Rr, quae eſt $= \frac{-dr}{ds}$; vtraque ſcilicet haec acceleratio abſoluitur tempuſculo dt, quo elementum $Rr = ds$ confici aſſumimus.

45. Cum igitur acceleratio ante inuenta aequalis eſſe debeat accelerationi, quae aquae in R actu inducitur, et quae eſt $\frac{-dp}{ds} - \frac{dr}{ds}$, vtrinque per ds multiplicando habebimus hanc aequationem:

$$-dp-dr=\frac{ds}{dt}d\,\frac{ds}{dt}-\frac{2ydyd\Phi^2}{dt^2}+\frac{2yyd\Phi}{dt}d.\frac{d\Phi}{dt};$$

ſiue

$$-dp=dr+d.\frac{ds^2}{dt^2}-\frac{2ydyd\Phi^2}{dt^2}+\frac{2yyd\Phi}{dt}d.\frac{d\Phi}{dt}.$$

46. Eſt autem $\frac{ds}{dt}=\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ et $\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\sqrt{u}}{b}$, vnde, ob $dt=\frac{zzds}{ff\sqrt{v}}$, ſequentem obtinebimus aequationem, qua ſtatus compreſſionis aquae in ſingulis tubi punctis determinatur:

$$-dp=dr+d\,\frac{f^4v}{z^4}-\frac{2uydy}{bb}+\frac{2ffyyd\theta\sqrt{v}}{zzds}d.\frac{\sqrt{u}}{b};$$

ſiue:

$$dp=-dr-d.\frac{f^4v}{z^4}+\frac{2uydy}{bb}-\frac{ffyyd\theta du\sqrt{v}}{bzzds\sqrt{u}}$$

atque differentiali ipſius $\frac{f^4v}{z^4}$ euoluto, erit:

$$dp=-dr-\frac{f^4dv}{z^4}+\frac{4f^4vdz}{z^5}+\frac{2uydy}{bb}-\frac{ffyyd\theta du\sqrt{v}}{bzzds\sqrt{u}}.$$

47. Quodſi iam hinc ſtatum preſſionis, qui nunc in tubo locum habet, determinare velimus, tempus t et quantitates inde pendentes v, u, vna cum $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ pro conſtantibus habere debemus: vnde, quantitatibus variabilibus a conſtantibus ſeparatis, habebimus:

$$dp=-dr-\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\cdot\frac{ds}{zz}+4f^4v\cdot\frac{dz}{z^5}+\frac{2u}{bb}\cdot ydy-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\cdot yyd\theta.$$

48. Haec iam aequatio integrata dabit ſtatum preſſionis aquae in loco tubi R, qui nunc locum habet:

$$p=C-r-\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\int\frac{ds}{zz}-\frac{f^4v}{z^4}+\frac{uyy}{bb}-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\int yyd\theta$$

Tab. V. Fig. 1. Ac ſi, vt ante, w denotet angulum, quem directio motus aquae in tubo R, cum directione motus ipſius puncti R facit, ſeu angulum rRS, ob $yd\theta=ds\,\text{coſ.}\,w$, habebimus:

$$p=C-r-\frac{f^4v}{z^4}+\frac{uyy}{bb}-\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\int\frac{ds}{zz}-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\int yds\,\text{coſ.}\,w.$$

49. Cum, integratione per totum tubum, qua aqua eſt repletus, peracta, iam ſupra poſuerimus $\int yds\,\text{coſ.}\,w=M$, fit

ſit quoque nunc $\int\frac{ds}{zz}=L$, et quia puncto R in F translato ſit $r=0$ $zz=ff$ et $y=b$, erit ſtatus preſſionis in ipſo orificio $=C-v+u-\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.L-\frac{du}{bdt\sqrt{u}}.M$; qui cum debeat eſſe nullus, habebimus valorem conſtantis

$$C=v-u+\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.L+\frac{du}{bdt\sqrt{u}}.M$$

50. Hinc ergo ſtatus compreſſionis in loco quocunque tubi R erit

$$p=v\left(1-\frac{f^4}{z^4}\right)-u\left(1-\frac{yy}{bb}\right)-r+\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}\left(L-\int\frac{ds}{zz}\right)+\frac{du}{bdt\sqrt{u}}\left(M-\int yds\,\mathrm{coſ.}\,w\right)$$

Hinc ergo in ſuprema aquae ſuperficie E, vbi ſit $y=e$; $zz=ee$ et integralia $\int\frac{ds}{zz}=0$; $\int yds\,\mathrm{coſ.}\,w=0$; ſi eleuatio puncti E ſupra baſin horizontalem BCF ſeu ſupra orificium F ponatur $=a$, erit ſtatus preſſionis in ſummitate aquae E=

$$v\left(1-\frac{f^4}{e^4}\right)-u\left(1-\frac{ee}{bb}\right)-a+\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.L+\frac{du}{bdt\sqrt{u}}.M$$

51. Si igitur aqua in E a nulla vi vrgeatur, preſſio ibi pariter in nihilum abire debet, vnde habebitur haec aequatio:

$$v\left(1-\frac{f^4}{e^4}\right)-u\left(1-\frac{ee}{bb}\right)-a+\frac{ffdv}{dt\sqrt{v}}.L+\frac{du}{bdt\sqrt{u}}.M=0$$

ex qua ipſe aquae motus in tubo ad quoduis tempus definiri poterit; ſi quidem motus gyratorius tubi fuerit cognitus. Cum enim L et M ſint quantitates conſtantes, duae tantum variabiles inſunt in hac aequatione v et t, quia u eſt functio ipſius t.

52. Aſſumimus autem hic tubum conſtanter ad idem punctum E vsque aqua repletum conſeruari, quod continuo nouam aquam affundendo fieri concipiendum eſt. Verum, vt calculus ſubſiſtere poſſit, neceſſe eſt, vt

aqua affuſa perpetuo eadem celeritate accedat, qua aqua in E quouis momento iam actu mouetur.

53. Ponamus ipſum tubum motu vniformi circa axem verticalem CA in gyrum agi, ita vt u ſit quantitas conſtans, ac plerumque mox aqua e foramine F motu vniformi erumpet. Quod igitur cum euenit, habebitur haec aequatio:

$$v = \frac{a + u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{g^4}}$$

ex qua, quanta celeritate tum aqua e tubo ſit erumpura, patet.

54. Hoc autem aquae ſtatu, cum aqua a nullis aliis viribus praeter grauitatem extrinſecus ſollicitetur, ex grauitate autem nullum momentum, reſpectu axis CA oriatur, erit S = 0, et momentum, ex reactione aquae, pro tubo in plagam BF conuertendo, natum, erit ob $dv = 0$ et $du = 0$ ex §. 54.

$$-2bff(v\,\mathrm{coſ}.\,\alpha + \sqrt{vu}) + 2cff\left(\frac{ffv\,\mathrm{coſ}.\,\varepsilon}{ee} + \frac{c\sqrt{vu}}{b}\right)$$

55. At hoc caſu ſuprema aquae ſuperficies in E horizontalis erit, eiusque prima motus directio verticalis, vnde ε ſit angulus rectus; et deſignante α angulum, quem vena aquae erumpens Ff cum directione motus ipſius orificii F conſtituit, erit iſtud momentum reactionis

$$-2bff(v\,\mathrm{coſ}.\,\alpha + \sqrt{vu}) + \frac{2ccff\sqrt{vu}}{b} = 2bff\left(\left(\frac{cc}{bb} - 1\right)\sqrt{vu} - v\,\mathrm{coſ}\,\alpha\right)$$

56. Hoc ergo momentum ad tubum in plagam BF circumagendum erit fortiſſimum, ſi angulus α fiat 180°, ſeu ſi vena aquae erumpentis Ff directe retrorſum

ſum vergat ſecundum tangentem circuli FB: hoc itaque caſu ob $\cos.\alpha = -1$, hoc momentum erit $= 2bff$ $(v + (\frac{ee}{bb} - 1)\sqrt{vu})$: eſtque vti vidimus

$$v = \frac{a + u(1 - \frac{cc}{bb})}{1 - \frac{f^4}{e^4}}$$

57. Notandum autem eſt, eſſe debere $ff < ee$, ſeu orificium tubi in F minus eius amplitudine ſuprema in E; alioquin enim motus aquae effluentis nunquam ad vniformitatem redigeretur, ſed motu continuo accelerato exiret, ſi quidem, vti aſſumimus, iugiter ſupra in E ſufficiens aquae copia, et quidem motu conuenienti, affundatur.

58. Sit igitur $ff < ee$, et ponatur $1 - \frac{f^4}{e^4} = \mu$ atque $1 - \frac{cc}{bb} = \nu$, ita vt ſit μ numerus vnitate minor, eritque $v = \frac{a + \nu u}{\mu}$, et momentum ex reactione aquae natum

$$= 2bff(\frac{a + \nu u}{\mu} - \nu\sqrt{\frac{u(a + \nu u)}{\mu}})$$

Quodſi ergo ſummitas aquae E in ipſo axe AC reperiatur, vt ſit $c = 0$, erit $\nu = 1$, ac ſi amplitudo in E multis vicibus maior ſit, quam amplitudo foraminis ff, erit ſatis prope $\mu = 1$.

59. Quoniam aqua in E ſubſidit in tubo celeritate $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee}$, ſimulque cum tubo circa axem AC in gyrum agitur celeritate $= \frac{c\sqrt{u}}{b}$; eius vera celeritas debita erit altitudini $= \frac{f^4 v}{e^4} + \frac{ccu}{bb} = (1 - \mu)v + (1 - \nu)u$ hoc eſt, pro v ſubſtituto valore $\frac{a + \nu u}{\mu}$, altitudini $= \frac{(1 - \mu)a}{\mu} + \frac{(\mu + \nu - 2\mu\nu)u}{\mu}$. Neceſſe ergo eſt, vt aqua in

in tubum continuo infundenda ex tanta altitudine ſit delapſa.

60. Si g ſit altitudo, ex qua graue vno minuto ſecundo delabitur, erit quantitas aquae, quae ſingulis minutis ſecundis per orificium F effluit, $= 2ff\sqrt{gv}$ $= 2ff\sqrt{\frac{g(a+\nu u)}{\mu}}$. Quae quantitas ſi dicatur $=$ D, erit $2ff = \frac{D\sqrt{\mu}}{\sqrt{g(a+\nu u)}}$; ideoque momentum reactionis prodibit:

$$= \frac{Db}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{a+\nu u}{\mu}} - \nu\sqrt{u}\right).$$

61. Si ponamus tubum EF motu ſuo gyratorio abſoluere circa axem CA, m reuolutiones ſingulis minutis ſecundis, quia punctum F vno minuto ſecundo conficit ſpatium $= 2\sqrt{gu}$, circulique ab eo deſcripti peripheria eſt $2\pi b$, erit $m = \frac{\sqrt{gu}}{\pi b}$; ideoque $mb = \frac{\sqrt{gu}}{\pi}$, quo valore loco b ſubſtituto, erit momentum ex reactione aquae ortum:

$$\frac{D}{\pi m}\left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u\right)$$

62. Hoc ergo momentum valebit reſiſtentiam quandam, quae motui tubi reluctatur, ſuperare. Ponamus ergo, momentum huius reſiſtentiae eſſe $= Fk$, eamque ita cum tubo eſſe connexam, vt ſingulis minutis ſecundis circa ſuum peculiarem axem conficiat n reuolutiones, erit Fk per n multiplicatum aequale momento reactionis aquae per numerum m multiplicato: ſicque habebitur

$$nFk = \frac{D}{\pi}\left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u\right) \text{ ſiue}$$

$$2\pi nFk = 2D\left(\sqrt{\frac{u(a+\nu u)}{\mu}} - \nu u\right)$$

63. Quem-

63. Quemadmodum ex copia aquae ſingulis minutis ſecundis affluentis D, quantitas orificii F ita determinatur, vt ſit:

$ff = \frac{D\sqrt{\mu}}{2\sqrt{g(a+\nu u)}}$; ita ob $\frac{ff}{ee} = 1 - \mu$, erit $ee = \frac{D\sqrt{\mu}}{2\sqrt{(1-\mu)g(a+\nu u)}}$. Deinde quia eſt $b = \frac{\sqrt{gu}}{\pi m}$, et $c = b\sqrt{(1-\nu)}$, erit $c = \frac{\sqrt{(1-\nu)gu}}{\pi m}$.

64. Cum deinde aqua, quae ſupra iugiter in tubum affunditur, delapſa eſſe debeat ex altitudine $= \frac{a}{\mu} - a + (1-2\nu)u + \frac{\nu u}{\mu}$; ſuprema aquae ſuperficies, vnde aqua in tubum affluit, ſupra orificium F eleuata erit ad altitudinem $= \frac{a}{\mu} + (1-2\nu)u + \frac{\nu u}{\mu}$: quae altitudo ſi dicatur $= b$ erit $\frac{a}{\mu} = b - (1-2\nu)u - \frac{\nu u}{\mu}$, atque b exprimit lapſum totum aquae, quae ad hoc negotium adhiberi poteſt.

65. Introducta igitur hac tota lapſus altitudine b habebimus inter reſiſtentiam Fk et reactionem aquae hanc aequationem:

$$2\pi n F k = 2D(\sqrt{u(b-(1-2\nu)u)} - \nu u);$$

vbi $2\pi n F k$ deſignat effectum totum, qui a vi reactionis aquae produci poteſt.

66. Patet ergo, hunc effectum a numero ν ita pendere, vt in certo caſu is fiat maximus, id quod eueniet, ſi capiatur $\nu = 1 - \frac{b}{2u}$, vnde fit $b-(1-2\nu)u = a$; atque maximus effectus prodit:

$$2\pi n F k = 2D(1-\nu)u = Db,$$

ita vt maximus effectus ipſi producto Db ſit aequalis, quod ſcilicet oritur, ſi diſpendium aquae D per totam altitudinem b multiplicetur.

67. Poſito autem $\nu = 1 - \frac{b}{2u}$, fit $\frac{a}{\mu} = u - \frac{\nu u}{\mu} = u - \frac{u}{\mu} + \frac{b}{2\mu}$ ideoque $a = \frac{1}{2}b - (1-\mu)u$; ita vt hoc caſu altitudo tubi a minor eſſe debeat ſemiſſe totius altitudinis lapſus b ob $\mu < 1$. Porro erit $\frac{cc}{bb} = \frac{b}{2u}$; et $b = \frac{\sqrt{g}u}{\pi m}$; atque $c = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}gb}}{\pi m}$ Ac denique $ff = \frac{D}{2\sqrt{gu}}$ et $ee = \frac{ff}{\sqrt{(1-\mu)}} = \frac{D}{2\sqrt{(1-\mu)gu}}$, quae ſunt determinationes, vt vis reactionis maxinmum effectum conſequatur.

68. Cum tota altitudo lapſus ſit $= b$, altitudo autem tubi $= a$, erit $b - a$ altitudo vaſis, ex quo aqua continuo in tubum influit. Quia autem aqua ex hoc vaſe non perpendiculariter in tubum cadere debet, quaeri neceſſe eſt angulum obliquitatis, ſub quo aqua in tubum eſt dirigenda.

Tab. V. Fig. 3. 69. Sit igitur ABCD vas, ex quo aqua per tubum inclinatum CE in tubum mobilem deriuatur; ac primo altitudo huius vaſis AC cum altitudine tubi affixi CH, ſeu AH, aequari debet ipſi $b - a$. Tum quia celeritas aquae in E exeuntis verticalis eſt ad celeritatem horizontalem, vt CH ad HE, debet eſſe CH : HE $= \frac{ff\sqrt{v}}{ee} : \frac{c\sqrt{u}}{b} = \sqrt{(1-\mu)v} : \sqrt{(1-\nu)u}$, hoc eſt CH : HE $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(a+\nu u)}{\mu}} : \sqrt{(1-\nu)u} = \sqrt{(1-\mu)(b-u+2\nu u)} : \sqrt{(1-\nu)u}$.

70. Vel ſi altitudo a pro cognita aſſumatur, ob $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$ erit $\frac{a + \nu u}{\mu} = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; ideoque ratio iſta abibit in hanc: CH : HE $= \sqrt{(1-\mu)(\nu b + a - 2\nu a)} : \sqrt{(1-\nu)(\mu b - a)}$. Caſu autem maximi effectus, quo

$\nu = 1$

$y = 1 - \frac{b}{2u}$ et $u = \frac{\frac{1}{2}b - a}{1 - \mu}$, erit $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$ et $1 - \nu = \frac{(1-\mu)b}{b - 2a}$:

vnde fit:

$$CH : HE = \sqrt{(1-\mu)(\mu b - a)} : \sqrt{\frac{(1-\mu)b}{b-2a}(\mu b - a)}$$

ſeu $CH.\ HE = \sqrt{(b - 2a)} : \sqrt{b} = \sqrt{(1 - \frac{2a}{b})} : 1.$

71. Quantitas orificii C inde determinatur, quod tantum inde aquae effluere debet, quantum ex tubo mobili effunditur; vnde ſi amplitudo huius orificii ponatur $= ii$, erit $ii\sqrt{(b-a)} = ff\sqrt{v}$, ſeu

$$ii = ff\sqrt{\frac{a + \nu u}{\mu(b-a)}} = ff\sqrt{\frac{\nu b + a - 2\nu a}{(\mu + \nu - 2\mu\nu)(b-a)}} = ee\sqrt{\frac{(1-\mu)(\nu b + a - 2\nu a)}{(\mu + \nu - 2\mu\nu)(b-a)}} = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$$

Caſu autem maximi effectus, quo $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$, reperietur:

$$ii = ee\sqrt{\frac{b - 2a}{2b - 2a}};$$ ita vt ſit $ii < ee$.

72. Quoniam autem tubus EF eſt mobilis, huic aquae influxui mox ſe ſubduceret; cui incommodo, vt medela afferatur, ingens tuborum EF numerus ſimul circa axem AC diſponatur, vt ſuperne in E ſuperficiem aquae continuam conſtituant; ſupra quam vas immobile, ſeu aquae receptaculum, ita immineat, vt ex eo circum circa per tubos inclinatos aqua continuo infundatur. Ita enim tubi mobiles aquae copiam ſufficientem iugiter accipient, idque ſub debita inclinatione. Tab. V. Fig. 1.

73. Hinc ergo eiusmodi machina naſcetur, qualem figura 4[ta] repraeſentat. OHAC eſt axis verticalis, circa quem vas conoidicum BBFF in gyrum agitur; hoc vas intra exteriorem ſuperficiem cauitatem habet EEEE ad aquam recipiendam aptam, intus autem circa axem ſpatium vacuum relinquit. Circa oram au- Tab. V. Fig. 4.

 tem

tem inferiorem plures habet tubulos F, F, F, e quibus aqua emittitur perpendiculariter ad reſpectiua plana verticalia ACF.

74. Supra hoc vas circa axem diſponitur vas immobile DDII locum receptaculi tenens, ex quo aqua continuo per tubos inclinatos I*i*, I*i*, in vas inferius influat, vt hoc modo vas inferius mobile iugiter plenum conſeruetur. GGG exhibet ſupremam aquae ſuperficiem in hoc vaſe immobili, quod pariter circa axem OA ſpatium vacuum relinquit.

75. Statim ergo atque aqua ex vaſe inferiori per orificia *f*, *f* effluet, hoc vas ob vim reactionis in gyrum agetur, idque tanta vi, vt reſiſtentiam quandam ſuperare valeat. Quemadmodum igitur haec machina inſtructa eſſe debeat, vt maximum effectum praeſtet, ex ante allatis breuiter repetamus.

76. Sit igitur tota aquae GG ſupra orificia *f*,*f*, altitudo HC$=h$, altitudo vaſis inferioris mobilis AC$=a$, eius baſis infimae ſemidiameter CF$=b$, ſuperioris AC$=c$, vel potius c exprimat diſtantiam mediam ab axe inter oram limbi EE aquam continentis, exteriorem et interiorem. Huius autem totius limbi amplitudo ſit $=ee$, et ſumma omnium orificiorum inferiorum *f*, *f* aquam eiicientium $=ff$.

77. Praeterea ſit D aquae copia, quae ex baſe ſuperiori ſingulis minutis ſecundis in vas inferius effunditur, et g exprimat altitudinem, per quam graue vno minuto ſecundo delabitur. Tum vero hoc vas quoque minuto ſecundo circa axem abſoluat m reuolutiones. Deinde ſit Fk momentum reſiſtentiae, cui machina

china ſuperandae par eſt, quae reſiſtentia circa peculiarem axem mobilis conficiat m reuolutiones, ſingulis minutis ſecundis.

78. Sit $\sqrt{v}$ celeritas, qua aqua ex orificiis f, f, erumpit, et $\sqrt{u}$ celeritas, qua haec ipſa orificia circa axem AC gyrantur. Deinde poſuimus breuitatis gratia $\mu = 1 - \frac{f^4}{e^4}$ et $\nu = 1 - \frac{cc}{bb}$: haeque ſunt quantitates, quae in calculum huius machinae ingrediuntur, quaeque, quemadmodum inter ſe determinentur, videamus.

79. Primum autem machinam in genere ſpectemus, ſepoſito effectu maximo: tunc igitur ſequentes determinationes locum habent:

$ff = ee\sqrt{(1-\mu)}$; $c = b\sqrt{(1-\nu)}$, $u = \frac{\mu b - a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$; $v = \frac{\nu b + a - 2\nu a}{\mu + \nu - 2\mu\nu}$ $b = \frac{\sqrt{g}(\mu b - a)}{\pi m \sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}$: $ff = \frac{D\sqrt{(\mu + \nu - 2\mu\nu)}}{2\sqrt{g(\nu b + a - 2\nu a)}}$; et effectus machinae per hanc aequationem indicabitur:

$$\pi n F k = D\left(\frac{\nu(\mu b - a)(\nu b + 1 - 2\nu a) - \nu(\mu b - a)}{\mu + \nu - 2\mu\nu}\right)$$

80. Denique ſi ſumma omnium orificiorum i, i, per quae aqua ex receptaculo in vas inferius mobile infunditur, ponatur $= ii$, debet eſſe $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$; et tubi Ii ita debent eſſe inclinati ad horizontem, vt anguli inclinationis huius tangens ſit $= \sqrt{\frac{(1-\mu)(\nu k + a - 2\nu a)}{(1-\nu)(\mu b - a)}}$. Quo plures autem fuerint huiusmodi tubi Ii, eo melius erit, quin etiam, ſi plane eſſent inter ſe contigui, optimum foret.

81. Vt iam effectus prodeat maximus, ſtatui debet $\nu = \frac{\mu b - 2a}{b - 2a}$, eritque effectus $2\pi n F k = Db$. Tum vero habebitur $ee = \frac{ff}{\sqrt{(1-\mu)}}$; $c = \frac{b\sqrt{(1-\mu)b}}{\sqrt{(b-2a)}}$; $u = \frac{b-2a}{2(1-\mu)}$;

 $v =$

$v = \frac{b-2a}{2(1-\mu)}$; $b = \frac{\sqrt{g(b-2a)}}{\pi m \sqrt{2(1-\mu)}}$; $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m \sqrt{2}}$; $ff = \frac{D\sqrt{(1-\mu)}}{\sqrt{2g(b-2a)}}$; $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$; $ee = \frac{D}{\sqrt{2g(b-2a)}}$, et tangens inclinationis ad horizontem tubulorum $Ii = \sqrt{(1 - \frac{2a}{b})}$.

82. Cum altitudo vaſis AC ſemiſſem totius altitudinis ſuperare nequeat; tum etiam ipſi ſemiſſi aequalis eſſe nequit, niſi ſit $\mu = 1$, et amplitudo EE quaſi infinities maior, quam ſumma omnium orificiorum ff. Hoc autem caſu $a = \frac{1}{2}b$, erit $u = v = \frac{bbb}{2cc}$; $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m \sqrt{2}}$; $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}} = \frac{D}{2\pi mb}$; $ii = \frac{D}{\sqrt{2gb}} = \frac{b}{c}ff$; et inclinatio tubulorum Ii ad horizontem euaneſcit. Quantitates ergo b et c arbitrio noſtro relinqui videntur; ſed quia ee prae ff eſt infinitum, etiam valor ipſius c infinitus ſit neceſſe eſt, tum autem fit $m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c \sqrt{2}}$.

83. Quoniam ſupremi limbi EEE, qui omnia tuborum aquam deferentium orificia ſuperiora continet, amplitudo prae c non admodum notabilis eſſe poteſt, propterea quod motus aquae in eo nimis eſſet inaequalis, quam vt cum motu affluentis aquae per tubos Ii conuenire poſſet, ſit 2γ latitudo huius limbi, ſeu $c - \gamma$ radius interioris circuli, et $c + \gamma$ exterioris, ita vt γ prae c ſit quantitas valde parua, et amplitudo huius limbi erit $\pi(c+\gamma)^2 - \pi(c-\gamma)^2 = 4\pi c\gamma = ee$.

84. Hoc poſito, ſi machina ad effectum maximum ſit accommodata, quia habemus:

$$ee = \frac{D}{\sqrt{2g(b-2a)}} = 4\pi c\gamma \text{ et } c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m \sqrt{2}} \text{ ſeu, } m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c \sqrt{2}}$$

ſumtis c et γ pro quantitatibus cognitis, erit:

$$\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2g}}, \text{ ideoque } \frac{b}{c} = \frac{D}{4\pi \cdot \gamma\sqrt{2gb(1-\mu)}}$$

$$\text{et } u = v = \frac{DD}{64(1-\mu)\pi\pi cc\gamma\gamma g} \text{ et } ff = 4\pi c\gamma\sqrt{(1-\mu)}:$$

tum

tum vero $ii = \frac{D}{2\sqrt{g(b-a)}}$, et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{D}{4\pi c\sqrt{2gb}}$, ac denique $n = \frac{D\gamma}{2\pi Fk}$.

85. Si praeter c et γ etiam interuallum $CF = b$ pro cognito aſſumere velimus, quoniam plerumque circumſtantiae id non arbitrio noſtro reliquunt, habebimus:

$$\sqrt{(1-\mu)} = \frac{D}{4\pi b\gamma\sqrt{2gb}} \text{ et } u = v = \frac{bbb}{2cc}.$$

At c et γ non penitus noſtro arbitratui relinquuntur, cum $\frac{D}{4\pi c\gamma\sqrt{2g}}$ debeat eſſe $< \sqrt{b}$, ſeu $4\pi c\gamma > \frac{D}{\sqrt{2gb}}$. Si igitur capiatur $\gamma = \frac{1}{8}c$, debet eſſe $\frac{1}{2}\pi cc > \frac{D}{\sqrt{2gb}}$, vnde ſumto $\frac{1}{2}\pi cc = \frac{9D}{8\sqrt{2gb}}$, ſeu $cc = \frac{9D}{4\pi\sqrt{2gb}}$; erit $\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{\frac{1}{2}\pi cc\sqrt{2g}} = \frac{8}{9}\sqrt{b}$, ſeu $b - 2a = \frac{64}{81}b$, indeque $a = \frac{17}{162}b$.

86. Quoniam ſic altitudo a pro circumſtantiis prodit nimis parua, ſtatuatur $\frac{1}{2}\pi cc = \frac{2D}{\sqrt{2gb}}$, eritque $\sqrt{(b-2a)} = \frac{1}{2}\sqrt{b}$, ſeu $a = \frac{3}{8}b$, qui valor iam ad omnes caſus ſatis erit accommodatus. Hinc igitur fit:

$$c = 2\sqrt{\frac{D}{\pi\sqrt{2gb}}}; \text{ et } \gamma = \frac{1}{8}c = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{D}{\pi\sqrt{2gb}}};$$

tum vero $\sqrt{(1-\mu)} = \frac{2D}{\pi bc\sqrt{2gb}} = \frac{c}{2\pi b}$, et

$$ff = \frac{c^3}{4b} = \frac{c}{2\pi b}\cdot ee; \quad u = v = \frac{bbb}{2cc}; \quad m = \frac{\sqrt{gb}}{\pi c\sqrt{2}}$$

Porro $ii = \frac{D}{\sqrt{\frac{5}{8}gb}}$; et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{D}{\frac{1}{2}\pi cc\sqrt{2gb}} = \frac{1}{2}$, ſeu iſte angulus $26°, 34'$; et $n = \frac{Db}{2\pi Fk}$.

87. Hinc igitur quouis caſu tota machina non difficulter definitur. Sit exempli cauſa altitudo lapſus

$b = 10$

$b = 10$ pedum, et quantitas aquae ſingulis minutis ſecundis affluens $D = 1$ pes cubicus: erit $a = 3\frac{3}{4}$ ped. $c = 0\,26837$ ped. $\gamma = 0{,}03355$ ped. $ff = \frac{0{,}01933}{4b}$. Sumatur $b = c$; erit $ff = 0{,}00483$ ped. quadr. et $u = v = 5$ ped. $m = 10{,}484$, ſicque motus machinae nimis foret velox.

88. Hoc ergo caſu praeſtat quantitatem c ex numero m definire; cum enim non conſultum ſit, vno minuto ſecundo vna plures reuolutiones admittere, ponatur $m = 1$, hincque habebitur $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi\sqrt{2}} = 2{,}8135$, $\gamma = 0{,}3517$ ped. Deinde ob $\pi\sqrt{2} = \frac{\sqrt{gb}}{c}$ erit in genere $\sqrt{(b-2a)} = \frac{D}{4\gamma g\sqrt{b}} =$ hocque caſu $b-2a = 0{,}000206$ ped. ſeu $a = 4{,}999807$ ped. Tum vero eſt $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b(1-\mu)}}$, et $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}}$, quare ſi ſtatuatur $b = c = 2{,}8135$, vt ſit $u = v = 5$ ped. erit $ff = 0{,}0565$ ped. quadr. et $ii = 0{,}0565$ ped quadr. et tangens inclinationis tuborum Ii ad horizontem $= \frac{\sqrt{(b-2a)}}{\sqrt{b}} = 0{,}00455$, ſeu hic angulus $= 0°{,}16'$. ac numerus $n = \frac{10}{2\pi Fk}$.

89. Cum in ſtatu maximi effectus ſit $u = v$, celeritas aquae infra ex tubis effluentis, aequalis erit ipſi celeritati, qua orificia circa axem reuoluuntur: ex quo celeritas vera aquae effluentis erit nulla, ideoque verticaliter delabetur motu vniformiter accelerato, quae inſignis proprietas effectus maximi imprimis notari meretur.

90. Quando ergo datur copia aquae D ſingulis minutis ſecundis affluens, vna cum altitudine lapſus b; conſtituatur primo numerus reuolutionum m, quas machina vno minuto ſecundo abſoluere debet; is autem

ita

ita capiatur, vt quantitas $\frac{gb\sqrt{2gb}}{4\pi mm}$ multis vicibus maior ſit quam D. Sic enim proxime fiet $2a = b$, ſeu $a = \frac{1}{2}b$. Tum ſumatur $c = \frac{\sqrt{gb}}{\pi m\sqrt{2}}$, et interuallum b pro lubitu accipiatur; quo facto erit $u = v = \frac{bb}{cc}\cdot\frac{1}{2}b$: et $ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}}$ et $ii = \frac{D}{\sqrt{2gb}}$, ita vt ſit $ff : ii = c : b$. Denique tubi Ii aquam tantum non horizontaliter eiicere debebunt.

91. Cum autem aqua per tubos Ii ſecundum directionem horizontalem in vas inferius deriuare non licet, tubis his inclinationem quandam notabiliorem ad horizontem tribui oportet. Si igitur tangens huius inclinationis ponatur $= \theta$, poſito $\gamma = \frac{1}{2}c$, ſtatim reperitur $r = \sqrt{\frac{2D}{\pi\theta\sqrt{2gb}}}$; hincque $m = \frac{\sqrt{2gb}}{2\pi c}$. Tum vero, interuallo b pro lubitu aſſumto, erit $u = v = \frac{bbb}{2cc}$; Porro reperitur $a = \frac{1}{2}b(1 - \theta\theta)$, ac tandem:

$$ff = \frac{Dc}{b\sqrt{2gb}} = \frac{D}{2\pi mb}, \text{ et } ii = \frac{D}{\sqrt{2gb}(1+\theta\theta)} = \frac{D}{2\pi mc\sqrt{(1+\theta\theta)}}$$

His autem omnibus definitis habebitur:

$$2\pi n F k = Db,$$

vnde conſtructio totius machinae eſt petenda.

TENTAMEN THEORIAE DE FRICTIONE FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Experientia luculenter teſtatur, aquam, dum per canales promouetur, non exiguam pati motus ſui diminutionem, eamque eo magis eſſe notabilem, quo longiores fuerint, ſimulque arctiores, iſtiusmodi canales. Atque haec motus diminutio inprimis in fontibus ſalientibus deprehenditur, ad quos aqua per tubos, ſeu canales, deriuatur; cum enim, per Theoriam motus fluidorum, aqua fere ad eandem altitudinem aſſurgere deberet, ex qua lapſu ad orificium fontis deſcenderat, tamen teſte experientia hanc altitudinem nunquam attingit, ſed eo magis ab ea deficere ſolet, quo longiorem viam in tubis abſoluerit, et quo arctiores fuerint iſti tubi.

2. Quanquam ob hanc cauſam Theoria plerisque practicis non parum ſuſpecta videri ſolet, tamen cum ea principiis mechanicae certiſſimis ſit innixa, eius veritas ob hunc diſſenſum minime debilitatur, ſed potius cauſam iſtius aberrationis in eiusmodi circumſtantiis quaeri oportet, quae in Theoria non fuerint debito modo con-

conſideratae. Si enim aqua in motu ſuo huiusmodi obſtacula offendat, quorum in Theoria nulla ratio fuerit habita, mirum non eſt, ſi euentus Theoriae parum reſpondeat.

3. Quodſi autem hanc motus diminutionem, quam aqua in tubis patitur, attentius perpendamus, nullum plane dubium relinquitur, quin ea a frictione, ſeu attritu aquae ad latera tubi, proficiſcatur. Cum enim corpora ſolida, dum ſuper planis quantumuis politis promouentur, inſignem reſiſtentiam ob frictionem offendant; ſimilis effectus in motu fluidorum, quatenus ad latera tuborum, per quos tranſeunt, atteruntur, oriri debet, vnde fluidi motus retardetur: ex quo etiam ſtatim perſpicitur, hanc retardationem eo maiorem eſſe debere, quo maius ſpatium aqua in tubis percurrere cogatur, et quo ſimul arctiores fuerint iſti tubi.

4. Etiamſi autem nemo facile negauerit, quin motus fluidorum perinde ac ſolidorum frictioni ſit obnoxius, atque etiam plerique Auctores, qui ante memoratum motus imminutionem animaduerterunt, eam manifeſto frictioni tribuant, nullus eorum tamen, quantum mihi quidem conſtat, leges huius frictionis vel determinauit, vel ſaltem inueſtigare eſt conatus. Quam ob rem cum haec determinatio maximi ſit momenti, ſi Theoriam ad praxin accommodare velimus, operam dabo, vt hoc argumentum, quantum ob ſummas quibus inuoluitur difficultates, fieri licet, pro viribus euoluam atque illuſtrem.

5. Ac primo quidem cum dubium ſit nullum, quin minimae fluidorum particulae pro ſolidis haberi

queant, eae, dum ſecundum tuborum latera incedunt, eaque quaſi ſtringunt, effectum frictionis ſentire debent; atque leges huius frictionis ſimiles plane erunt earum, quae in motu corporum ſolidorum obſeruantur, etiamſi quantitas frictionis, ob ſummam particularum fluidarum lubricitatem, ſine dubio multo minor exiſtat.

6. In corporibus autem ſolidis obſeruamus, frictionem, quam in inceſſu ſuper ſuperficie quacunque patiuntur, ſemper datam tenere proportionem ad vim, qua ea ad ſuperficiem apprimuntur, ita vt neque corporum figura, neque quantitas baſis, qua ſuperficiem attingunt, nihil ad frictionem, ſiue augendam, ſiue diminuendam, conferat. Ita experimentis compertum eſt, ſi corpora quaeuis ſuper ligneis, ſeu metallicis, ſuperficiebus incedant, dummodo non ſatis notabilis aſperitas adſit, frictionem quartae ac ſubinde tertiae parti vis, qua ad has ſuperficies apprimuntur, aequari.

7. Manifeſtum ergo videtur, in fluidis ſimilem frictionis legem ſubſiſtere, ita, vt pro quauis fluidi portione frictio certam quandam teneat rationem, ad vim, qua ea fluidi portio ad latera tubi, per quem fluit, apprimitur: haecque ratio per experimenta erit exploranda, quae fortaſſe varias ſubire poterit mutationes, prout tubi ex alia atque alia materia fuerint confecti. In calculo ergo hanc rationem indefinite aſſumi conueniet, vt ea poſtmodum ex experimentis, ad quae Theoria applicabitur, definiri poſſit.

Tab. VI. Fig. 1. 8. Si igitur ponamus maſſam aquae per tubum ABCD transfluere, tubique parietes internos in elementos

mento MNmn ab aqua tanta vi premi, quanta premerentur, ſi ſub aqua quieſcente immerſi eſſent ad altitudinem $= p$, haec altitudo ſtatum compreſſionis aquae in elemento MNmn exponet. Quodſi ergo u exprimat perimetrum ſectionis tubi in MN factae, et ds elementi MNmn altitudinem Mm, erit interna huius elementi ſuperficies $= uds$, ideoque preſſio, quam iſta ſuperficies ſuſtinet, aequabitur ponderi voluminis aquae $= puds$.

9. Cum iam frictio, quam elementum aquae MNmn in motu ſuo per tubum patitur, datam teneat rationem ad vim appreſſionis $puds$, indicetur vis frictionis per $\lambda puds$, vbi facile colligere licet, λ eſſe frictionem valde paruam, cuius valor per experimenta determinari debet. Hac ergo vi $= \lambda puds$ motui elementi aquae MNmn reſiſtitur, et cum maſſa elementi, poſita tubi amplitudine in MN $= zz$, ſit $= zzds$, erit ipſa retardatio a frictione oriunda $= \frac{\lambda pu}{zz}$.

10. Pendet ergo frictio tam a quantitate, quam a figura cauitatis tubi: ſi enim ponamus ſectionem tubi in MN factam, eſſe rectangularem, altero latere exiſtente $= m$, altero $= n$: erit perimeter eius $u = 2m + 2n$, et area $zz = mn$, vnde hoc caſu erit retardatio $= \frac{2\lambda p(m+n)}{mn}$, et ſi ſectio ſit quadrata, ſeu $m = n$, erit retardatio $= \frac{4\lambda p}{n}$. Sin autem ſectio ſit circularis, diametrum habens $= n$, ob $u = 2\pi n$ et $zz = \pi nn$, erit retardatio $= \frac{2\lambda p}{n}$.

11. Quodſi ergo, vt plerumque fieri ſolet, ſectio tubi ſit circularis, eiusque area in MN ponatur $= zz$,

 erit

erit eius diameter $n = \frac{z}{\sqrt{\pi}}$, vnde retardatio, a frictione orta, prodit $= \frac{2\lambda p \sqrt{\pi}}{z}$. Cum autem ſit $\pi = 3,14159265$, hic numerus, ſimul in coefficiente 2λ comprehendi poterit, ita vt retardationem a frictione oriundam exprimere quaeamus per $\frac{\alpha p}{z}$: ac pro experimentis, quae quidem eiusmodi tubis inſtituuntur, ſufficiet, valorem ipſius α noſſe, neque multum refert, inde valorem ipſius $\lambda = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}$ elicere.

12. Ad effectum igitur frictionis, quouis caſu determinandum, preſſionem inueſtigari oportet, quam aqua vbique in latera exerit: ſeu ſtatus compreſſionis aquae in ſingulis tubi locis definiri debet. Cum autem ſtatus compreſſionis a celeritate pendeat, celeritas vero a frictione diminuatur, ideoque ſine ea coguoſci nequeat, perſpicuum eſt, hanc inueſtigationem, more apud Analyſtas ſolito, inſtitui debere, ita vt quantitates incognitae in calculo tanquam cognitae tractentur.

13. Hanc ergo inueſtigationem ex primis mechanicae principiis repetam, quo facilius veritatem concluſionum inde deductarum perſpicere liceat. Sit igitur vas ſuperne in AB perpetuo aqua plenum, ſiue quod amplitudo AB ſit infinita, ſiue quod continuo ſufficiens aquae copia affluat. Infra autem hoc vas deſinat in tubum, vel canalem ABMNCD, tam figurae, quam amplitudinis vtcunque variabilis, per quem aqua defluat, in eiusque orificio CD erumpat.

Tab VI. Fig. 2.

14. Etiamſi motus aquae, cum primum fluere inceperit, acceleratur, tamen mox ad motum vniformem redigetur, quo deinceps continuo fluere perget. Hanc

Hanc ob rem aſſumam, motum aquae iam ad hunc ſtatum vniformitatis perueniſſe, ita vt quaeſtio ſit, quanta celeritate aqua ex orificio CD ſit eruptura; ſeu cum demta frictione celeritas aquae altitudini DE, qua orificium infra ſupremam aquae ſuperficiem AB deprimitur, reſpondere deberet, quaeritur, quanto iam ob frictionem celeritas minor ſit futura.

15. Sit igitur amplitudo orificii $CD = bb$, et celeritas, qua hic aqua in aërem erumpit, debita ſit altitudini $= v$, erit ergo v quantitas conſtans. Sit praeterea profunditas huius orificii CD ſub aquae libella ABE, ſeu altitudo $DE = a$. Tum ducta recta verticali APS, punctum tubi quoduis M referatur ad coordinatas orthogonales $AP = x$, et $PM = y$, in M vero ſit amplitudo tubi $MN = zz$, eritque celeritas aquae in hac ſectione MN contentae $= \frac{bb\sqrt{v}}{zz}$, ſeu debita altitudini $= \frac{b^4 v}{z^4}$; propterea quod celeritates aquae ſunt reciproce vt tubi altitudines.

16. Ponamus, tempuſculo dt quamuis aquae guttam in MN exiſtentem, peruenire in ſectionem mn, ſitque elementum $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, quod ſpatiolum, quia tempuſculo dt a celeritate $\frac{bb\sqrt{v}}{zz}$ percurritur, erit $ds = \frac{bbdt\sqrt{v}}{zz}$, ſeu $dt = \frac{zzds}{bb\sqrt{v}}$, vbi notandum eſt, fore s et zz functiones ipſarum coordinatarum x et y, quibus punctum tubi M determinatur. Ponamus porro, elementum Mm ad rectam verticalem inclinari angulo $= \Phi$, erit $dx = ds \operatorname{coſ.} \Phi$ et $dy = ds \operatorname{ſin.} \Phi$.

17. Verum vt aqua hunc motum, quem aſſumimus, obtinere valeat, neceſſe eſt, vt quaeuis gutta aquae

aquae, in ſectione MN contenta, vrgeatur a duplici vi acceleratrice, quarum altera eſt verticalis ſecundum AP $= \frac{2\,ddx}{dt^2}$, altera vero horizontalis ſecundum PM $= \frac{2\,ddy}{dt^2}$, ſumto elemento dt conſtante. At eſt $\frac{dx}{dt} = \frac{bb\,coſ.\,\Phi.\sqrt{v}}{zz}$ et $\frac{dy}{dt} = \frac{bb\,ſin.\,\Phi.\sqrt{v}}{zz}$; vnde fit:

$$\frac{ddx}{dt} = -\frac{bb\,d\Phi\,ſin.\,\Phi.\sqrt{v}}{zz} - \frac{2\,bb\,dz\,coſ.\,\Phi.\sqrt{v}}{z^3} \text{ et}$$

$$\frac{ddy}{dt} = \frac{bb\,d\Phi\,coſ.\,\Phi.\sqrt{v}}{zz} - \frac{2\,bb\,dz\,ſin.\,\Phi\,\sqrt{v}}{z^3}.$$

18. Hae formulae multiplicatae per $\frac{2}{dt} = \frac{2\,bb\sqrt{v}}{zz\,ds}$, dabunt vires acceleratrices quaeſitas:

$$\text{Vis AP} = b^4 v\left(\frac{-2\,d\Phi\,ſin.\,\Phi}{z^4\,ds} - \frac{4\,dz\,coſ.\,\Phi}{z^5\,ds}\right)$$

$$\text{Vis PM} = b^4 v\left(\frac{2\,d\Phi\,coſ.\,\Phi}{z^4\,ds} - \frac{4\,dz\,ſin.\,\Phi}{z^5\,ds}\right)$$

Vnde porro eliciuntur duae aliae vires ſecundum directiones M*m* et MS, quarum haec ad illam eſt normalis. Prodit autem

$$\text{Vis M}m = \text{vi AP}\,coſ.\,\Phi + \text{vi PM}.\,ſin.\,\Phi = -\frac{4\,b^4 v\,dz}{z^5\,ds}$$

$$\text{Vis MS} = \text{vi AP}\,ſin.\,\Phi - \text{vi PM}.\,coſ.\,\Phi = -\frac{2\,b^4 v\,d\Phi}{z^4\,ds}.$$

19. In praeſenti negotio tantum opus habemus vi priori, qua aqua ſecundum directionem M*m* propellitur: ideoque haec vis acceleratrix aequalis eſſe debet ei vi, qua aqua reuera in tubo ſecundum hanc directionem ſollicitatur. Primo autem quaelibet guttula aquae, a vi grauitatis deorſum vrgetur, quae cum vnitate exprimatur, naſcetur inde vis acceleratrix ſecuntum directionem tubi M*m* $=$ coſ. Φ.

20. Deinde ſi ſtatus compreſſionis aquae in MN altitudine p exprimatur, erit ea in $mn = p + dp$: hinc cum aqua elementi MN*mn*, a vi p antrorſum propellatur, a vi autem $p + dp$ retrorſum repellatur, naſce-

naſcetur hinc vis acceleratrix ſecundum directionem Mm directa $= -\frac{dp}{ds}$, exiſtente p functione ipſius s, ſeu ipſarum x et y.

21. Tertio ob frictionem motui aquae reſiſtitur vi retardatrice $= \frac{\alpha p}{z}$, vti ſupra §. 11. eſt oſtenſum, vnde vis acceleratrix aquae ſecundum directionem Mm erit $= -\frac{\alpha p}{z}$. Cum igitur aqua his tribus viribus ſubiiciatur, neceſſe eſt, vt ſit:

$$-\frac{4b^4 v\,dz}{z^5\,ds} = \text{coſ.}\,\Phi - \frac{dp}{ds} - \frac{\alpha p}{z},$$

ſeu $dx - dp - \frac{\alpha p\,ds}{z} + \frac{4b^4 v\,dz}{z^5} = 0$ ob $ds\,\text{coſ.}\,\Phi = dx$.

22. Peruenimus ergo ad hanc aequationem, ex qua primo p ſtatus compreſſionis aquae in loco quocunque tubi MN definiri debet,

$$dp + \frac{\alpha p\,ds}{z} = dx + \frac{4b^4 v\,dz}{z^5}$$

quae multiplicata per $e^{\alpha \int \frac{ds}{z}}$ denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, fit integrabilis. Habebitur enim poſito breuitatis gratia $\int \frac{ds}{z} = r$:

$$e^{\alpha r} p = C + \int e^{\alpha r} dx + 4b^4 v \int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5}.$$

23. Valor autem huius integralis $\int \frac{ds}{z} = r$ ita ſit acceptus, vt in ſupremo vaſis loco AB, ſeu vbi $x = 0$, euaneſcat. Quo poſito, cum α ſit fractio vehementer parua,

$$\text{erit } e^{\alpha r} = 1 + \alpha r + \tfrac{1}{2}\alpha^2 r^2 + \tfrac{1}{6}\alpha^3 r^3 + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r^4 + \text{etc.}$$

$$\text{erit } e^{\alpha r} p = C + x + \alpha \int r\,dx + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \int rr\,dx + \tfrac{1}{6}\alpha^3 \int r^3 dx$$
$$-\frac{b^4 v}{z^4} - 4\alpha b^4 v \int \frac{r\,dz}{z^5} - 2\alpha^2 b^4 v \int \frac{rr\,dz}{z^6} - \tfrac{2}{3}\alpha^3 b^4 v \int \frac{r^3 dz}{z^5} - \text{etc.}$$

24. Cum ſit $dr = \frac{ds}{z}$, integratio etiam hoc modo inſtitui poteſt:

$$\int e^{\alpha r}dx = e^{\alpha r}x - \alpha\int \frac{e^{\alpha r}xds}{z}$$

$$\int \frac{e^{\alpha r}dz}{z^5} = -\frac{e^{\alpha r}}{4z^4} + \frac{\alpha}{4}\int\frac{e^{\alpha r}ds}{z^5}$$

ſicque erit:

$$p = Ce^{-\alpha r} + x - \alpha e^{-\alpha r}\int\frac{e^{\alpha r}xds}{z} - \frac{b^4v}{z^4} + \alpha b^4 v e^{-\alpha r}\int\frac{e^{\alpha r}ds}{z^5}$$

ſiue

$$\begin{aligned} p = &+C - \alpha Cr + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha Crr - \tfrac{1}{6}\alpha^3 Cr^3 \\ &+ x - \alpha\int\frac{xds}{z} + \alpha\alpha r\int\frac{xds}{z} - \tfrac{1}{2}\alpha^3 rr\int\frac{xds}{z} \\ &- \frac{b^4v}{z^4} + \alpha b^4 v\int\frac{ds}{z^5} - \alpha\alpha\int\frac{rxds}{z} + \alpha^3 r\int\frac{rxds}{z} \\ &+ \alpha\alpha b^4 vr\int\frac{ds}{z^5} - \tfrac{1}{2}\alpha^3\int\frac{rrxds}{z} \\ &+ \alpha\alpha b^4 v\int\frac{rds}{z^5} + \tfrac{1}{2}\alpha^3 b^4 vrr\int\frac{ds}{z^5} \\ &- \alpha^3 b^4 vr\int\frac{rds}{z^5} \\ &+ \tfrac{1}{2}\alpha^3 b^4 v\int\frac{rrds}{z^5} \end{aligned}$$

Tab. VI. Fig. 3. 25. Expediet autem hinc caſus aliquot ſpecialiores euolui, quibus effectus frictionis facilius exhiberi poteſt. Sit igitur ſupremum vas cylindricum verticale ABEF, cuius amplitudo ſit $= gg$, et altitudo AE $= a$; deinde huic vaſi adiunctus ſit tubus cylindricus FCD, longitudinis DF $= b$, et amplitudinis $= ff$, qui cum recta verticali angulum faciat $= \zeta$; in baſi autem inferiori pertuſus ſit foramine CD $= hh$, per quod aqua effluat, dum vas ſuperius continuo plenum conſeruatur.

26. Sumamus primo punctum indefinitum P in tubo ſuperiori ABEF: vbi eſt $z = g$, $ds = dx$, et $r = \frac{x}{g}$. Hinc ita integrando, vt integralia in ſupremo puncto A euaneſcant, erit:

$\int e^{\alpha r}$

$$\int e^{\alpha r} dx = \int e^{\frac{\alpha x}{g}} dx = \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1)$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1 - e^{\alpha r}}{g^5} + \frac{\alpha}{g^5} \int e^{\frac{\alpha x}{g}} dx \text{ ideoque}$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = -\frac{1}{g^4}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1) + \frac{1}{g^4}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1) = 0$$

ergo

$$e^{\frac{\alpha x}{g}} p = C + \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1)$$

ſeu $p = Ce^{\frac{-\alpha x}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{-\alpha x}{g}})$

27. Cum autem in genere ſit

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1}{g^4} - \frac{e^{\alpha r}}{z^4} + \alpha\int \frac{e^{\alpha r} ds}{z^5}$$

erit pro extremo vaſis puncto E, vbi amplitudo ſubito ſit $= ff$, $4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{v}{g^4} - \frac{v}{f^4} e^{\frac{\alpha x}{g}} + \frac{v}{g^4}(e^{\frac{\alpha x}{g}} - 1) = e^{\frac{\alpha x}{g}}(\frac{v}{g^4} - \frac{v}{f^4})$.

vnde ſit preſſio in F $= Ce^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha a}{g}}) + h^4 v(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4})$ At in ſuprema ſuperficie AB preſſio erit $= C$, quae cum aequalis eſſe debeat preſſioni atmoſphaerae, quae columnae aqueae altitudinis $= h$ aequatur, erit $C = h$; et preſſio in F $= he^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha a}{g}}) + h^4 v(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{f^4})$.

28. Inuenta preſſione in F, conſideremus iam alterum tubum FCD ſolum, pro quo eſt $zz = ff$, et $dx = ds \cos\zeta$. Sit autem nunc $EP = x$, et preſſio in $M = p$. Iam ob $r = \frac{s}{f}$, erit

$$\int e^{\alpha r} dx = \frac{f}{\alpha}(e^{\frac{\alpha s}{f}} - 1)\cos\zeta \text{ et}$$

$$4\int \frac{e^{\alpha r} dz}{z^5} = \frac{1}{f^4} - \frac{e^{\frac{\alpha s}{f}}}{z^4} + \frac{1}{f^4}(e^{\frac{\alpha s}{f}} - 1)$$

 cuius

cuius valor in quouis puncto medio euaneſcit, in puncto autem D, vbi ſubito eſt $z = b$, et $s = b$, erit

$$4\int\frac{e^{\alpha r}dz}{z^3} = e^{\frac{\alpha b}{f}}\left(\frac{1}{f^4}-\frac{1}{b^4}\right)$$

29. In quouis ergo puncto intermedio M erit preſſio

$$p = Ce^{\frac{-\alpha s}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1-e^{\frac{-\alpha s}{f}}\right)\text{coſ.}\zeta$$

et quia, poſito $s = 0$, preſſio in F prodit $= C$, neceſſe eſt, vt ſit $C = le^{\frac{-\alpha a}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1-e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + b^4 v\left(\frac{1}{g^4}-\frac{1}{f^4}\right)$

Quo valore notato orietur preſſio in extremo orificio

$$CD = Ce^{\frac{-\alpha b}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1-e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{coſ.}\zeta + b^4 v\left(\frac{1}{f^4}-\frac{1}{b^4}\right)$$

30. Quoniam hic vero aqua in aërem erumpit, aliam preſſionem non ſuſtinet, praeter pondus atmoſphaerae, vnde erit,

$$l = Ce^{\frac{-\alpha b}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1-e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{coſ.}\zeta + b^4 v\left(\frac{1}{f^4}-\frac{1}{b^4}\right)$$

et ſubſtituto valore ipſius C habebitur

$$l = le^{\frac{-\alpha a}{g}-\frac{\alpha b}{f}} + \frac{g}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b}{f}}\left(1-e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) + e^{\frac{-\alpha b}{f}}b^4 v\left(\frac{1}{g^4}-\frac{1}{f^4}\right)$$
$$+ \frac{f}{\alpha}\left(1-e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{coſ.}\zeta + b^4 v\left(\frac{1}{f^4}-\frac{1}{b^4}\right).$$

31 Ex hac iam aequatione celeritas eruitur, qua aqua per orificium CD erumpit. Pprodibit enim altihuic celeritati debita

$$v = \frac{l\left(1-e^{\frac{-\alpha a}{g}-\frac{\alpha b}{b}}\right) - \frac{g}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b}{f}}\left(1-e^{\frac{-\alpha a}{g}}\right) - \frac{f}{\alpha}\left(1-e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\text{coſ.}\zeta}{e^{\frac{-\alpha b}{f}}\cdot\frac{b^4}{g^4} + \left(1-e^{\frac{-\alpha b}{f}}\right)\frac{b^4}{f^4} - 1}$$

vel

vel mutatis numeratoris ac denominatoris ſignis

$$v = \frac{\frac{g}{\alpha} e^{\frac{-\alpha b}{f}} (1 - e^{\frac{-\alpha a}{g}}) + \frac{f}{\alpha}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{f}}) \text{coſ.} \zeta - l(1 - e^{\frac{-\alpha a}{g} - \frac{\alpha b}{f}})}{1 - (1 - e^{\frac{ab}{f}}) \frac{b^4}{f^4} - e^{\frac{-\alpha b}{f}} \cdot \frac{b^4}{g^4}}$$

Quodſi ergo tubus FD ſit verticalis, fiet coſ. $\zeta = 1$; ſin autem hic tubus fuerit horizontalis, erit coſ. $\zeta = 0$.

32. Cum ſit, ob α valde paruum,

$$e^{\frac{-\alpha a}{g}} = 1 - \frac{\alpha a}{g} + \frac{\alpha^2 a^2}{2g^2} - \frac{\alpha^3 a^3}{6g^3} + \text{etc.}$$

$$e^{\frac{-\alpha b}{f}} = 1 - \frac{\alpha b}{f} + \frac{\alpha^2 b^2}{2f^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{6f^3} + \text{etc.}$$

erit, non vltra poteſtatem ſecundam ipſius α progrediendo:

$$v = \frac{a + b\,\text{coſ.}\zeta - \alpha\left(\frac{aa}{2g} + \frac{ab}{f} + \frac{bb\,\text{coſ.}\zeta}{2f} + \frac{al}{g} + \frac{bl}{f}\right) + \alpha\alpha\left(\frac{a^3}{6gg} + \frac{aab}{2fg} + \frac{abb}{2ff} + \frac{b^3\,\text{coſ.}\zeta}{6ff} + \frac{1}{2} l\left(\frac{a}{g} + \frac{b}{f}\right)^2\right)}{1 - \frac{b^4}{g^4} - \frac{\alpha b}{f}\left(\frac{b^4}{f^4} - \frac{b^4}{g^4}\right) + \frac{\alpha\alpha bb}{2ff}\left(\frac{b^4}{f^4} - \frac{b^4}{g^4}\right)}$$

vbi $a + b\,\text{coſ.}\zeta$ denotat totam altitudinem AG.

33. Si amplitudo vaſis ſuperioris ABEF ſit quaſi infinita, ſeu $g = \infty$, erit:

$$v = \frac{a + b\,\text{coſ.}\zeta - \frac{\alpha b}{f}(a + \frac{1}{2} b\,\text{coſ.}\zeta + l) + \frac{\alpha^2 bb}{2ff}(a + \frac{1}{3} b\,\text{coſ.}\zeta + l)}{1 - \frac{\alpha bb^4}{f^5} + \frac{\alpha\alpha bbb^4}{2f^6}}$$

vnde patet, celeritatem minorem eſſe ea, quam corpus cadendo ex altitudine AG acquirit; atque diminutionem imprimis etiam a pondere atmoſphaerae l pendere, ita vt in vacuo effectus frictionis multo minor eſſet futurus.

34. Si canalis, per quem aqua defluit, ex pluribus tubis cylindricis vtcunque ad horizontem inclinatis con- Tab. VI. Fig. 4.

 ſtet,

ſtet, hinc motus aquae, ſeu celeritas effluxus, cum motus iam ad vniformitatem fuerit reductus, non difficulter colligi poterit.

Ponatur enim pro ſingulis partibus

$AF = a$; amplitudo $AA = ff$; et ang. cum verticali $= \epsilon$

$BC = b$; amplitudo $BB = gg$; et ang. cum verticali $= \zeta$

$CD = c$; amplitudo $CC = hh$, et ang. cum verticali $= \eta$

$DE = d$; amplitudo $DD = ii$; et ang. cum verticali $= \theta$

Denique ſit orificium $EE = kk$, quod hactenus per hh indicauimus.

35. Sit denique v altitudo debita celeritati, qua aqua per orificium $EE = kk$ effluet, ac ponatur ſtatus compreſſionis aquae

in $AA = l$ quae eſt altitudo circiter 30 pedum

in $BB = P$

in $CC = Q$

in $DD = R$

in $EE = l'$ cum hic fiat effluxus.

36. Quodſi iam ratiocinium vt ante inſtituamus, reperiemus:

$$P = l e^{\frac{-\alpha a}{f}} + \frac{f}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha a}{f}}\right) + k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right)$$

$$Q = P e^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}\right)\text{coſ.}\,\zeta + k^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

$$R = Q e^{\frac{-\alpha c}{h}} + \frac{h}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha c}{h}}\right)\text{coſ.}\,\eta + k^4 v\left(\frac{1}{h^4} - \frac{1}{i^4}\right)$$

$$= R e^{\frac{-\alpha d}{i}} + \frac{i}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha d}{i}}\right)\text{coſ.}\,\theta + k^4 v\left(\frac{1}{i^4} - \frac{1}{k^4}\right)$$

hinc-

hincque celeritas quaeſita ſeu altitudo v definitur: ac ſimul lex conſtat, qua erit procedendum, ſi canalis ex pluribus partibus fuerit compoſitus.

37. Quo has formulas commodius euoluamus, ſtatuamus breuitatis gratia:

$$e^{\frac{-\alpha a}{f}} = 1 - \alpha A; \quad e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 1 - \alpha B$$

$$e^{\frac{-\alpha c}{h}} = 1 - \alpha C; \quad e^{\frac{-\alpha d}{i}} = 1 - \alpha D$$

ita vt ſit:

$$A = \frac{a}{f}\left(1 - \frac{\alpha a}{2f} + \frac{\alpha^2 a^2}{6f^2} - \frac{\alpha^3 a^3}{24 f^3} + \text{etc.}\right)$$

$$B = \frac{b}{g}\left(1 - \frac{\alpha b}{2g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.}\right)$$

$$C = \frac{c}{h}\left(1 - \frac{\alpha c}{2h} + \frac{\alpha^2 c^2}{6h^2} - \frac{\alpha^3 c^3}{24 h^3} + \text{etc.}\right)$$

$$D = \frac{d}{i}\left(1 - \frac{\alpha d}{2i} + \frac{\alpha^2 d^2}{6i^2} - \frac{\alpha^3 d^3}{24 i^3} + \text{etc.}\right)$$

38. Cum igitur ſit

$$P = (1 - \alpha A)l + Af + k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right) \text{ erit}$$

$$Q = (1-\alpha A)(1-\alpha B)l + (1-\alpha B)Af + (1-\alpha B)k^4 v\left(\frac{1}{f^4} - \frac{1}{g^4}\right)$$
$$+ Bg\,\text{coſ.}\,\zeta + k^4 v\left(\frac{1}{g^4} - \frac{1}{h^4}\right)$$

ſiue

$$Q = (1-\alpha A)(1-\alpha B)l + (1-\alpha B)Af + Bg\,\text{coſ.}\,\zeta$$
$$+ (1-\alpha B)\frac{k^4 v}{f^4} + \alpha B\frac{k^4 v}{g^4} - \frac{k^4 v}{h^4}.$$

Hinc porro fit

$$R = (1-\alpha A)(1-\alpha B)(1-\alpha C)l + A(1-\alpha B)(1-\alpha C)f$$
$$+ B(1-\alpha C)g\,\text{coſ.}\,\zeta + Ch\,\text{coſ.}\,\eta + (1-\alpha B)(1-\alpha C)\frac{k^4 v}{f^4}$$
$$+ \alpha B(1-\alpha C)\frac{k^4 v}{g^4} + \alpha C.\frac{k^4 v}{h^4} - \frac{k^4 v}{i^4}.$$

unde tandem colligitur haec aequatio:

$$l - (1-\alpha A)(1-\alpha B)(1-\alpha C)(1-\alpha D)l =$$
$$A(1-\alpha B)(1-\alpha C)(1-\alpha D)f + B(1-\alpha C)(1-\alpha D)g\,\text{coſ.}\,\zeta$$
$$+ C(1-$$

$$+\mathrm{C}(1-\alpha\mathrm{D})h\cos\eta+\mathrm{D}i\cos\theta+(1-\alpha\mathrm{B})(1-\alpha\mathrm{C})(1-\alpha\mathrm{D})\frac{k^4 v}{f^4}$$
$$+\alpha\mathrm{B}(1-\alpha\mathrm{C})(1-\alpha\mathrm{D})\frac{k^4 v}{h^4}+\alpha\mathrm{C}(1-\alpha\mathrm{D})\frac{k^4 v}{h^4}+\alpha\mathrm{D}.\frac{k^4 v}{i^4}-v$$

39. Ponatur porro ad abbreuiandum :

$$e^{\frac{-\alpha a}{f}}=1-\alpha\mathrm{A}=\mathfrak{A};\quad e^{\frac{-\alpha b}{g}}=1-\alpha\mathrm{B}=\mathfrak{B}$$
$$e^{\frac{-\alpha c}{h}}=1-\alpha\mathrm{C}=\mathfrak{C};\quad e^{\frac{-\alpha d}{i}}=1-\alpha\mathrm{D}=\mathfrak{D}$$

tum vero:

$$\frac{k^4}{f^4}=\mathfrak{f};\ \frac{k^4}{g^4}=\mathfrak{g};\ \frac{k^4}{h^4}=\mathfrak{h};\ \text{et}\ \frac{k^4}{i^4}=\mathfrak{i}\ \text{erit}$$
$$v=\frac{\mathrm{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}f+\mathrm{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}g\cos\zeta+\mathrm{C}\mathfrak{D}h\cos\eta+\mathrm{D}i\cos\theta-l+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}l}{1-\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{f}-\alpha\mathrm{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{g}-\alpha\mathrm{C}\mathfrak{D}\mathfrak{h}-\alpha\mathrm{D}\mathfrak{i}}$$

vbi $a+b\cos\zeta+c\cos\eta+d\cos\theta$ eſt altitudo aquae ſupremae AA ſupra orificium EE.

40. Si omnes poteſtates ipſius α praeter primam negligamus, reperiemus:

$$v=\frac{\left\{\begin{array}{ll} a+b\cos\zeta+c\cos\eta+d\cos\theta & -\alpha a(\frac{a}{2f}+\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}) \\ -\alpha l(\frac{a}{f}+\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i}) & -\alpha b\cos\zeta(\frac{b}{2g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{c}) \\ & -\alpha c\cos\eta(\frac{c}{2h}+\frac{d}{i}) \\ & -\alpha d\cos\theta.(\frac{d}{2i} \end{array}\right\}}{1-\mathfrak{f}+\alpha\mathfrak{f}(\frac{b}{g}+\frac{c}{h}+\frac{d}{i})-\alpha\mathfrak{g}.\frac{b}{g}-\alpha\mathfrak{h}.\frac{c}{h}-\alpha\mathfrak{i}\frac{d}{i}}$$

et ſi nulla plane eſſet frictio, ſeu $\alpha=0$, foret:

$$v=\frac{a+b\cos\zeta+c\cos\eta+d\cos\theta}{1-\mathfrak{f}}$$

vnde poſita tota altitudine $\mathrm{AI}=q$, erit $v=\frac{f^4}{f^4-k^4}.q$

41. In tranſitu hic obſeruo, ſi amplitudo vaſis ſupremi ſit maxima prae amplitudine orificii, fore $v=q$, ſeu celeritatem effluxus in EE debitam eſſe altitudini $\mathrm{AI}=q$, vti per conſueta principia conſtat. Sin autem ampli-

amplitudo vaſis ſupremi ff non multum excedat amplitudinem orificii kk, tum vtique erit $v > q$, ſeu aqua maiori celeritate efflueret, quam caſu praecedente, quod non parum paradoxon videbitur. Verum ratio huius accelerationis in hypotheſi noſtra eſt quaerenda, qua aſſumſimus, vas ſupremum ſemper aqua plenum conſeruari, vbi in calculo poſuimus, aquam affluentem iam ea celeritate in vas illud affluere, qua aqua in eo ſubſidit: ſicque haec aqua lapſum non a quiete incipit; vnde mirum non eſt, ſi ea per orificium maiori celeritate erumpit, quam quae conuenit altitudini $AI = q$.

42. Hinc etiam perſpicitur, cur valor ipſius v, caſu quo orificium kk aequale eſt ſupremae amplitudini ff, adeo fiat infinitus; hinc ſcilicet innoteſcit, hoc caſu motum aquae continuo accelerari, neque vnquam ad ſtatum vniformitatis pertingere. Quamdiu enim tantundem aquae ſupra affluit, quantum infra erumpit, et quidem ſemper tanta velocitate, quanta aqua ſubſidit, hic motus continuo perinde accelerabitur, atque in lapſu grauium libero euenire ſolet. Multo minus autem ſtatus vniformitatis locum habere poteſt, ſi fuerit $kk > ff$, praeter quam quod hoc caſu aqua a lateribus tubi ſeparatur.

43. Etiamſi igitur vas ſupremum aqua continuo plenum conſeruetur, niſi ſimul aqua tanta celeritate in vas infundatur, quanta ſuprema ſuperficies ſubſidit, calculus ex Theoria deductus locum habere nequit. Quodſi ergo calculum ad experimenta accommodare velimus, neceſſe erit, vas ſupremum ampliſſimum accipi, vt kk prae ff tuto reiici poſſit; ſic enim aquam lente affun-

dendo motus aquae non turbatur, cum ſuprema ſuperficies etiam lentiſſime ſubſidet.

44. Quo autem clarius effectum frictionis cognoſcamus, caſus aliquot ſimpliciores euolui conueniet, qui deinceps cum experimentis comparari queant; vt exinde valor litterae α definiri poſſit. Hoc autem valore ſemel definito, reliqui caſus omnes, quantum vis fuerint complicati, ope formularum datarum non difficulter expedientur, atque diminutio celeritatis a frictione oriunda determinabitur: ſed ob rationem ante allegatam amplitudinem ſupremam ff prae orificio kk vehementer magnam ſtatuemus, ita vt valor literae $\mathfrak{f}$ pro nihilo haberi poſſit. Manifeſtum autem eſt, dummodo ſit $f > 3k$, fore $\mathfrak{f} < \frac{1}{81}$, qui valor ſine notabili errore reiici poterit.

CASVS I.

SI AQVA EX VASE SVPREMO PER TVBVM CYLINDRICVM VERTICALEM EFFLVAT.

Tab. VII Fig. 1. 45. Sit vaſis ſupremi amplitudo $AA = ff$, eiusque altitudo $AB = a$, quod ſemper aqua plenum conſeruari pono. Huic vaſi verticaliter ſit infixus tubus cylindricus BB CC altitudinis $BC = b$, et amplitudinis $= gg$; cuius tubi baſis ima pertuſa ſit foramine $CC = kk$, per quod aqua effluat. Sit autem $\frac{k^4}{f^4} = \mathfrak{f} = 0$, et poſitis

$$\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}; \ \mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}} \ A = \frac{1 - \mathfrak{A}}{\alpha}, \text{ et } B = \frac{1 - \mathfrak{B}}{\alpha}$$

ob

ob coſ. $\zeta = 1$, et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$, erit celeritas, qua aqua per orificium CC effluet debita altitudini v, vt ſit

$$v = \frac{A\mathfrak{B} f + B g - l(1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{1 - \alpha B \mathfrak{g}}$$

46. Quodſi ergo valoribus proxime veris vti velimus, habebimus:

$$v\left(1 - \frac{\alpha b k^4}{g^5}\left(1 - \frac{\alpha b}{2g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.}\right)\right) =$$

$$a + b - \alpha a\left(\frac{a}{2f} + \frac{b}{g}\right) + \alpha^2 a\left(\frac{aa}{6ff} + \frac{ab}{2fg} + \frac{bb}{2gg}\right) - \alpha^3 a\left(\frac{a^3}{24 f^3} + \frac{a^2 b}{6ffg} + \frac{ab^2}{4fgg} + \frac{b^3}{6g^3}\right) \text{etc.}$$

$$- \frac{\alpha bb}{2g} + \frac{\alpha \alpha b^3}{6gg} - \frac{\alpha^3 b^4}{24 g^4} + \text{etc.}$$

$$- \alpha l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\alpha^3 l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^3 + \text{etc.}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\left(\frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2g^2} + \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3} - \text{etc.}\right)\right) =$$

$$a + b - \alpha\left(\frac{aa}{2f} + \frac{ab}{g} + \frac{bb}{2g} + \frac{al}{f} + \frac{bl}{g}\right)$$

$$+ \alpha\alpha\left(\frac{a^3}{6ff} + \frac{aab}{2fg} + \frac{abb}{2gg} + \frac{b^3}{6gg} + \tfrac{1}{2}l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^2\right)$$

$$- \alpha^3\left(\frac{a^4}{24 f^3} + \frac{a^3 b}{6ffg} + \frac{aabb}{4fgg} + \frac{ab^3}{6g^3} + \frac{b^4}{24 g^3} + \tfrac{1}{6}l\left(\frac{a}{f} + \frac{b}{g}\right)^3\right)$$

etc.

47. Si altitudo vaſis ſupremi $AB = a$ fuerit valde exigua, amplitudo autem ff multo maior quam amplitudo tubi gg, ſimulque longitudo huius tubi $BC = b$ ſatis ſit ingens, patet fractionem $\frac{b}{g}$ maxime ſuperare fractionem $\frac{a}{f}$; hac igitur prae illa neglecta, erit

$$v\left(1 - \frac{k^4}{g^4}\left(\frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2gg} + \frac{\alpha^3 b^3}{6g^3} - \text{etc.}\right)\right) =$$

$$a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right) + \frac{\alpha\alpha bb}{gg}\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{6}b + \tfrac{1}{2}l\right)$$

$$- \frac{\alpha^3 b^3}{g^3}\left(\tfrac{1}{6}a + \tfrac{1}{24}b + \tfrac{1}{6}l\right) \text{ etc.}$$

atque haec ſeries eo magis conuergit, quo minor fuerit fractio $\frac{\alpha b}{g}$.

 48. Quan-

48. Quantum autem ex craſſis quibusdam experimentis obiter tantum colligere licuit, valor ipſius α prodiit circiter $= \frac{1}{4000}$. Hinc dummodo numerus $\frac{b}{g}$ notabiliter fuerit minor, quam 4000, ſufficiet in primis terminis ſubſtitiſſe, ita vt ſit

$$v\left(1 - \frac{\alpha b}{g} \cdot \frac{k^4}{g^4}\right) = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right);$$ ſeu

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l - \frac{k^4}{g^4}(a+b)\right)$$

49. Si orificium $CC = kk$ fuerit minimum, ita vt $\frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi poſſit, erit

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(a + \tfrac{1}{2}b + l\right)$$

ſin autem tubus infra plane ſit apertus, ſeu $gg = kk$, habebitur

$$v = a + b - \frac{\alpha b}{g}\left(l - \tfrac{1}{2}b\right)$$

Illo ergo caſu celeritas effluxus eſt minima, atque a frictione maxime impeditur; hoc autem caſu videtur fieri poſſe, vt fiat $v = a + b$, perinde ac ſi nulla frictio adeſſet.

50. Hoc ſcilicet euenire deberet, ſi $b = 2l$, ſeu cum ſit l triginta pedum, ſi $b = 60$ pedum: atque adeo, ſi eſſet $b > 60$ pedum, calculus noſter praeberet $v > a + b$. Interim tamen certiſſimum eſt, frictionem in cauſa eſſe non poſſe, vt aqua maiori celeritate exſiliat, quam ſi nulla adeſſet frictio. Dico igitur, huiusmodi caſus ideo locum habere non poſſe, propterea quod aqua tubo non vbique adhaereat; ſed vacuum relinquat, ita, vt calculus ad eos accommodari nequeat.

51. Quod

51. Quod quo clarius perſpiciatur, notandum eſt, aquam eatenus tantum vbique tubi cauitatem explere, quatenus ad eius latera apprimitur: ſin igitur eueniat, vt preſſio aquae intra tubum alicubi vel euaneſcat, vel adeo fiat negatiua, ibi reuera latera tubi deſeret, vacuumque relinquet, ita vt motus aquae longe aliter ſit futurus, ac per calculum eſt definitus. Calculus enim locum habere nequit, niſi ſtatus compreſſionis aquae in tubo vbique ſit affirmatiuus.

52. Ponamus ergo ſtatum compreſſionis aquae in ſectione BB eſſe $=R$, atque ex §. 36. habebimus

$$l = Re^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha b}{g}}) + \frac{k^4}{g^4}v - v$$

ideoque $R = e^{\frac{-\alpha b}{g}}\, l - \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1) + v(1 - \frac{k^4}{g^4})e^{\frac{\alpha b}{g}}$.

Iam ob $e^{\frac{\alpha b}{g}} = 1 + \frac{\alpha b}{g} + \frac{\alpha^2 b^2}{g^2}$, erit

$$R = l + \frac{\alpha b l}{g} - b - \frac{\alpha bb}{g} + (1 + \frac{\alpha b}{g})v(1 - \frac{k^4}{g^4})$$

et ſubſtituto pro v valore ante inuento, habebitur neglectis terminis per α multiplicatis

$$R = l + a - \frac{k^4}{g^4}(a + b).$$

53. Niſi ergo ſit $l + a > \frac{k^4}{g^4}(a + b)$, hypotheſis in calculo aſſumta locum habere nequit; ideoque tubi BC longitudo b minor eſſe debet, quam $\frac{g^4}{k^4}(l + a) - a$. Quare ſi tubus BC infra ſit plane apertus, ſeu $gg = kk$, neceſſe eſt, vt ſit $b < l$: vnde hypotheſis euertitur, ſi eſſet $b = 2l$. Caſu $gg = kk$, longitudo tubi $BC = b$ triginta pedes ſuperare nequit, vnde poſito $b = l$, maxima celeritas effluxus, ſeu quae minime a frictione impeditur,

 peditur,

peditur, debita eſt altitudini $v = a + l - \frac{\alpha l l}{2g}$: ideoque minor eſt, quam ſi nulla adeſſet frictio.

54. In genere autem, ſi ſit $\frac{a}{f}$ tam paruum, vt prae $\frac{b}{g}$ pro nihilo reputari poſſit, erit $\mathfrak{A} = 1$, $A = \frac{a}{f}$; vnde fit

$$v = \frac{a e^{\frac{-\alpha b}{g}} + \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}}) - l(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})}{1 - \frac{k^4}{g^4}(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})}$$

vnde ſi tubus BC infra penitus ſit apertus, ſeu $\frac{k^4}{g^4} = 1$ erit $v = a + \frac{g}{\alpha}(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1) - l(e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1)$

55. Si ergo tubus BC ſit tam gracilis, vt ſit $g = \alpha l$, aqua in CC maiori celeritate non effluet, quam tubo remoto in BB efflueret. Atque ſi tubus BC adhuc ſit gracilior, ſeu $g < \alpha l$, puta $g = \frac{1}{2}\alpha l$, fiet

$$v = a - \tfrac{1}{2} l(e^{\frac{2b}{l}} - 1)$$

et ſi altitudo b valde ſit parua prae l, erit

$$v = a - b - \frac{bb}{l},$$

niſi ergo ſit $a > b + \frac{bb}{l}$, aqua plane non effluet, hoc eſt niſi ſit $a > b$.

56. Tubus igitur BC tam gracilis eſſe poteſt, vt frictio effluxum aquae per eius orificium CC penitus arceat, atque hinc commodiſſime valor liiterae α per experimenta explorari poterit. Infigatur enim vaſi ſatis amplo AB, in quo aqua altitudinem $AB = a$ non nimis magnam occupat, tubus, vt vocari ſolet, capillaris, cuius amplitudine exiſtente $= gg$, ponatur $g = \frac{1}{n}\alpha l$, et cum ſit $v = a - \frac{(n-1)}{n} l(e^{\frac{nb}{l}} - 1) = a - (n-1)b$; pono

pono hunc tubum initio tam fuiſſe longum, vt nulla aqua efflueret; deinde eius longitudo ſucceſſiue diminuatur, donec aqua effluere incipiat: qua longitudine notata, quae ſit $= b$, cum ſit $a-(n-1)b = 0$, erit $n = \frac{a+b}{b}$; ideoque $\alpha = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{g}{l}$.

57. Idem experimentum etiam ita inſtitui poteſt, vt longitudo tubi capillaris BC data aſſumatur, quae autem tanta ſit, vt ſi minimum aquae in vas ſuperius infundatur, nihil effluat; tum vero continuo augeatur altitudo aquae in vaſe eousque, donec aqua per tubulum capillarem effluere incipiat. Quod cum euenerit, notetur iſta altitudo $= a$, et quia tam longitudo tubuli b, quam eius amplitudo gg, iam cognita ponitur, elicietur vt ante $\alpha = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{g}{l}$.

58. Perſpicuum autem eſt, tubulum, quo vti volumus, tam arctum eſſe debere, vt ſit $g < \alpha l$; ſi enim fuerit $g > \alpha l$, hic caſus nunquam vſu veniet, vt effluxus aquae impediatur. Quodſi ergo ſit, vti ſuſpicari licuit, $\alpha = \frac{1}{4000}$, ob $l = 30$ ped. deberet eſſe $g > \frac{3}{400}$ ped. ſeu $g < 0{,}0075$ ped. ſicque diameter tubuli minor eſſe deberet, quam $\frac{85}{10000}$ ped. ſeu quam $\frac{1}{118}$ ped. Hinc limes, infra quem diameter tubuli capi deberet, eſſet circiter vnius lineae.

59. Si fuerit $g = \alpha l$, ſeu $g < \alpha l$, et $a = 0$, tum ſi eiusmodi tubulus, cuiuscunque fuerit longitudinis, aqua impleatur, nihil ex eo effluet, etiamſi in ſitu verticali detineatur. Hinc cum l ſit longitudo 30 pedum, facile per experimenta valor litterae α explorari poterit. Parentur ſcilicet plures tubuli, quorum amplitudi-

nes

nes gg ſint diuerſae, iique aqua repleantur; tum ex amplioribus quidem aqua effluet, ex arctioribus vero ſecus; tantum igitur opus eſt, vt eius tubuli, qui aquam non amplius eiicit, amplitudo gg menſuretur, eritque tum $\alpha = \frac{g}{l}$. Hic autem effluxus verus ſpectari debet, quo aqua continuo tractu effluit; ſi enim guttatim tantum decidit, idem erit, ac ſi aqua non efflueret. Cum enim frictio demum in vero motu cernatur, quamdiu aqua quieſcit, ob grauitatem guttae ſenſim auellentur ac decident, id quod frictio impedire non valet.

60. Patet ergo gracilitatem huiusmodi tubulorum, qui aquam contentam, etiamſi vtrinque ſint aperti, non effluere ſinunt, a pondere atmoſphaerae l pendere, quoniam hoc euenit, ſi $g < \alpha l$. Hinc videmus, in vacuo, vbi $l = 0$, iſtos tubulos aquam omnino effundere, niſi quatenus, ob naturam, quae tubulis capillaribus propria eſt, aqua in iis ad certam altitudinem retineatur, reliqua autem aqua effluet in vacuo, quae in aere guttatim tantum decidebat.

61. Generatim autem intelligitur, ob preſſionem atmoſphaerae effluxum aquae ſemper retardari, et quidem frictionem huius retardationis eſſe cauſam: vidimus enim (54), quo minor ſit preſſio atmoſphaerae l, eo maiori celeritate aquam exilire. Quodſi ergo a cauſa quacunque preſſio atmoſphaerae imminuatur, aqua velocius ex vaſe effluet; quam propterea cauſam eſſe exiſtimo, quod ab electricitate effluxus aquae accelerari obſeruetur.

62. Prae-

62. Praeterire hic nequeo phaenomenon, explicatu alias facillimum, quod ſcilicet, ſi vas ſuperius ſit infinite anguſtum, ſeu eius amplitudo ff plane euaneſcat, ita vt tubus BC ſupra omnino ſit clauſus, aqua per orificium CC non effluat, niſi tubus fuerit vehementer longus. Nam hoc phaenomenum, neglecta frictione, ex theoria non ſequitur, cum valor ipſius v non euaneſcat, etiamſi ponatur $f=0$.

63. Frictione autem in computum ducta, cum, ob $f=0$, fiat $\mathfrak{A}=0$, erit fractionis, quae valorem ipſius v praebet, numerator $=\mathrm{B}g-l=(1-e^{\frac{-\alpha b}{g}})\frac{g}{\alpha}-l$, ad denominatorem enim attendi non eſt opus, qui fractionem $\frac{k^4}{f^4}=f$ inuolueret, quem §. 45. omiſimus. Ex numeratore autem intelligitur, quoties fuerit $1-e^{\frac{-\alpha b}{g}} < \frac{\alpha l}{g}$, nullum effluxum locum habere poſſe. Hoc ergo euenit, ſi $e^{\frac{-\alpha b}{g}} > 1-\frac{\alpha l}{g}$, ſeu $1-\frac{\alpha b}{g}+\frac{\alpha^2 b^2}{2g^2}-\frac{\alpha^3 b^3}{6g^3}$ etc. $< 1-\frac{\alpha l}{g}$, ideoque, ſi $l > b-\frac{\alpha bb}{2g}+\frac{\alpha^2 b^3}{6gg}$ etc. Vel aqua non effluet, quoties erit $\frac{\alpha b}{g} < -\log.(1-\frac{\alpha l}{g})$, ſeu $b < l+\frac{\alpha ll}{2g}+\frac{\alpha^2 l^3}{3gg}+\frac{\alpha^3 l^4}{4g^3}+$ etc. Niſi ergo longitudo tubi b hoc valore fuerit maior, aqua effluere nequit.

64. Videamus autem pro caſu quodam determinato, quantus futurus ſit effectus frictionis, poſito valore $\alpha=\frac{1}{4000}$, qui a veritate non multum abhorrere videtur. Sit ergo vaſis ſupremi ampliſſimi altitudo $\mathrm{AB}=a=\frac{1}{3}$ ped. longitudo tubi annexi $\mathrm{BC}=b=4$ pedum, eius amplitudo $gg=\frac{1}{2500}$ ped. ſeu $g=\frac{1}{50}$ p[illegible] et hic tubus infra plane ſit apertus, vt fiat $kk=gg$; hinc

erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{20}$ et $e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1 = 0,05127$: atque $\frac{g}{\alpha} - l = 50$. Vnde fit:

$$v = \frac{1}{3} + 2,563 = 2,896 \text{ pedum.}$$

Hoc ergo caſu altitudo celeritati, qua aqua effluit, debita tantum eſt 2,896 pedum, cum frictione ſublata ea futura eſſet $= 4\frac{1}{3}$ pedum.

65. Si effectus frictionis minor eſſet, quam aſſumſi, celeritas aquae etiam magis accederet ad altitudinem $4\frac{1}{3}$ pedum. Quod quo clarius appareat, ponamus $\alpha = \frac{1}{6000}$, erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{30}$, et $e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1 = 0,033894$, atque $\frac{g}{\alpha} - l = 90$, vnde fiet:

$$v = \frac{1}{3} + 3,05046 = 3,38379 \text{ ped.}$$

Altitudo ergo celeritati debita iam foret 3,38379, ideoque propius ad $4\frac{1}{3}$ ped. accederet.

66. Vaſe autem huiusmodi constructo, per experimentum explorari poteſt, quanta aquae copia certo tempore effluet. Ponamus enim minuto primo effluere copiam aquae, quae ſit m ped. cub. atque pariter in pedibus erit $v = 100000\, mm$, qui valor comparetur cum iis, quos pro v ex hypotheſibus $\alpha = \frac{1}{4000}$ et $\alpha = \frac{1}{6000}$ determinauimus, vel ſi hae hypotheſes minus congruant, aliae calculo euoluantur, ſicque innoteſcet verus valor ipſius α. Expediet autem plura huiusmodi inſtitui experimenta, antequam de vero ipſius α valore plane certi eſſe queamus.

CASVS.

CASVS II.

SI AQVA EX VASE SVPREMO PER TVBVM VERTICALEM EX DVABVS PARTIBVS CYLINDRICIS COMPOSITVM EFFLVIT.

67. Sit vaſis ſupremi amplitudo $AA = ff$, quae ſit valde magna, eiusque altitudo $AB = a$, quod vas iugiter aqua plenum conſeruari pono. Ex hoc vaſe aqua primum in tubum BC fluat, cuius amplitudo ſit $BB = gg$ et altitudo $BC = h$: cui tubo in CC annexus ſit inſuper tubus verticalis CD, amplitudinis $= hh$ et longitudinis $CD = c$: cuius baſis infima pertuſa ſit foramine $DD = kk$, per quod aqua in aerem effluat. Significet autem l altitudinem columnae aqueae atmosphaerae aequiponderantem: ſit autem kk prae ff tam paruum, vt valor $\mathfrak{f} = \frac{k^4}{f^4}$ pro nihilo haberi poſſit. Tab. VII. Fig. 2.

68. His poſitis ſit breuitatis gratia $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}$; $A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha h}{g}}$; $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{C} = e^{\frac{-\alpha c}{h}}$; $C = \frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$; tum vero $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ et $\mathfrak{h} = \frac{k^4}{h^4}$. Iam aqua per orificium $DD = kk$ effluere inuenta eſt celeritate debita altitudini v, vt ſit

$$v = \frac{A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{f} + B\mathfrak{C}\mathfrak{g} + C\mathfrak{h} - (1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})l}{1 - (1 - \mathfrak{B})\mathfrak{C}\mathfrak{g} - (1 - \mathfrak{C})\mathfrak{h}}$$

vnde, vt iam ſupra notauimus, ſequitur, ſi frictio euaneſceret, fore $v = a + h + c$, ita vt altitudo celeritati effluxus debita eſſet aequalis toti altitudini AD.

69. Si amplitudo tubi medii BC aequalis eſſet amplitudini infimi CD, caſus ad praecedentem rediret;

ſin autem amplior eſſet, tanquam pars vaſis ſupremi ſpectari poſſet, ſicque pariter ad caſum primum reuocaretur. Quare ſi phaenomena, quae huic caſui ſunt propria, euoluere velimus, tubum medium BC multo arctiorem ſtatui conueniet, quam vel vas ſuperius, vel tubum infimum CD. Experimentis autem conſtat, ob gracilitatem huiusmodi meatus medii BC celeritatem effluxus non mediocriter imminui, vnde huius diminutionis cauſa aperte frictioni eſt tribuenda, cum ſublata frictione amplitudo huius tubi gg celeritatem effluxus non afficeret.

70. At ſi amplitudo tubi BC multo minor eſt, quam ſuperioris et inferioris, euidens eſt, venam aquae, quae ex vaſe ſuperiori in eum intrat, iam ante contrahi, ſimilique modo, cum inde in tubum ampliorem CD egreditur, etiam nunc poſt egreſſum contractiorem manere; ſicque aqua perinde mouebitur, ac ſi per tubum figurae βBBCCγ transflueret, ita vt tam vas ſuperius, quam tubus inferior ex aliqua parte coarctari ſit cenſendus. Quae circumſtantia in calculum inducetur, ſi longitudo tubi gracilioris BC aliquanto maior aeſtimetur, quam reuera eſt; atque tantumdem de altitudine tuborum contiguorum dematur.

71. Aſſumam ergo, hanc mutationem in deſignatione altitudinum a, b, c iam eſſe factam, ita vt quantitas b aliquanto maior, a vero et c aliquanto minores ſint, quam re vera deprehenduntur. Hinc ergo altitudo b eo maior eſt cenſenda, quo minor fuerit amplitudo huius tubi, prae amplitudine tam ſuperioris, quam inferioris. Hanc ob rem, ſi tubus BC fuerit arctiſſimus, ſeu

ſeu gg minimum, etiamſi eius altitudo BC ſit minima, tamen litterae b valor notabilis tribui debebit; ac ſi BC quaſi euaneſcat, quod euenit, ſi fundus vaſis ſuperioris foramine exiguo fuerit pertuſus, nihilominus in calculo littera b modicum valorem ſortietur.

72. Sit igitur amplitudo tubuli BC quaſi euaneſcens, ſeu g fere nihilo aequalis, ita vt valor ipſius b mediocrem nanciſcatur magnitudinem, etiamſi forte ipſa altitudo BC ſit minima; eritque $\frac{b}{g}$ numerus admodum magnus, ex quo valor ipſius $\mathfrak{B} = e^{-\frac{\alpha b}{g}}$ in fractionem abibit vnitate multo minorem, ita vt ſi eſſet $g = 0$, omnino fuerit $\mathfrak{B} = 0$. Praeterea vero euadet $\mathfrak{G} = \frac{k^4}{g^4}$ quantitas maxima. Quoniam vero amplitudines ff et bb non admodum paruae ſtatuuntur, erit $\mathfrak{A} = 1 - \frac{\alpha a}{f} + \frac{\alpha\alpha aa}{2ff}$; $\mathfrak{C} = 1 - \frac{\alpha c}{b} + \frac{\alpha^2 cc}{2bb}$ et $A = \frac{a}{f} - \frac{\alpha aa}{2ff}$ et $C = \frac{c}{b} + \frac{\alpha cc}{2bb}$.

73. Antequam autem ipſum effluxum definire queamus, videndum eſt, vtrum aqua in hoc vaſe continua manere, atque lateribus vaſis adhaerere queat; quem in finem quaeramus ſtatum compreſſionis aquae in CC, qui altitudine R exprimatur, eritque $l = R\mathfrak{C} + Cb + \mathfrak{H}v - v$, vnde reperitur:

$$R = \frac{l - Cb + (1 - \mathfrak{H})v}{\mathfrak{C}}$$

quae quantitas ſi fuerit negatiua, aqua continua non manet, ideoque effluxus calculo aduerſabitur.

74. Cum igitur ſit poſito $\mathfrak{B}$ valde paruo, ideoque $B = \frac{1}{\alpha}$

$$v = \frac{\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{g}{\alpha}\mathfrak{C} + Cb - l}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g} - \alpha C\mathfrak{h}} = \frac{\frac{g}{\alpha}\mathfrak{C} + Cb - l}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}}$$

neglectis terminis minimis, erit

$$R = \frac{l - Cb}{\mathfrak{C}} + \frac{(1-\mathfrak{h})\frac{g}{\alpha}}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}} - \frac{(1-\mathfrak{h})(l - Cb)}{\mathfrak{C}(1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g})},\ \text{ſiue}$$

$$R = \frac{(1-\mathfrak{h})\frac{g}{\alpha}}{1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g}} - \frac{(\mathfrak{C}\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - Cb)}{\mathfrak{C}(1 - \mathfrak{C}\mathfrak{g})}$$

At cum ſit proxime $\mathfrak{C} = 1$ et $Cb = c$, erit

$$v = \frac{\frac{g}{\alpha} + c - l}{1 - \mathfrak{g}} \quad \text{et} \quad R = \frac{\frac{g}{\alpha}(1-\mathfrak{h}) - (\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - c)}{1 - \mathfrak{g}}$$

75. Hinc primo patet, ſi fuerit $\mathfrak{g} = 1$ vel $\mathfrak{g} > 1$, effluxum nunquam ad ſtatum vniformitatis reduci, ideoque motum ex his formulis, quae ad hunc ſtatum ſunt accommodatae, definiri omnino non poſſe; ſtatim ergo ab initio calculus ita adornari debuiſſet, vt altitudo v, tanquam variabilis, eſſet introducta. Quodſi autem fuerit $\mathfrak{g} < 1$, ſeu $kk < gg$, effluxus quidem vniformis euadet, et aqua effluet, ſi fuerit $\frac{g}{\alpha} + c > l$, ſimulque $\frac{g}{\alpha}(1 - \mathfrak{h}) > (\mathfrak{g} - \mathfrak{h})(l - c)$; ſin autem ſit $\frac{g}{\alpha} + c = l$, ſeu $\frac{g}{\alpha} + c < l$, aqua plane non effluet, exiſtente, vti aſſumimus, $kk < gg$. At ſi ſit $\frac{g}{\alpha} + c > l$, puta $\frac{g}{\alpha} + c = l + \gamma$, effluxus ad vniformitatem perueniet, quoties fuerit $c < l$. Caſibus autem, quibus $c > l$, hoc multo magis eueniet, quia, ob $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$, tum valor ipſius R ſemper eſt affirmatiuus.

CASVS

CASVS III.

SI AQVA EX VASE CONSTANTER PLENO PER TVBVM HORIZONTALEM EFFLVIT.

76. Sit vaſis amplitudo $AA = ff$, et altitudo $AB = a$, tubi vero horizontaliter infixi longitudo $BC = b$, amplitudo $BB = gg$, et lumen, per quod aqua effluit, $CC = kk$. Ponatur breuitatis ergo $\mathfrak{A} = e^{\frac{-\alpha a}{f}}$; Tab. VII. Fig. 3.

$A = \frac{1-\mathfrak{A}}{\alpha}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}}$; $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{f} = \frac{k^4}{f^4}$; et $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$; erit altitudo celeritati effluxus debita, ob $\zeta = 90°$, et coſ. $\zeta = 0$, denotante l altitudinem 30 pedum,

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f - (1 - \mathfrak{A}\mathfrak{B})l}{1 - \mathfrak{B}\mathfrak{f} - \alpha B\mathfrak{g}}$$

77. Si vas AB fuerit valde amplum, erit $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{A} = 1 - \frac{\alpha a}{f}$ et $A = \frac{a}{f} - \frac{\alpha a^2}{2ff}$, vnde celeritas effluxus debita erit altitudini

$$v = \frac{a\mathfrak{B}(1 - \frac{\alpha a}{2f}) - (1 - \mathfrak{B} + \frac{\alpha a}{f}\mathfrak{B})l}{1 - (1 - \mathfrak{B})\mathfrak{g}}$$

vnde cum $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ vnitatem ſuperare nequeat, denominator ſemper erit quantitas affirmatiua $> \mathfrak{B}\mathfrak{g}$: quod indicio eſt, aquae effluxum certo ad ſtatum vniformitatis peruenire.

78. Vt autem aqua actu effluat, neceſſe eſt, vt ſit $a\mathfrak{B}(1 - \frac{\alpha a}{2f}) > (1 - \mathfrak{B} + \frac{\alpha a}{f}\mathfrak{B})l$, ſeu

$\mathfrak{B} > \frac{fl}{f(a+l) - \alpha a(\frac{1}{2}a + l)}$; ideoque $e^{\frac{-\alpha b}{g}} < 1 + \frac{a}{l} - \frac{\alpha aa}{2fl}$

$-\frac{\alpha\alpha a}{2fl}-\frac{\alpha a}{f}$; hinc logarithmis ſumendis oportet ſit $\frac{\alpha b}{g} < \log.(1+\frac{a}{l})-\frac{\alpha a(a+2f)}{2f(a+l)}$, vbi $\log.(1+\frac{a}{l})$ denotat logarithmum hyperbolicum numeri $1+\frac{a}{l}$. Ergo effluxus ceſſabit ſi ſit $b > \frac{g}{\alpha}\log.(1+\frac{a}{l})-\frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$.

79. Quo longior ergo fuerit tubus horizontalis BC, eo lentius aqua effluet, atque eius longitudo eousque excreſcere poteſt, vt aqua per eum plane non effluat; quod ſcilicet eueniet, ſi fuerit $b > \frac{g}{\alpha}\log.(1+\frac{a}{l})-\frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$. Hoc autem intelligendum eſt, ſi foramen CC in parte ſuperiori extremitatis tubi BC fiat. Si enim eſſet in parte inferiori, ob ipſam aquae grauitatem in tubo horizontali, quam in calculo non ſum contemplatus, vtique efflueret.

80. Si altitudo a multo, ſit minor quam l, erit proxime $\log(1+\frac{a}{l})=\frac{a}{l}$. Cum primum ergo longitudo tubi b ſuperauerit hanc quantitatem $\frac{g}{\alpha}\frac{a}{l}-\frac{ag(a+2f)}{2f(a+l)}$, effluxus aquae per orificium CC ceſſabit. Et quia terminus ſecundus minimus eſt reſpectu primi, aqua non amplius effluet, quando fuerit $b > \frac{g}{\alpha}\frac{a}{l}$; Hinc vt aqua effluat oportet ſit $b < \frac{g}{\alpha}\frac{a}{l}$.

81. Si ergo altitudo vaſis AB$=a$ fuerit vnius pedis, ob $l=30$ ped. effluxus aquae coercebitur, ſi tubi BC longitudo maior ſit, quam $\frac{g}{30\alpha}$. Hinc nouus colligitur modus valorem litterae α determinandi: cum enim per experimenta explorata fuerit longitudo tubi horizontalis b, cuius amplitudo gg ſit nota, vbi effluxus ceſſat, erit $\alpha=\frac{g}{b}\frac{a}{l}$.

82. Hu-

82. Huiusmodi ergo experimenta inſtitui poterunt tubis non adeo anguſtis, vti modo ante expoſito, vnde hic modus anteferri videtur. Cum enim tubi arctiſſimi, qui capillares vocari ſolent, ſingularibus proprietatibus ſint praediti, ſemper dubium relinqueretur, vtrum, ob has proprietates, effluxus aquae per huiusmodi tubos non peculiarem patiatur perturbationem, qua valor ipſius α inde collectus incertus redderetur.

83. Vt exemplum huiusmodi experimentorum exhibeam, ponamus eſſe vas AAB ampliſſimum, tubi vero horizontalis BC longitudinem eſſe $b = 2$ pedum, et amplitudinem $gg = \frac{4}{625}$ pedis quadrati, ideoque $g = \frac{2}{25}$ ped. lumen autem eius kk tam eſſe exiguum, vt $\mathfrak{g} = \frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi poſſit Hinc ob vas AAB ampliſſimum, negligi poterit fractio $\frac{\alpha a}{f}$, et habebitur $\mathfrak{B} = e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 1 - \frac{1}{80}$, ſumto $\alpha = \frac{1}{4000}$. Atque obtinebitur $v = a - \frac{a-30}{80} = \frac{79a-30}{80}$. Vt igitur aqua hoc caſu actu effluat, neceſſe eſt, vt ſit $a > \frac{30}{79}$ pedis.

84. Si poſuiſſemus $\alpha = \frac{1}{6000}$, prodiiſſet $\mathfrak{B} = 1 - \frac{1}{120}$, et $v = a - \frac{a-30}{120} = \frac{119a-30}{120}$, aqua ergo effluere inciperet ſtatim atque aquae in vaſe AB altitudo a ſuperaret $\frac{30}{119}$ ped Cum igitur poſito α incognito ſit $\mathfrak{B} = 1 - 50\alpha$, et $v = a(1 - 50\alpha) - 1500\alpha$, augeatur ſenſim altitudo aquae in vaſe AB, donec aqua per orificium CC effluere incipiat, et notetur tum altitudo $AB = a$ in pedibus, erit $\alpha = \frac{a}{50a + 1500}$.

85. Si idem experimentum alio tubo horizontali inſtituatur, cuius tam longitudo b, quam amplituoo gg,

ſit quaecunque, verumtamen eiusmodi, vt $\frac{\alpha b}{g}$ maneat fractio admodum parua, ſitque ſatis exacte $\mathfrak{B} = 1 - \frac{\alpha b}{g}$, et $v = a(1 - \frac{\alpha b}{g}) - \frac{\alpha b l}{g}$, atque altitudo aquae in vaſe AB notetur, vbi aqua per orificium CC primum effluere incipit, inde colligetur $\alpha = \frac{a g}{b(a+l)}$ hicque certiſſimus videtur modus, verum valorem ipſius α explorandi.

86. Spectemus autem valorem ipſius α, tanquam cognitum, ſcilicet $\alpha = \frac{1}{4000}$, et videamus in aliquo exemplo, quanta debilitatio in fontibus ſalientibus ob frictionem oriri debeat. Sit igitur vas AB admodum altum, ſcilicet $a = 100$ ped eiusque amplitudo $ff = 1$ pes quadratus, ſeu $f = 1$. Tum ſit amplitudo tubi horizontalis $gg = \frac{1}{100}$, ſeu $g = \frac{1}{10}$, eiusque longitudo $b = 100$; et lumen $kk = \frac{1}{10000}$: erit $\mathfrak{f} = 0$, et $\mathfrak{g} = \frac{1}{10000}$, tum vero $\mathfrak{A} = 1 - \frac{1}{40} + \frac{1}{2 \cdot 1600} -$ etc. ſeu $\mathfrak{A} = 0,97531$, et $\mathfrak{B} = 0,77880$, et $A = 98,760$.

87. His poſitis valoribus, prodibit altitudo celeritati effluxus debita:

$$v = 69,701 \text{ ped.}$$

Quodſi ergo lumen in dorſo tubi circa cc conſtituatur, vt per id aqua verticaliter erumpat, fons ſaliens tantum ad altitudinem $69\frac{7}{10}$ pedum aſſurget, ideoque 30 pedibus deficiet ab altitudine aquae in vaſe. Verum hic ſaltus etiam ob reſiſtentiam aëris aliquantum diminuetur, ita vt fons ne quidem ad hanc altitudinem $69\frac{7}{10}$ pedum ſit aſcenſurus.

CASVS

CASVS IV.

SI AQVA EX VASE CONSTANTER PLENO PER TVBVM CYLINDRICVM INCLINATVM DEFLVAT.

88. Sit vaſis amplitudo $AA = ff$, eiusque altitudo $AB = a$. Tubi inclinati longitudo $BC = b$, amplitudo $BB = gg$, et angulus, quo ad rectam verticalem inclinatur, $= \zeta$, ita vt $\cos. \zeta$ exprimat ſinum inclinationis eius ad horizontem; effluat vero aqua per lumen $CC = kk$, quod prae ff ſit minimum, vt ſit $\frac{k^4}{f^4} = \mathfrak{f} = 0$. Tab. VII. Fig. 4.

Porro ponatur $\frac{k^4}{g^4} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{A} = e^{\frac{-aa}{f}}$, $A = \frac{1-\mathfrak{A}}{a}$; $\mathfrak{B} = e^{\frac{-ab}{g}}$, et $B = \frac{1-\mathfrak{B}}{a}$; quibus poſitis erit altitudo celeritati, qua aqua per CC effluit, debita

$$v = \frac{A\mathfrak{B}f + Bg\cos.\zeta - (1-\mathfrak{A}\mathfrak{B})l}{1 - aB\mathfrak{g}}$$

89. Cum altitudo vaſis $AB = a$ non ſit admodum magna, et eius amplitudo ff ingens erit $Af = a$, et $\mathfrak{A} = 1$, proxime, vnde habebitur

$$v = \frac{a\mathfrak{B} + \frac{1}{a}(1-\mathfrak{B})g\cos.\zeta - (1-\mathfrak{B})l}{1-(1-\mathfrak{B})\mathfrak{g}}$$

vbi, cum $\mathfrak{g}$ vnitatem ſuperare nequeat, et ſit $\mathfrak{B} < 1$, denominator erit quantitas poſitiua; vnde motus ad vniformitatem perueniet. At ſi numerator fuerit vel $= 0$, vel quantitas negatiua, aqua plane non effluet, ſed in quiete perſeuerabit.

90. Si altitudo vaſis $AB = a$ ſit quam minima, patet effluxum non dari, niſi ſit $g \cos. \zeta < \alpha l$, ſeu, niſi ſinus decliuitatis tubi maior ſit, quam $\frac{\alpha l}{g}$. Quodſi ergo ponatur $g = n\alpha l = 0{,}0075\, n$ pedum, vt aqua per tubum BC defluat, neceſſe eſt, vt ſit $\cos. \zeta > \frac{1}{n}$. Si ergo ſit vel $n = 1$, vel $n < 1$, aqua per iſtiusmodi tubum plane non defluet; quare, vt aqua defluat, neceſſe eſt, vt ſit $n > 1$, ſeu $g > \alpha l$, ac tum ſinus decliuitatis maior eſſe debet, quam $\frac{1}{n}$.

91. Hinc pro fluminibus decliuitas aluei aſſignari poteſt, vt aqua decurrat, ita vt ſi decliuitas minor eſſet, aqua eſſet ſtagnatura. Pendet autem haec decliuitas a littera g, qua profunditas fluuii indicatur. Vt igitur hinc decliuitatem pro quauis fluminis profunditate definiamus, ſit pro diſtantia mille pedum altitudo, per quam alueus ſubſidit, $= z$ ped. eritque $\frac{z}{1000}$ ſinus decliuitatis. Quare ſi fluuii profunditas ſit g pedum, ob $g = \frac{3}{400} n$, et $n = \frac{400}{3} g$, fiet $\frac{z}{1000} > \frac{3}{400 g}$: vt ergo aqua in alueo defluat, oportet ſit $z > \frac{30}{4 g}$, ſeu $z > \frac{1000 \alpha l}{g}$.

92. Pro quauis ergo fluminis profunditate g definire poterimus decliuitatem aluei, quae diſtantiae mille pedum conueniat, vbi aqua primum fluxum conſequatur: ita vt, ſi decliuitas eſſet minor, aqua eſſet ſtagnatura, vti ſequens tabella habet.

Pro-

Profunditas fluminis	Decliuitas ad diſt. 1000 ped.	Profunditas fluminis	Decliuitas ad diſt 1000 ped.
0, 5 ped.	15, 00 ped.	5 ped.	1, 50 ped
1, 0	7, 50	6	1, 25
1, 5	5, 00	7	1, 07
2, 0	3, 75	8	0, 94
2, 5	3, 00	9	0, 83
3, 0	2, 50	10	0, 75
3, 5	2, 14	11	0, 68
4, 0	1, 87	12	0, 62
4, 5	1, 67	13	0, 58
5, 0	1, 50	14	0, 53$\frac{1}{3}$
		15	0, 50

93. Si ergo decliuitas pro data profunditate maior fuerit, quam haec tabula indicat, aqua in alueo decurret; eiusque celeritas proxime innoteſcet, ſi ponatur $g = 1$, vnde fiet:

$$v = a + (e^{\frac{\alpha b}{g}} - 1)(\tfrac{1}{\alpha} g \,\text{coſ.}\, \zeta - l)$$

Patet ergo, manente eadem decliuitate, ita tamen, vt $\text{coſ.}\,\zeta > \frac{\alpha l}{g}$, celeritatem fluminis eo ſore maiorem, quo longior fuerit fluuii tractus. Notari etiam conuenit, curſum fluuii eiusdem accelerari, ſi pondus atmoſphaerae diminuatur.

94. Quoniam ante (86, 87) caſum euoluimus, quo aqua ex vaſe, centum pedes alto, ad diſtantiam centum pedum per tubum horizontalem, cuius amplitudo $gg = \frac{1}{100}$ ped. erat deriuata; ponamus nunc eiusdem vaſis altitudinem eſſe minimam, ex eoque aquam

 per

der tubum, angulo ſemirecto, ad horizontem inclinatum, ad eundem locum C deduci, eſſeque vt ante $gg = \frac{1}{100}$, ſeu $g = \frac{1}{10}$ ped. erit coſ. $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 100\sqrt{2}$ $= 14, 14$ ped.

95. Cum igitur ſit $\frac{ab}{g} = 0,3536$, erit $\mathfrak{B} = 0,7021$. Statuamus, vt ibi orificium kk minimum, et ob a quantitatem minimam, erit

$$v = 0,2979\ (\tfrac{100}{\sqrt{2}} - 30) = 75,309 \text{ pedum.}$$

Quae quantitas cum ſit maior, quam caſu praecedente, $5\frac{2}{7}$ pedibus, ſequitur aquam hoc caſu ad altitudinem maiorem eſſe aſcenſuram, quam caſu praecedente.

CASVS V.

SI AQVA EX VASE *AB* VEL PER TVBVM CYLINDRICVM INCLINATVM *BE*, VEL PER INFLEXVM *bcE* DEFLVAT ET INDE PER TVBVM VERTICALEM *CD* ERVMPAT.

96. Sit vaſis AB altitudo a minima, amplitudo vero ff maxima: tum, quia hic duos caſus euoluere conſtitui, ſit pro vtroque caſu amplitudo tubi deferentis BB $= bb = cc = gg$, tubuli verticalis CD altitudo $= c$, et amplitudo CC $= bb$, et lumen in DD $= kk$. Tum pro caſu priori ſit longitudo tubi BE $= b$, eiusque ad verticalem inclinatio $= \zeta$; erit pro caſu altero $bc = b$ coſ. ζ, et cE $= b$ ſin. ζ. Ponatur autem $\frac{k^4}{g^4} = \mathfrak{G}$ et $\frac{k^4}{b^4} = \mathfrak{H}$.

67. His

97. His poſitis pro primo caſu habebimus:

$\mathfrak{A}=1$; $A=\frac{a}{j}$; $\mathfrak{B}=e^{\frac{-ab}{g}}$, $B=\frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$; $\mathfrak{C}=e^{\frac{-\alpha c}{b}}$ et $C=\frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$;
vnde celeritas effluxus debita erit altitudinis v, vt ſit

$$v=\frac{a\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}g\cos.\zeta-\frac{1}{\alpha}(1-\mathfrak{C})b-(1-\mathfrak{B}\mathfrak{C})l}{1-(1-\mathfrak{B})\mathfrak{C}g-(1-\mathfrak{C})\mathfrak{h}}$$

ſeu ſubſtitutis valoribus aſſumtis:

$$v=\frac{e^{\frac{-ab}{g}-\frac{\alpha c}{b}}a+\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-ab}{g}})e^{\frac{ab}{b}}g\cos.\zeta-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})b-(1-e^{\frac{-ab}{g}-\frac{c}{b}})l}{1-(1-e^{\frac{-ab}{g}})e^{\frac{-\alpha c}{b}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})\mathfrak{h}}$$

ſiue

$$v=\frac{e^{\frac{-ab}{g}-\frac{\alpha c}{b}}(a-\frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta+l)+e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\frac{1}{\alpha}g\cos.\zeta+\frac{1}{\alpha}b)-\frac{1}{\alpha}b-l}{1-\mathfrak{h}-e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\mathfrak{g}-\mathfrak{h})+e^{\frac{-\alpha b}{g}-\frac{\alpha c}{b}}\mathfrak{g}}$$

98. Pro altero vero caſu, ad §. 39. relato, habebimus:

$\mathfrak{A}=1$; $Af=a$; $\mathfrak{B}=e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}}$; $\cos.\zeta=1$; $g=g$; $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$; et $B=\frac{1-\mathfrak{B}}{\alpha}$

Tum $\mathfrak{C}=e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}}$; $\cos.\eta=0$; $b=g$; $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$; et $C=\frac{1-\mathfrak{C}}{\alpha}$;

atque $\mathfrak{D}=e^{\frac{-\alpha e}{b}}$; $\cos.\theta=-1$; $i=b$; $\mathfrak{i}=\mathfrak{h}$; et $D=\frac{1-\mathfrak{D}}{\alpha}$;
quibus valoribus ſubſtitutis prodibit altitudo celeritati effluxus debita:

$$v=\frac{(l+a)e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}-\frac{\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}+\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}})e^{-\frac{\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}g-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})b-l}{1-(1-e^{\frac{-\alpha b\cos.\zeta}{g}})e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}-\frac{\alpha c}{b}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha b\sin.\zeta}{g}})e^{\frac{-\alpha c}{b}}\mathfrak{g}-(1-e^{\frac{-\alpha c}{b}})\mathfrak{h}}$$

ſiue

ſiue

$$v = \frac{e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta - \alpha b\sin\zeta}{g} - \frac{\alpha c}{b}}(a - \frac{1}{\alpha}g + l) + e^{\frac{-\alpha b\sin\zeta}{g} - \frac{\alpha c}{b}}\frac{1}{\alpha}g + e^{\frac{-\alpha c}{b}}\frac{1}{\alpha}b - \frac{1}{\alpha}b - l}{1 - \mathfrak{h} - e^{\frac{-\alpha c}{b}}(\mathfrak{g} - \mathfrak{h}) + e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta}{g} - \frac{\alpha b\sin\zeta}{g} - \frac{\alpha c}{b}}}.$$

99. Notandum autem eſt, quantumuis altitudo tubuli $CD = c$ fuerit exigua, tamen eam ob rationes ante expoſitas maiorem capi debere, et quo minor fuerit eius amplitudo bb, eo magis altitudo vera c augeri debebit. Etiamſi ergo tubulus CD fuerit breviſſimus, ſeu quaſi foraminulum per laminam pertuſum, fractio $\frac{\alpha c}{b}$ eo maiorem habebit valorem, quo minus fuerit foraminulum, ſeu quo minus fuerit b. Cum igitur hoc caſu $e^{\frac{-\alpha c}{b}}$ fiat numerus valde paruus, perſpicuum eſt, foraminulum tam paruum fieri poſſe, vt aqua per id plane non effluat.

100. Si tubulus DC in DD penitus ſit apertus, erit $\mathfrak{h} = 1$ et caſu priori habebitur:

$$v = \frac{e^{\frac{-\alpha b}{g}}(a + l - \frac{1}{\alpha}g\,\text{coſ.}\,\zeta) + \frac{1}{\alpha}g\,\text{coſ.}\,\zeta + b) - e^{\frac{\alpha c}{b}}(l + \frac{1}{\alpha}b)}{1 + (e^{\frac{-\alpha b}{g}} - 1)\mathfrak{g}}$$

Pro caſu autem poſteriori habebitur:

$$v = \frac{e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta - \alpha b\sin\zeta}{g}}(a + l - \frac{1}{\alpha}g) + \frac{1}{\alpha}e^{\frac{-\alpha b\sin\zeta}{g}}g + \frac{1}{\alpha}b - e^{\frac{\alpha c}{b}}(l + \frac{1}{\alpha}b)}{1 + (e^{\frac{-\alpha b\cos\zeta - \alpha b\sin\zeta}{g}} - 1)\mathfrak{g}}$$

quoties ergo eſt $\mathfrak{g} < 1$, aquae motus ſemper ad ſtatum vniformitatis pertinget.

101. Caſus prior potiſſimum inſeruit retardationi aquae per aquaeductus a frictione ortae determinandae. Cuius motus, vt exemplum exhibeamus, ſit altitudo aquae in receptaculo a valde parua, longitudo aquaeductus BE $= b = 2000$ ped. amplitudo $gg = \frac{16}{25}$, ſeu $g = \frac{4}{5}$ ped. altitudo bc, ſeu $b \operatorname{coſ.} \zeta = 150$ ped. foramen autem kk tam paruum, vt $g = \frac{k^4}{g^4}$ pro nihilo haberi poſſit. Denique ſit tubuli CD altitudo $c = \frac{1}{10}$ ped. et $b = \frac{1}{100}$ ped.

102. His poſitis ſumto $\alpha = \frac{1}{4000}$ erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{5}{8}$, ideoque $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,535255$ et $e^{\frac{\alpha c}{b}} = 1,002503$. Hinc ergo erit

$$v = \tfrac{5}{8}a + 97,42124 \text{ pedum.}$$

Hoc ergo caſu, dummodo fuerit altitudo vaſis AB ſex pedum, aqua per lumen DD exſiliet ad altitudinem 100 pedum, ſicque frictio 50 pedes a iactu abſumit.

103. Si reliquis manentibus iisdem, ſit $gg = 1$ et $g = 1$, erit $\frac{\alpha b}{g} = \frac{1}{2}$ et $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,606531$, hincque reperitur

$$v = \tfrac{1}{2}a + 106,24 \text{ pedum,}$$

ita vt aqua ad nouem pedes altius ſit aſcenſura, quam caſu praecedente, ob auctam tubi BE amplitudinem. Sin autem amplitudo tubi diminuatur, vt ſit $gg = \frac{9}{25}$, ſeu $g = \frac{3}{5}$ ped. ob $\frac{\alpha b}{g} = \frac{5}{6}$ erit $e^{\frac{-\alpha b}{g}} = 0,43460$, ideoque altitudo celeritati effluxus debita

$v = \frac{1}{3}a + 84,810$ pedum

ſicque vltra 12 pedes deficit ab altitudine §. praecedentis. At ſi ſit $gg = \frac{1}{4}$, ſeu $g = \frac{1}{2}$, vt habeatur $\frac{ab}{g} = 1$, erit $e^{\frac{-ab}{g}} = 0,36788$, ideoque

$v = \frac{1}{3}a + 75,854$ pedum;

altitudo ergo iactus nunc 9 pedibus minor eſt, quam ante.

104. Patet ergo in fontibus ſalientibus altitudinem iactus non ſolum ab altitudine receptaculi, ſeu caſtelli, pendere, vt vulgo Auctores hydraulici perhibent, ſed etiam potiſſimum ab amplitudine et longitudine canalium, per quos aqua e caſtello ad fontes ſalientes deriuatur. Quo ampliores enim et breuiores fuerint canales, eo propius fons ſaliens altitudinem caſtelli attingit, arctioribus autem ac nimis longis canalibus adhibendis fieri adeo poteſt, vt aqua plane ad nullam altitudinem aſcendat. Cauſa igitur huius debilitationis eſt frictio, littera α hic contenta, cuius valorem hic poſui $\alpha = \frac{1}{4900}$, conſultis autem quibusdam experimentis, videtur poni debere $\alpha = \frac{1}{4540}$.

APPEN-

APPENDIX

DE

FONTIBVS SALIENTIBVS.

105. Hinc ergo ſatis accurate definiri poterit altitudo, ad quam aqua in fontibus ſalientibus ſurſum proiicietur. Ponatur enim primo altitudo aquae in caſtello, ſeu $AB = a$, tam parua, vt prae ipſius eleuatione ſupra orificium fontis DD pro nihilo reputari poſſit. Tum vero tubulus CD neque nimis longus, neque nimis anguſtus capiatur, ita vt $\frac{ac}{b}$ ſit fractio quam minima; huc enim plerumque redeunt omnes caſus fontium ſalientium. Quibus poſitis erit altitudo debita celeritati, qua aqua per orificium DD exſiliet, Tab. VII Fig. 5.

$$v = \frac{g \operatorname{cof}.\zeta}{a}(1 - e^{\frac{-ab}{g}}) - l(1 - e^{\frac{-ab}{g}})$$

106. In hac expreſſione denotat l altitudinem columnae aquae preſſioni atmoſphaerae aequiponderantis, eritque ergo propemodum $l = 30$ pedum. Deinde b exprimit longitudinem totius aquaeductus BE, per quem aqua a caſtello vsque ad fontem DG deriuatur; qui ſi ponatur ſecundum lineam rectam diſpoſitus, vti fere fieri ſolet, erit $b \operatorname{cof}.\zeta$ altitudo aquae in caſtello ſupra fontem. Quare ſi haec altitudo CF dicatur $= q$, erit $\operatorname{cof}.\zeta = \frac{q}{b}$: ſicque erit $v = (\frac{gq}{ab} - l)(1 - e^{\frac{-ab}{g}})$

107. Aſſumimus porro totum aquaeductum cylindricum, ita vt eius altitudo ſit vbique eadem, $= gg$;

ſi ergo diameter huius aquae ductus ſit $= d$, erit $gg = \frac{1}{4}\pi dd$, et $g = \frac{1}{2} d \sqrt{\pi}$. Cum ergo collegerim ex experimentis eſſe $\alpha = \frac{1}{4540}$, erit $\frac{g}{\alpha} = 2270 d \sqrt{\pi} = 4023 d$. Calculus ergo ſatis exacte ſe habebit, ſi poſito canalis diametro $= d$, ſumamus $\frac{g}{\alpha} = 4000 d$.

108. Cum igitur ſit $v = \frac{g}{\alpha b}(q - \frac{\alpha b l}{g})(1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}})$, ob

$$1 - e^{\frac{-\alpha b}{g}} = \frac{\alpha b}{g} - \frac{\alpha^2 b^2}{2 g^2} + \frac{\alpha^3 b^3}{6 g^3} - \frac{\alpha^4 b^4}{24 g^4} - \text{etc.}$$

habebitur altitudo iactus verticalis:

$$v = (q - \frac{\alpha b l}{g})(1 - \frac{\alpha b}{2 g} + \frac{\alpha^2 b^2}{6 g^2} - \frac{\alpha^3 b^3}{24 g^3} + \text{etc.})$$

vbi eſt $\frac{\alpha b}{g} = \frac{b}{4000 d}$.

109. En ergo ſequentem regulam pro altitudine iactus, in quouis fonte ſaliente inuenienda: *Diuidatur tota canalis longitudo per diametrum amplitudinis eiusdem canalis, et quotus ponatur* $= n$, *tum ſit*

$$N = 1 - \frac{n}{2 \cdot 4000} + \frac{n^2}{6 \cdot 4000^2} - \frac{n^3}{24 \cdot 4000^3} + \frac{n^4}{120 \cdot 4000^4} - \text{etc.}$$

Tum ſit q eleuatio aquae in caſtello ſupra fontem, eritque altitudo iactus

$$v = Nq - \frac{1}{400} Nn \text{ pedum.}$$

Vel poſito $\frac{1}{400} Nn = M$, *erit altitudo iactus in pedibus expreſſa* $v = Nq - M$.

110. Ex dato ergo numero n, qui prodit, ſi longitudo canalis per eius diametrum diuidatur, colligantur valores litterarum N et M; tum prior numerus N multiplicetur per eleuationem aquae in caſtello ſupra fontem, quae altitudo in pedibus ſit expreſſa, et ab hoc producto

ducto ſubtrahatur numerus poſterior M, reſiduumque exhibebit altitudinem iactus in pedibus expreſſam.

111. Hoc autem modo prodibit non tam ipſa iactus altitudo, quam altitudo celeritati, qua aqua exſilit, debita; conſtat enim hanc altitudinem ob reſiſtentiam aëris inſuper aliquantum diminui, ita vt, ſi fons verticaliter exſiliat, eius altitudo aliquanto minor ſit futura, quam per regulam datam reperitur. Huius vero diminutionis, quae ex alio fonte originem trahit, hic nullam rationem habebo.

112. Quo igitur, quouis caſu oblato, altitudo iactus ob frictionem ſolam imminuta facilius colligi queat, conueniet tabulam conſtrui, quae pro quouis valore ipſius n, ſeu quoti ex diuiſione longitudinis canalis per eius diametrum orti, exhibeat valores litterarum N et M. His enim inuentis, ſi inſuper altitudo caſtelli ſupra orificium fontis q in calculum trahatur, ſine negotio altitudo iactus v inde colligetur, cum ſit

$$v = Nq - M \text{ pedum.}$$

TABVLA

exhibens valores litterarum N et M pro ſingulis valoribus litterae *n*.

n	N	M	*n*	N	M
100	0,9876	0,7407	2200	0,7692	12,6912
200	0,9756	1,4634	2300	0,7605	13,1185
300	0,9635	2,1678	2400	0,7519	13.5354
400	0,9516	2,8548	2500	0,7435	13,9419
500	0,9400	3,5250	2600	0,7353	14,3385
600	0,9286	4,1787	2700	0,7271	14,7250
700	0,9174	4,8162	2800	0,7191	15,1020
800	0,9064	5,4381	2900	0,7112	15,4698
900	0,8955	6,0444	3000	0,7035	15,8286
1000	0,8848	6,6357	3100	0,6958	16,1784
1100	0,8743	7,2129	3200	0,6883	16,5198
1200	0,8639	7,7754	3300	0,6809	16,8525
1300	0,8537	8,3239	3400	0,6738	17,1771
1400	0,8437	8,8590	3500	0,6664	17,4936
1500	0,8339	9,3810	3600	0,6593	17,8026
1600	0,8242	9,8901	3700	0,6523	18,1036
1700	0,8146	10,3866	3800	0,6455	18,3975
1800	0,8052	10,8708	3900	0,6387	18,683[illegible]
1900	0,7960	11,3431	4000	0,6321	18,9633
2000	0,7869	11.8038	4100	0,6255	19,2356
2100	0,7780	12,2530	4200	0,6191	19,5015

n	N	M	*n*	N	M
4300	0,6127	19,7605	6700	0,4852	24,3804
4400	0,6065	20,0136	6800	0,4808	24,5192
4500	0,6003	20,2600	6900	0,4765	24,6554
4600	0,5942	20,5005	7000	0,4721	24,7866
4700	0,5882	20,7351	7100	0,4679	24,9151
4800	0,5823	20,9640	7200	0,4638	25;0406
4900	0,5765	21,1869	7300	0,4597	25,1631
5000	0,5708	21,4044	7400	0,4556	25,2829
5100	0,5651	21,6164	7500	0,4515	25,3989
5200	0,5595	21,8234	7600	0,4475	25,5125
5300	0,5540	22,0254	7700	0,4436	25,6234
5400	0,5486	22,2224	7800	0,4398	25,7316
5500	0,5434	2,24145	7900	0,4360	25,8371
5600	0,5382	22,6017	8000	0,4323	25,9398
5700	0,5330	22,7844	8100	0,4286	26,0399
5800	0,5279	22,9627	8200	0,4250	26,1377
5900	0.5229	23,1366	8300	0,4214	26,2331
6000	0,5179	23,3058	8400	0,4179	26,3261
6100	0,5130	23,4709	8500	0,4144	26,4168
6200	0,5082	23,6321	8600	0,4109	26,5052
6300	0,5035	23,7894	8700	0,4075	26,5915
6400	0,4989	23,9428	8800	0,4041	26,6757
6500	0,4942	24,0924	8900	0,4008	26,7578
6600	0,4897	24,2381	9000	0,3976	26,8377

9100

n	N	M	n	N	M
9100	0,3944	26,9156	26000	0,1536	29,9547
9200	0,3913	26,9917	27000	0,1479	29,9649
9300	0,3882	27,0660	28000	0,1427	29,9727
9400	0,3850	27,1385	29000	0,1378	29,9787
9500	0,3819	27,2094	30000	0,1332	29,9838
9600	0,3789	27,2782	31000	0,1290	29,9874
9700	0,3760	27,3454	32000	0,1250	29,9901
9800	0,3732	27,4110	33000	0,1212	29,9925
9900	0,3702	27,4750	34000	0,1176	29,9973
10000	0,3672	27,5373	35000	0,1143	29,9952
11000	0,3404	28,0821	36000	0,1110	29,9964
12000	0,3167	28,5063	37000	0,1081	29,9937
13000	0,2958	28,8363	38000	0,1053	29,9979
14000	0,2771	29,0940	39000	0,1025	29,9983
15000	0,2604	29,2944	40000	0,10 0	29,9987
16000	0,2454	29,4404	41000	0,0976	29,9990
17000	0,2319	29,5728	42000	0,0952	29,9992
18000	0,2197	29,6664	43000	0,0930	29,9994
19000	0,2086	29,7405	44000	0,0909	29,9995
20000	0,1986	29,7978	45000	0,0889	29,9996
21000	0,1895	29,8425	50000	0,0800	29,9999
22000	0,1811	29,8773	55000	0,0727	30,0000
23000	0,1734	29,9046	60000	0,0666	30,0000
24000	0,1663	29,9256	65000	0,0615	30,0000
25000	0,1597	29,9421	70000	0,0571	30,0000

n	N	M	*n*	N	M
75000	0,0533	30,0000	140000	0,0286	30
80000	0,0500	30,0000	150000	0,0267	30
85000	0,0470	30,0000	160000	0 0250	30
90000	0,0444	30,0000	170000	0,0235	30
95000	0,0421	30,0000	180000	0,0222	30
100000	0,0400	30,0000	190000	0,0211	30
110000	0,0364	30	200000	0,0200	30
120000	0,0333	30	300000	0,0133	30
130000	0,0308	30			

113. Non opus eſt, vt haec tabula vlterius continuetur; ſi enim fuerit *n* numerus maior, quam 50000, erit iuſte $N = \frac{4000}{n}$, et $M = 30$ ped. Quaecunque ergo fuerit diſtantia, ſeu longitudo, canalis, eiusque diameter, ex quoto *n*, qui ex diuiſione longitudinis per diametrum reſultat, ope huius tabulae facile excerpuntur valores N et M, quibus inuentis, ſi eleuatio aquae in caſtello ſupra fontem ponatur $= q$, erit altitudo fontis $v = Nq - M$ ped.

114. Si nulla eſſet frictio, altitudo fontis *v* aequalis eſſet altitudini caſtelli *q*, ſeu $v = q$. Vnde patet, ob frictionem hanc altitudinem *q* duplici modo diminui: primum enim multiplicari debet per N, qui eſt numerus vnitate minor; tum vero inſuper ab hoc producto ſubtrahi debet altitudo M, quae 30 pedes ſuperare nequit, atque haec poſtrema diminutio preſſioni

atmoſphaerae debetur, quae ſi maior minorue eſſet, numeri M in eadem ratione augeri, vel diminui, deberent.

115. Hinc ergo ſtatim elucet, ſi altitudo caſtelli q minor fuerit, quam $\frac{M}{N}$, aquam ex orificio DD non eſſe egreſſuram, ſed eius motum a frictione penitus compeſci. Ita ſi ſit $n = 100000$, ſaliens fons non dabitur, niſi ſit $q > \frac{3000}{4}$, ſeu $q > 750$ ped. Viciſſim autem, ſi altitudo q detur, vt aqua ſaltem effluat, debet eſſe $\frac{M}{N} < q$; cum igitur creſcente n valor $\frac{M}{N}$ creſcat, hinc innoteſcet limes, infra quem valor ipſius n ſubſiſtere debet.

116. Si locus caſtelli vna cum loco fontis ſit datus, et quaeratur is aquae ductus, quo fons ad maximam altitudinem aſſiliat; primo canalis a caſtello quantum fieri poteſt ſecundum lineam rectam dirigi debet; deinde vero deſiderio potiſſimum ſatisfiet, ſi canali maxima tribuatur amplitudo, quam circumſtantiae permittunt. Ex tabula enim apparet, altitudinem iactus inprimis ab amplitudine canalis pendere.

117. Quod quo exemplo perſpiciatur, ſit altitudo caſtelli $q = 130$ ped. et diſtantia eius a fonte $b = 2500$ ped. et pro variis canalis diametris altitudo iactus ſe ita habebit:

Diam. canalis	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
numerus n	2500	5000	7500	10000	12500	15000.
N	0, 7435	0, 5708	0, 4515	0, 3672	0, 3062	0, 2604
M	13, 941	21, 404	25, 399	27, 537	28, 660	29, 294
alt. iactus v	82, 71	52, 80	33, 29	20, 19	11, 19	4, 56

Si

Si ergo diameter canalis minor eſſet, quam $\frac{1}{6}$ ped. aqua plane non exſiliret.

118. Patet etiam aquam de loco valde remoto aduehi non poſſe, niſi iſte locus admodum ſit eleuatus: propterea quod canales non nimis amplos confici licet. Ita ſi aqua ex diſtantia vnius milliaris ſit arceſſenda, ita vt ſit $b = 25000$, et canalium diameter ſit $\frac{1}{4}$ pedis, erit $n = 100000$, hoc praeſtari nequit, niſi receptaculum vltra 750 pedes eleuatum ſit ſupra locum fontis,

Ponamus ergo hanc eleuationem eſſe $q = 1000$ ped. et aqua ex fonte non vltra altitudinem 10 pedum aſcendet: ſin eſſet $q = 2000$ ped. altitudo iactus prodiret 50 ped. et pro ſingulis millenis pedibus, quibus altitudo q augetur, altitudo ſaltus tantum quadragenis pedibus creſcit.

119. Si atmoſphaera nullam exerceret preſſionem, quantitas M omitti deberet; atque hoc caſu aqua per orificium DD erumperet, dummodo aqua in caſtello magis fuerit eleuata. Foret autem $v = Nq_1$ ſeu ob frictionem ſe haberet CG ad CF, vti numerus N ad vnitatem; at eſt $N < 1$, niſi $n = 0$, et praecipui valores ipſius N ſequentibus valoribus ipſius n reſpondebunt:

$N =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$n =$	0	2400	3500	6300	11300	15700	19860	24000	28000	32000	36000

Hinc ſi ſit $N = \frac{1}{\nu}$ et $\nu > 5$, erit $n = 4000\nu$.

120. Ob preſſionem autem atmoſphaerae altitudo fontis CG adhuc magis diminuitur, et ab altitudine iam imminuta Nq inſuper ſubtrahi debet altitudo M, ita vt prodeat $v = Nq - M$. Ex tabula autem annexa patet, ſi fuerit quotus $\frac{b}{d} = n$; numerus maior quam 50000, fore $v = \frac{40000\,d}{b} q - 30$ pedum. Cum igitur preſſio atmoſphaerae ſit variabilis, et altitudini mercurii in Barometro proportionalis, ſequitur fontes ſalientes ad eo maiorem altitudinem aſcendere debere, quo minus mercurius in Barometro fuerit eleuatus.

EXPLI-

EXPLICATIO
EXPERIMENTI PARADOXI
DE
ASCENSV CONI DVPLICIS IN ALTVM SPONTANEO.

Auctore

G. W. KRAFFT.

§. 1.

Hoc experimentum conſiſtit in his. Conus duplex A, ex duobus conis rectis compoſitus, quorum vtriusque baſes coniunctae ſint, ſi imponatur duobus planis inclinatis et diuergentibus CB, DB, apud B concurrentibus, quod punctum B notabiliter depreſſius ſit baſi huius trianguli CD, et deinde ſibi relinquatur: mouebitur ſua ſponte, aſcendetque in locum magis eleuatum, cuius puncta maiorem diſtantiam tenent CD. Referunt hoc experimentum, primus, niſi fallor, *Whiſton*, *Courſe of Experiments*, *pag.* 1; deinde *Graueſandius*, *Phyſ. Element. Math. Edit. nouiſſ. Tomo I. pag.* 47; Celeberr. *Muſſchenbroekius*, *Eſſai de Phyſique*, *pag.* 141; *Deſaguliers*, *Cours de Phyſique Experiment. Tomo I. pag.* 58; qui illud vocat, *improuiſum phaenomenum*. Poteſt coniunctio baſium conorum cingi adhuc rota, vel diſco aliquo maiori, quod *Graueſandius* fecit; vel etiam ſimpliciter ad vſum adhiberi corpus ex duobus conis compoſitum, cum *Whiſtono*, quale etiam hic Tab. VIII. Fig. 1.

 reprae-

repraeſentamus. Id vero magis eſt neceſſarium, vt aſſerculorum diuergentium loco, quod in experimento *Graueſandiano* fit, non aperiendorum, ad vſum vocentur duae trabeculae BC, BD, quorum angulus apud B magis aperiri aut claudi queat, et quae in C et D cochleis inſtructae ſint, ad eleuandam aut deprimendam rectam CD pro lubitu, vt hoc apparatu dein in varios caſus experimenti huius, certe ingenioſi, poſſit inquiri.

§. 2. Prima quidem fronte hoc experimentum plane paradoxum, et illi regulae generali aduerſum, videtur, in omni motu corporis, a grauitate ſola orto, centrum ipſius grauitatis debere deſcendere, hoc eſt, propius ad horizontem accedere; ſed melius inſpectum, accuratiusque excuſſum, praecedentem regulam penitus confirmat, neque deſtruit. Si enim conſideretur centrum grauitatis huius rotae, quae facta per ſe rotatione ſuperiora petit, apparebit, hoc centrum, ob ſitum obliquum ab axibus conicis et rectis obliquis, quibus incumbit, oriundum, minime ſuſtentari, adeoque totam rotam re vera deſcendere, dum non niſi apparenter tantum loca altiora verſus aſcendiſſe videtur. Vt vero, quod difficultate non caret, atque a nemine adhuc, quantum ſcio, factum eſt, dilucide explanare atque oſtendere poſſim, quam ob rationem aſcenſus hic oculis ſpectatorum imponat, quem quidem, vti compertum habeo, aliqui ad *perpetui mobilis* fabricam vſurpare voluerunt: examinabo eandem hanc rotam conicam tali angulo impoſitam, cuius crura ſint horizontalia primum; nam haec poſitio auget adhuc celeritatem rotae currentis. Intuenti quidem hunc motum ſtatim perſpicuum

eſſe

eſſe poteſt, centrum grauitatis inter aſcendendum ſemper deſcendere, quod etiam demonſtrat *Celeberr. Muſſchenbroekius*, *l. c.* et capta altitudine ſupra horizontem ab initio motus, et deinde in fine ipſius, manifeſte in oculos incurrit: ſed quod in quolibet ſitu nihil adſit, quod centrum grauitatis ſuſtineat, vt adeo rota neceſſario in omni ſitu debeat prouolui, impulſa per ipſam vim centri grauitatis, non ita apertum eſt, vt primo ſtatim intuitu pateat, ſed aliquatenus abſconditum. Nam cylindrus, ſimili modo impoſitus, vbique, ac in omni ſitu, quieſcit.

§. 3. Impoſitus igitur concipiatur conus hic duplex duabus lineis rectis, horizontalibus, AB et CB, exiſtentibus in lateribus ſuperioribus plani rectanguli in BD complicati et iuncti per rectam verticalem BD. Per medium anguli B ducatur recta BI, in eodem plano horizontali ABC, quae tranſibit alicubi per baſin vtriusque coni communem; nam duplex conus baſe ſua in medio anguli ABC ſitus eſſe ſupponitur; atque erunt hae tres lineae AB, IB, CB, in eodem plano horizontali, ad quod BD eſt perpendicularis, adeoque verticalis Patet iam, ſi conus anterior plano verticali ABD, ſurſum producto, ſecari concipiatur: orituram eſſe exinde *Ellipſin Apollonianam*, quam AB tangit. Cum itaque planum baſeos IB, et planum ſecans AB, faciant angulum ABI, aequalem ſemiaperturae planorum diuergentium ABC, et communis vtriusque ſectio BD ſit verticalis, aut perpendicularis ad planum horizontale ABC: ducatur diameter baſeos FG, parallela ad IB, adeoque pariter horizontalis, et continuata in Tab. VIII. Fig. 2.

H; erit

H; erit igitur etiam FHD rectus, qualis eſt IBD, vnde per planum ſecans AB ſectio coni efficietur talis, vt interſectio plani ſecantis, et diametri productae baſeos, conſtituat cum hac angulum rectum; quo caſu oritur Ellipſis, cuius diameter tranſuerſa eſt eiusdem axis, vti ex Conicis clarum eſt; vid. meae *Inſtitutiones Geometriae ſublimioris*, P. *I*, §. 46, *et* 48; atque, vt imaginationi melius conſulatur, archetypum aliquod leue ex charta conficiatur.

Tab. VIII. Fig. 3. §. 4. Hinc itaque ſemiconus, priori figurae exemtus, et chartae perpendiculariter inſiſtens, ſit FKGE, in quo eſt ſemiapertura planorum ABI, aut αHF, ob parallelas AB et αH, nec non IB et FH, Conus hic eſt rectus, quia talis ſupponitur, adeoque FLE angulus eſt rectus; $\alpha\beta$ eſt axis tranſuerſus ſectionis; ſectio ipſa $\alpha\delta\beta$, quam in δ tangit AB; ε eſt punctum, per quod tranſit in axe Ellipſeos axis Coni EL; et quia axis Ellipſeos $\alpha\beta$, et tangens AB, ſunt parallelae: erit recta, ex puncto contactus δ in illum perpendiculariter demiſſa, $\delta\gamma$, axis coniugatus, et hinc γ centrum Ellipſeos, $\varepsilon\eta$ ſemiapplicata, quae producta in tangentem eſt $\varepsilon\eta\zeta$. Incumbit ergo conus puncto δ; et quia AB pro horizontali eſt aſſumenda, huic puncto δ ſuperne verticaliter reſpondet centrum Ellipſeos γ, quod ſimul eſt eiusdem centrum grauitatis, ſuffultum itaque, et a lapſu liberum. At vero diameter grauitatis vtriusque coni eſt recta EL, continuata in verticem alterius coni oppoſiti, et tranſiens per centrum L baſeos coniunctae, in quo centrum grauitatis iacet totius huius coni compoſiti; et quia haec diameter grauitatis

vitatis tranſit per punctum axis Elliptici ε, ex quo perpendicularis ad horizontem demiſſa eſt $\varepsilon\zeta$: concipi debet pondus coni actionem ſuam exercere in hoc puncto ε verticaliter deorſum per $\varepsilon\zeta$. Viſibile nunc eſt, lineam hanc directionis non ſuſtineri a linea AB, ſed interuallum dari $\eta\zeta$; quia enim δ eſt punctum contactus, et δA tangens: recta δA neceſſario cadit extra Ellipſin. Quamuis itaque in quolibet alio prouolutionis ſitu Ellipſis oriatur ſemper minor: ſimilis tamen haec ſemper erit prioribus, ob ſectionem ſemper ſub eodem angulo IBA factam; adeoque in omni ſitu aderit tale interuallum $\eta\zeta$, quod conorum centrum grauitatis non ſuſtinet; ex quo manifeſtum iam eſſe puto, cur coni hi coniuncti nunquam quieſcere poſſint, ſed ipſi per ſe rotationem incipiant, a vi nempe grauitatis, cui hic nihil obſtat, adeoque ſemper labantur, atque ſic motum continuent; cum ex altera parte machinae auerſa omnia aequaliter ſe habeant et ſimiliter.

§. 5. Ex omnibus hucusque allatis conſequitur iam, adeſſe in hoc motu rotatorio potentiam, pondus nimirum coni compoſiti, quod ponamus eſſe P, agens in directione vertiali $\varepsilon\zeta$; adeſſe etiam hypomochlium, nempe in δ, et diſtantiam illius ab hoc $\zeta\delta$, vel $\varepsilon\gamma$; vnde momentum ad motum rotatorium indeſinenter ſollicitans habebitur $= P \times \varepsilon\gamma$. Quam vero $\varepsilon\gamma$ ſequenti modo determinabimus: Sit axis transuerſus ſectionis $\alpha\beta = 2a$, conſequenter $\gamma\beta = \gamma\alpha = a$, $\varepsilon\gamma = z$; ſint, poſito ſinu toto $= 1$, lateris coni, cum diametro baſeos, anguli ſinus S, coſinus C, tangens T; ſemiaperturae planorum diuergentium FHα, vel IBA, ſinus s,

H; erit [illegible] ob angulum FEG biſectum vnd[illegible] erit in triangulo $E\alpha\beta$ haec v[illegible] [illegible] $\beta E : \alpha E =$ ſin. $E\alpha\beta$: ſin. $E\beta\alpha$; ſunt [illegible] $\beta\varepsilon = a + z$; $\varepsilon\alpha = a - z$; ſinus $E\alpha\beta =$ ſin. duorum internorum oppoſitorum in triangulo $F\alpha H = Sc + sC$, ex Commentar. *Acad. Scientiar. Tomo II*, §. 4; ſin. $E\beta\alpha =$ ſin. $E\beta H =$ ſin. duorum internorum oppoſitorum in triangulo βGH, in quo, ob angulum EGH obtuſum, pro C ſcribi debet $-C$; igitur ſin. $E\beta\alpha = Sc - sC$; qui valores ſubſtituti in analogia ſuperiori efficiunt $a + z : a - z = Sc + sC : Sc - sC$, vnde producitur $z = \varepsilon\gamma = \frac{asC}{Sc} = \frac{a\frac{s}{c}}{\frac{S}{C}} = \frac{at}{T}$, quia eſt $\frac{s}{c} = t$, et $\frac{S}{C} = T$; et habebitur momentum ad motum rotatorium ſolicitans $P \times \varepsilon\gamma = \frac{Pat}{T}$.

§. 6. Ex hac igitur determinatione momenti huius rotatorii ſequitur *primo*, illud eſſe variabile, et ſemper decreſcens, quia conſtantibus ipſis quidem P, t, T, tamen a continuo variatur, ſemiaxis nempe ſectoris $\alpha\gamma$, qui durante motu ſemper minor ſucceſſiue redditur, et tandem plane euaneſcit, vbi rota conica vtroque vertice planis diuergentibus incumbit, et momentum rotatorium euadit $= 0$, adeoque rota quieſcit. *Secundo* motus etiam ceſſat, ſi fuerit $t = 0$, hoc eſt, ſi ſemiaperturae angulus ſit nullus, aut ſi plana duo non diuergant inter ſe, ſed parallela ſint; quo caſu ſectio eorum in cono ſit circulus, in quo duo centra ε et γ coincidunt, vt nullum detur praepondium, aut momentum, rotationis. Hoc itaque caſu, in quo conus compoſitus planis parallelis imponitur, nullus plane motus

motus exoritur. *Tertio* momentum rotationum adhuc nihilum fit, ſi ponatur $T = \infty$, aut angulus EFG rectus, vel vbi, coni loco, planis diuergentibus incumbit cylindrus, quod experimenta etiam exacte comprobant; quamuis enim in Cylindro ſectio obliqua Ellipſin pariter producat, vti in cono: in illa tamen puncta ϵ et γ etiam coincidunt ſemper, vt nullum exiſtere poſſit praepondium; quare cylindrus duobus planis diuergentibus impoſitus non mouebitur ipſe per ſe.

§. 7. Cum itaque euictum ſit, in hac rota conica nihil adeſſe, quod centri grauitatis lapſum impediat, adeoque eam neceſſario debere circumuolui verſus partes planorum diuergentium magis diſtantes: videamus iam porro, quam viam deſcribat centrum grauitatis in rotae medio, et baſium coniunctarum centro, poſitum, durante hac rotatione. Quod vt obti- Tab. IX.
neamus, ſint plana duo diuergentia, ſed horizontalia Fig. 1.
iterum, qualia hucusque adhibuimus, AB, CB, concurrentia in B. Huic puncto concurſus B immineat verticaliter centrum grauitatis rotae, aut centrum baſium circularium coniunctarum, quod ſit D; erit igitur BD radius baſeos verticalis, hoc eſt, perpendicularis ad planum horizontale ABC; et cum BI in eodem hoc plano ducta ſit, conſtituens angulum ABI dimidium aperturae, aut diuergentiae ABC, erit angulus IBD rectus. Ex Fig. praeced. autem elicitur radius baſeos ex hac analogia, poſito axe coni $= m$; $S : m = C :$ rad. baſeos $= \frac{mC}{S} = \frac{m}{\frac{S}{C}} = \frac{m}{T}$; erit igitur in hac Figura radius baſeos, vel $BD = \frac{m}{T}$.

§. 8. Veniat rotae axis in ſitum EM, in quo vertices vtriuſque coni combinati incumbunt planis divergentibus; erit ſic centrum baſeos O in recta horizontali EM poſitum, et rota quieſcet (§. 6) Durante igitur hoc motu centrum grauitatis commune O deſcripſit lineam DO, inclinatam ad horizontem OB angulo BOD. Eruitur autem OB ex illo, quoniam in triangulo rectangulo BOE eſt OE $= m$ et anguli ABI, dimidiae diuergentiae, ſinus s, coſ. c, tang. t; erit itaque in hoc triangulo, $S : m = c : OB = \frac{mc}{s} = \frac{m}{\frac{s}{c}} = \frac{m}{t}$, vnde obtinetur tangens anguli $BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{m}{T}$ diuiſum per $\frac{m}{t} = \frac{t}{T}$. Igitur ab initio motus ad finem eius vſque centrum conorum grauitatis commune deſcribit lineam DO, cuius punctum D eleuatum eſt verticaliter ſupra B quantitate BD radii baſeos α, quae ad horizontem OB inclinata eſt angulo α, inclinatione tali DOB, quae habeat tangentem $= \frac{t}{T}$.

§. 9. Ex hoc iam facile deducitur, quaenam vltima ſit inclinatio ad horizontem, in qua rota, vel
Tab. IX. conus duplex, aſcendere apparenter ceſſet. Cum enim
Fig. 2. in ſitu horizontali vtriusque plani centrum grauitatis D, dum horizontaliter ipſum per ſe moueri aut aſcendere videtur, re vera deſcendat per planum inclinatum DO, cuius angulus DOB modo eſt definitus: patet, ceſſare debere omnem motum, ſi DO ita apud O eleuetur, vt acquirat ſitum horizontalem DP, parallelum ipſi BO. Eleuari igitur poteſt, ſuccedente ſemper motu, horizonta-

zontalis BO eousque, donec DO cadat in DP, hoc eſt, eleuari poteſt angulo ODP=DOB. Quodſi igitur computetur angulus A, cuius tangens ſit $\frac{t}{T}$, poſito ſinu toto = 1, aſcendere videbitur rota vſque ad altitudinem planorum eam, quae cum horizonte faciat angulum A, in quo ſitu planorum rota quieſcet, et producendo aſcenſui erit impar; ſi vero magis eleuentur plana, tum rota retroagetur verſus punctum concurſus vtriusque plani; quemadmodum experimenta ſingulas haſce circumſtantias pulchre demonſtrant.

§. 10. Hiſce ita intellectis ad examen reuocare poſſumus probationem, quam *Celeberr. Deſaguliers* affert ad phaenomena hucusque deducta et expoſita. Ponit is, *Cours de Phyſique Experimentale*, *pag.* 81, conum duplicem, cuius axis ſit B, ſectione verticali repraeſentatus, impoſitum eſſe plano AC ſupra horizontem AD eleuato altitudine CD minori, quam eſt radius baſeos coni BA. Sit igitur ducatur recta BC: erit haec infra horizontem BE depreſſa, adeoque centrum grauitatis coni duplicis B iacebit in plano inclinato BC, in quo neceſſario, re vera per BC deſcendere, hoc eſt, apparenter per AC aſcendere debet. Sed cum idem hoc ratiocinium perfecte etiam applicari poſſit cylindro, planis diuergentibus eodem modo impoſito, hic autem non aſcendat: (§. 6.) patet, paralogiſmum latentem adeſſe debere. Huius autem fons in eo deprehenditur, quod non dici poſſit generaliter: omne punctum graue, plano inclinato impoſitum, in

Tab. IX. Fig. 3.

hoc deſcendit. Diſtinctio enim adhibenda hic eſt, inter tale punctum, cuius directio verticalis eſt *ſuffulta*, aut *non ſuffulta*. Quomodo autem in cono duplici haec directio ſit *non ſuffulta*, in cylindro autem *ſuffulta*, in praecedentibus dilucide eſt oſtenſum, vnde ex his quoque demonſtratio horum phaenomenorum eſt petenda.

SECTOR

SECTOR CATADIOPTRICVS.

AVCTORE

IO. ANDR. DE SEGNER.

Etſi, cum vel agri menſurandi ſunt, vel perficiendae ichnographiae regionum, nulla re minus laborare ſoleamus, quam deſcriptione multiplicis apparatus ad id neceſſarii: id tamen, quod hic deſcribam, inſtrumentum ſingulare viſum eſt, atque magni vtplurimum compendii. Pede non indiget: ob eamque rem non modo artificem non onerat, verum et, quod per inſtrumenta, quae operoſe in pedamentum collocari debent, antequam vſui eſſe poſſint, admodum difficulter fit, anguli dati, cuius crura per data duo puncta tranſeant, expedite prodit verticem. Qua quidem re plurima problemata geodaetica compendio ſoluuntur absque calculo. Meum dicere non poſſum, qui nihil ad id contuli, praeter contractionem molis, in qua ideo laboraui, quia ſperaui, induci ea re poſſe aliquos iter facientium, ad capiendas poſitiones locorum, quae vel attingunt, vel cernunt e longinquo, quae res, quantum ad perficiendas chartas geographicas conferre poſſit, palam eſt. Deinde plurimos inſtrumenti vſus alios detexi.

Id ſectore conſtat, cui adfixum eſt ſpeculum planum metallicum; atque indice, quocum tubus connexus eſt dioptricus, ex eorum genere, quae obiecta inuertunt. Arcus ſectoris eſt pars peripheriae decima ſexta, in dimidios gradus accurate diuiſus, qua re par- Tab. X. Fig. 1.

tes

tes accipit 45. Subdiuidi hae poſſunt pro lubitu ab illo, qui oculorum aeſtimationi fidere nolit; ego, vbi inſtrumenti radius pedem vnum non excedit, vt ſubdiuidantur, non opus eſſe iudico. Punctis, quibus arcus diuiditur, duplex numerorum ſeries adſcripta eſt, a ſiniſtra verſus dextram: prior a 45 incipiens, deſinit in 90, altera ab hoc termino 90, ad 135 vsque pergit. Hi numeri gradus notant angulorum, qui capi per inſtrumentum immediate poſſunt, cum reliqui, qui vel minores ſunt 45 gradibus, vel 135 gradibus maiores, ſubtractione demum anguli ab angulo, vel anguli ad angulum additione, innoteſcant.

Circa centrum ſectoris index reuoluitur, qui et ipſe ſector eſt, ſed minori aliquantum radio deſcriptus, vt arcum prioris apparere ſinat, quamuis tegat numeros. In hoc indice duo puncta notata ſunt, quae arcum decimae ſextae peripheriae parti exacte aequalem intercipiunt, quo fit, ſi index circa ſectoris principalis centrum reuoluatur, donec vnum horum punctorum in initium arcus diuiſi cadat, vt alterum incidat in eius extremum. Puncta iſta indices ſunt graduum, quos continent anguli menſurati. Inter ea intermedius indici adfixus eſt tubus, filo inſtructus apud locum imaginum, plano ſectorum perpendiculari. Planum per filum iſtud, atque per centrum lentis obiectiuae, poſitum, et per centrum ſectorum tranſit, proxime certe; plano autem ſpeculi, quod ſectori principali, qui arcum diuiſum habet, affigi debere dixi, ſiquidem puncta indicis cum initio, atque fine arcus diuiſi congruunt,

gruunt, apud centrum ſectorum ſub angulo occurrit, qui a dimidio recti tam parum differt, quam id obtineri vlla arte poteſt. Altitudo ſpeculi ab inſtrumento ea eſt, vt dimidiam tantum lentis obiectiuae partem tegat, patente per alteram proſpectu: figuram habet rectanguli, cuius minus latus ſemidiametro aperturae lentis obiectiuae non minus eſt, maius autem eius ſemidiametri triplo aequale. Sed aperturam paullo maiorem ſumere conuenit, quam ab opticis ſcriptoribus ſtatuitur, quia media tantum eius pars hic viſui eſſe poteſt, altera per ſpeculum tecta, ne lucis penuria laboremus; atque ne id diſtinctae viſioni officiat, ocularis lentis efficaciam imminuere.

Perfecto ita inſtrumento, anguli capiuntur hunc in modum. Si angulus dimidium recti excedat, ſesqui altero autem recti minor ſit, collocato centro inſtrumenti apud anguli apicem, axem tubi dirige verſus obiectum, ad quod tendit crus anguli ſiniſtrum, revolutoque circa centrum indicis, ſectore principali, atque ſpeculo cum illo connexo, effice, vt et illud obiectum, ad quod contendit crus anguli dextrum, per tubum appareat. Eo facto ſi effeceris, vt vtrumque a filo tubi legitime ſecari videatur, punctorum indicis alterutrum in arcu diuiſo gradum notabit, extremum eorum, quibus menſuratur angulus quaeſitus. Neque ambiguitas timenda eſt a duplici indicis puncto; quia vtrumque in arcum diuiſum cadere non poteſt, niſi vbi angulus rectus eſt. Siniſtrum autem punctum, ſi in arcum diuiſum ſolum cadat, angulus maior eſt recto, ſin dextrum, minor.

Tab. X. Fig. 2. Ratio in eo ſita eſt, quod ſi ex puncto A duo obiecta conſpiciuntur, alterum B radio directo AB; alterum autem C radio apud D per ſpeculum reflexo DA, ducta in plano ADC recta DE, quae eadem radat planum ſpeculi, angulus EDA ſit dimidius anguli BDC. Hinc enim ſequitur, angulum BDC tot gradibus menſurari, quot angulus EDA habet ſemigradus: atque hac re tota inſtrumenti ſtructura nititur.

Si vero angulus menſurandus vel minor ſit dimidio recti, vel eius ſeſquialtero maior, ſumto obiecto quodam tertio, conuenienter in plano anguli poſito, menſurabuntur anguli, quos rectae ad obiecta propoſita ducendae includunt cum recta, quae tendit verſus obiectum aſſumtum. Summa angulorum ita repertorum, vel differentia, erit angulus quaeſitus.

Et haec quidem ſatis expedita ſunt. Verum quia in inſtrumento hoc vſus ineſſe dixi, qui per reliqua difficilius obtinentur, expedit, vt eorum aliquos breuibus declarem.

Primo ergo ita collocato indice, vt eius puncta cum extremis arcus diuiſi punctis coincidant, inſtrumentum omnes vſus praeſtat, in quos comparatur crux geodaeturum, praebetque normam, qua, per punctum datum, recta datae perpendicularis in agro non multo maiori labore ducitur, quam per vulgarem in charta. Atque hoc ſolo integrae ſaepe ichnographiae abſolui poſſunt.

Sit

Sit ABCDE figura, cuius ichnographia quaeritur, ſatis plana. Sumto F pro arbitrio, ac ducta FK vtcunque, metire FG, FH, FI, FK, ad quae puncta G, H, I, K cadunt rectae FK perpendiculares ex apicibus angulorum figurae ABCDE. Erige FN ad FK perpendicularem, ac metire FL, FM, FN, reliqua. Tab. X. Fig. 3.

Poteſt et inſtrumento ita compoſito circulus deſcribi, circa diametrum quantumuis magnum. Recede a diametro, donec eam conſpicias ſub angulo recto; erit centrum inſtrumenti in peripheria.

Punctis autem indicis in alia arcus puncta translatis, diſtantia puncti inacceſſi A a loco B ita menſurabitur: Fac CB ad AB perpendicularem, ſit autem C punctum horizontis, quam capi poteſt maxime *a* B remotum. Deinde in recta BC progredere ad D, vbi idem C cum A ſub angulo 101°, 18′ appareat. Erit A graduum 11 cum minutis 18, cuius anguli tangens eſt quinta pars radii. Ergo et AB rectae DB quintupla erit, reperieturque AB, ſi dimenſae DB dimidium decuplicaueris. Ex tabulis tangentium facile reperiuntur anguli alii, aſſumto maiores, vel minores, qui eidem propoſito ſeruiunt. Fig. 4.

Ichnographia autem figurae ABCD, in data quadam recta EF progrediendo, perficietur hunc in modum: Nota puncta rectae EF, a quibus ad angulos figurae ductae rectae omnes EB, GA, HC, ID, cum aſſumta EF angulum includunt conſtantis alicuius Fig. 5.

Eee 2 magni-

magnitudinis, vt 60°. Deinde per eadem figurae puncta A, B, C, D rectas alias duc, aſſumtae EF perpendiculares, vel omnes ſub alio quodam angulo ad eam inclinatas. Metire EG, EH, EI, vt et EK, EL, EM, EN, atque ex his datis ichnographiam perfacile in chartam transferes.

Aliqua huic methodo ſubſunt problemata ſpecialia, quae celeriter admodum per hoc inſtrumentum expediuntur, cum alias vel calculum exigunt, vel conſtructionem operoſiorem. Vt ſi inacceſſa BC menſuranda ſit, ſume angulum E talem, vt absque artificioſo calculo habere poſſis NC et LB, ſecundum dicta. Deinde triangulum rectangulum conſtrue, cuius vnum latus ſit LN, alterum illi perpendiculare differentia repertarum NC, LB. Erit latus angulo recto oppoſitum aequale quaeſitae BC.

Tribus etiam peripheriae circuli in agro deſcribendi punctis datis, reperies quartum, capiendo angulum, ſub quo duo eorum punctorum apparent ex tertio, ſumendoque pro quarto aliquo eorum, ex quibus eadem illa puncta ſub eodem angulo apparent.

PHYSICA

PHYSICA.

OBSERVATIONES BOTANICAE ET VNA IRIDIS MVLTIPLICIS.

Auctore

GEO. BERN. BVLFFINGER.

I.

Fructus proliferi et frondoſi.

1.

Limones praegnantes, *alium fructum minorem in ſe continentes*, reperiri, iam Cluſius refert, ex quo Caſparus Bauhinus in pinacem tranſtulit. *Limon citratus alterum includens* Ferrarii et Hermanni, et *limon citratus*, *altero foetus* Tournefortii, idem denotant. Mihi ex Sereniſſimi Domini Ducis noſtri hortis vere Regiis, qui nec Italicis cedunt, vti I. Bauhinus ſuo iam tempore agnouit, oblatus eſt citrei fructus, ex quo ipſo illo in loco, vbi ſtili adhuc veſtigium conſpicuum erat, eminebat tantillum paruuli cuiusdam fructus, quem altius in medullam matris penetrare coniectatus ſum, adeoque ſectione transuerſa duos fere digitos infra locum eminentiae ad paruulum vsque fructum, ſi quis eſſet, facta, denudare allaborabam, et ecce! fructus prodibat (*aaa*) forma fructus citrei, colore etiam eodem inſignitus, in carne alba maioris cubans, quem circum circa ambiebant loculi fere rotundi (*bbb*), figuris ſtelliformibus inſigniti, ſed ſeminibus vacui, qualia noſtra tellus Tab. XI. Fig. 1.

etiam

etiam in vulgaribus huius generis fructibus raro profert. Sed et hoc a naturali ſtatu abludit, quod hi loculi, quorum nouem fuerunt numero, non cohaeſerint inuicem, nec in axi citrei pomi diſpoſiti fuerint, vti in citreo vulgari, et quod ſtellatae fuerint figurae loculorum ſinguli, ſtellae vero octo tantum radiis conflatae, cum nouem praeditae ſint in vulgari. Adeoque quod ſpectat ad loculos, ſeminibus deſtinatos, nouem fructuum hunc fructum ſiſtere adumbrationem fere iudices, quorum ſingulis loculus vnus, ſingulis vero ſemina deficerent. An ex loculis nouem ſinguli dederunt loculum ad foetum intra ſe concluſum formandum? An etiam ſemina ad illum formandum impenſa fuere? Prius punctum veriſimile forte reddi poſſet, ſi in ſtructuram foetus illius inquiſiuiſſem, quod negotiis aliis diſtractus omittere coactus fui. An huc quadrat corpus ouiforme in albumine oui repertum, vitello prorſus deſtitutum, a Petito Academiae Pariſienſi oblatum, cuius ſimile Winslouius ſe vidiſſe affirmauit? vid. Hiſtor. Acad. Par. 1742. p. 59. 60. Analogia inter regnum vegetabile et animale toties obſeruata coniecturam praeſtat.

2. Illuſtriora exempla fructuum proliferorum, ſimul et frondoſorum ſuggerunt ephemerides Gallicae Erudit, anni 1675. p. 174. 175. vbi pira deſcribuntur, non tantum a naturali conformatione abludentia, verum et alterum frondoſum, alterum et proliferum, et ſimul mire frondoſum. Scilicet frondi alicui duo adhaerebant pedunculi, ſinguli piro onuſti, quorum vnum ſubrotundum minus frondem exiguam et folia

fundebat,

ſſundebat, alterum maius, oblongum, e loco, vbi calix diſponi ſolet, foetum minorem protruſit, qua eminet e piro maiori, foliolis variis cinctum; ſed foetus rurſus et frondem et folia ex vertice promebat. Facta diſſectione ſecundum longitudinem maioris piri et foetus ei concluſi, ſolidiſſima caro eſt deprehenſa, ſeminibus deſtituta, et fibrae lignoſae ex pedunculo recta linea ad locum illum aſcendentes, cui olim ſtilus cohaerebat, hic non tantum ad extremitatem vsque maioris fructus, ſed et per foetum producebantur, vt frondem et folia ex illius ſummitate ſpargere poſſent; Ex quo etiam palam eſt, non tantum fibras mere lignoſas, ſed etiam quaedam medullae ramenta, libro inuoluta, eousque continuata fuiſſe, ſine quibus nimirum foliorum textura abſolui nequit. Paucis interiectis annis, nimirum anno 1688. teſtantibus Ephem. Nat. Cur. Dec. II. Ann. VIII. Obſ. LII. p. 134. Fig. 17. duo exempla pirorum, ex vno latere gibborum, ex altero depreſſorum, ex ipſo calice frondoſorum, ad eandem pirum nanam Kiliae nata recenſet Ioh. Chriſtoph. Butzmann.

3. Nullum dubium eſt, quin attento obſeruatori eiusmodi res monſtroſae ſaepe occurrere poſſint. Vt clarus quidam ſcriptor Gallus exiſtimauerit, propter ſimplicem vegetabilium ſtructuram rariora illis contingere monſtra, quam animalibus: Natura etiam in ſimpliciſſimis vel leuiſſima de cauſa mira producere valet. Quatuor huius rei exempla paucorum interuallo annorum comperi, quorum vnum hic Stutgardiae anno 1747. coram vidi, reliqua tria in horto quodam Montisbeligardenſi anno 1745. obuenerunt, et in eadem arbore

eodemque tempore maturitatem nacta ſunt, quorum icones ad viuum pictae ad me transmiſſae ſunt; Primi autem exempli iconem ipſe fieri curaui, cuius ſequentem exhibeo deſcriptionem. Pirus quaedam nana primo vere, ſole germinationem eximie iuuante, magnam florum copiam protrudebat, qui ingruente ſub ipſum florum tempus gelu aduſti fuerunt, et ſpem fructuum ſubſequentium nullam reliquerunt. Calore autem ſolis redeunte frondes nouae, iacturam factam quaſi reparaturae, prouenerunt, flores denuo protrudentes, et inter
Tab. XI. Fig. 2. has vna A, in tres pedunculos BBB deſinens. Folium vnum petiolatum C frondi, antequam diuideretur, appoſitum erat. Aliud folium D promebat pedunculus vnus breui, poſtquam exortus eſſet. In pedunculo, ex oppoſita figurae parte collocato, non procul ab extremitate, foliolum ſeſſile (*e*) adparebat, cuius ala folium E petiolatum fudit. Germinibus rotundis pirorum (*df*) terminabantur duo pedunculi, ſinguli ſingulis, quorum vni (*f*) veſtigium floris adhuc adhaeſit. Sub germina (*d*) inter illud et pedunculum duo proueniebant folia ſeſſilia FF, et alia duo GG communi petiolo ex eodem loco oriebantur Tertius pedunculus pirum (*a*) fulciebat, quod ſpectat ad figuram, monſtroſum, vti icon exhibet, et praeterea ſemidiaphanum, vt lucis radios transmitteret, e cuius vmbilico, vbi calix eſſe ſolet, duo enaſcebantur foliola, vnum (*b*) minus, roſei coloris, alterum (*c*) maius, viride. Inter haec foliola fructus, priori minor, (*g*) ex ipſa eius carne enatus eſt, horizonti fere parallelus, infra ſulco quodam profundo in duas partes obiter diuiſus, vmbilico eique inhaeren-

haerente calice (*i*) notatus, ex quo duae laciniolae anguſtiſſimae ſiue faſciolae (*bb*) roſei coloris dependebant.

4. Montisbeligardenſium pirorum primum, (*aa*) pedunculo B innixum, pirum forma ſic ſatis bene referebat, ſed ex ſuperiori parte, veluti ex pelui, aliud emergebat (*bb*) matre longius, cylindricum fere, niſi quod ſuperiori extremo paullulum eſſet ampliatum, in ſummitate calice hexaphyllo (*f*) multo diſtinctiore, quam in piro naturali, exornatum. Inter commiſſuram foetus cum matre, inter foetum et marginem peluis folia eruperunt, ouatum, tria lanceolata, et ex lanceolato ouatum, (*eeeee*) calicis forte vices ſuſtinentia. Sed foetus hic matri etiam nepotem (*cc*) ferebat, ex latere prominentem, vnde aboſita ibidem foetus cute labia, e quibus nepos emergit, calloſa facta ſunt; ſuperior nepotis extremitas cordis forma proxime ad calicem ſuae matris terminabatur: Sed rurſus etiam hic calicis veſtigia exhibent foliola lanceolata, (*e* e**) intra labia calloſa et nepotem emergentia. Tab. XI. Fig. 1.

5. Secundum Montisbeligardenſe pirum, pedunculo B fultum, vix in paucam carnem excreſcit, minoris retortulae figura, (*cc*) quod ſinu profundo, ad marginem foliolo lanceolato reflexo (*d*) praedito, exſculpatur, cui contigua eſt caro (*aa*) in transuerſum ouata, priori multo maior, ſinu longitudinali et alio breuiori horizontali, obiter exſculptis conſpicua, cute tecta, quam conſidero tanquam foetum infimi piri. Huius autem finem ad ſinum eſſe profundum, (*bb*) exinde coniicio, quod intra ſinum illum exoriantur folia, (*eeee*) quae Fig. 4.

 calicis

calicis vice fingi poſſe ſuperius conieci. Ex hoc ſinu tres emergunt nepotes, (*h*; *i*, *kk*) prior fere rotundus et exiguus, globuli luſorii magnitudine, alter oblongus, tertius retro hos poſitus, reliquis maior; Duo poſteriores, ab exordio ſuo ſulco profundo diuiſi, ſupra prorſus in vnum corpus connati, vnicam promunt peluim carnoſam, (*l*) exiguam, margine aequabili praeditam, pronepotem ratione tertiae generationis, pezizam intuitu figurae diceres, ex qua aliquot exigua foliola linearia (*ff*) in rectum ſurgunt, et ex medio corpuſculum cylindricum (*m*) carnoſum, abnepos, caliculo hexaphyllo inſigni (*n*) conſpicuus. Inter commiſſuras pronepotis cum nepotibus duo folia maiora ouata (*gg*) enaſcuntur.

Tab. XIII. Fig. 1. 6. Tertium pirum Montisbeligardenſe, praedictis ſpecioſius, quod ad magnitudinem attinet, ex pedunculo B priorum ſimili paullatim in fructum elongatur, ampullae inuerſae ſimilem, (*aa*) e cuius ſummitate tres ſimul emergunt foetus, vnus breuiſſimus, piriformis, (*ccc*) productione anguſta et obtuſa in folium deſinente, folio piri ſimile; alter longior, (*ddd*) ſub priori, figura matri ſimilis, iam recenſito foetu longior, tertius cylindricus, (*ffff*) ſupra aliquanto arctior; et in anguſtiſſimum incuruum collum (*g*) terminatus. Tres hoſce foetus folia cingunt, (*kkkk*) viridia, lanceolata, inter ipſos et matrem enata. Praeterea foliolum roſae colore, petali ſtructura tenera (*l*) vni foliorum (*k*) ab externa parte ita adponitur, vt eius dorſo fere incumbat. Inter foetus vero *f* et *d* folium lanceolatum (*m*) enaſcitur. Tandem foetus (*f*) ex poſteriori parte non

procul

procul ab extremitate foetum, matri nepotem, fundit, piriformem, (*bb*) auunculo (*c*) vix maiorem, cui ab anteriori parte collum incuruum matris incumbit et concretum eſt, in extremo calice hexaphyllo (*i*) coronatum. Intra nepotem hunc et matrem, vbi inuicem committuntur, folium emergit viride, lanceolatum (*n*).

7. De ſtructura interna horum fructuum nihil, vt verum fatear, mihi conſtat. Puto tamen ex iis, quae Perraultius in piris ſupra recenſitis Ephemeridum Gallicarum recenſuit, immo quae de floribus prolificis in vulgus nota ſunt, omnino huc quadrare. Conſideratione dignum eſt, quod eiusmodi phaenomena tum plerumque occurrant, quando flores, fructuum nuncii, qui primo vere eruperunt, caſu quodam infauſto perierunt, vt deſtinatus fructibus ſuccus in eos non impenſus fuerit. Tum vero arbores, illis ſuccis turgidae, paucas nouas gemmas protrudunt, in quas ſuccus ille abundans prodigitur. An ideo foetus plures ſimul naſcuntur? An copia foetuum impedimento eſt, ne ſemina gigni poſſint, neque locus illis concedi poſſit? Elegantiſſima eſſet conuenientia inter partes, quae ſperma ſecernunt, et quae fructum vere conſtituunt, vt in floribus et fructibus prolificis fere ſemper deficeret, vel minueretur, ibi puluis antherarum, hic ſemen.

II.

Malus ſatiua, fructu ſtriato, punctis rubentibus conſperſo Tourn. I. R. H. 635. Bach-Aepfel *I. B. Hiſt. font. Boll. L. IV. Cap. II. pag.* 91 *Malum ſtriatum balnei adm. perelegans Ei. Hiſt. I.* 15. *cum fructu florifero.*

Tab. XII. Fig. 2. 3. 4. 1. Fructus hic oblatus mihi eſt Stutgardiae, vbi inuenerunt inter alios multos eiusdem generis in cella, more noſtris vſitato ſuper ſtramine in ciſta lignea humili quadrata, muri ſuperiori parti affixa, repoſitos. Mira ſane res, quum fructus poſt flores enaſci ſolemne ſit, inauditum, flores fructus ſequi! Inueſtigatione itaque digniſſimum iudicaui, naturane hoc ita contigerit, an artibus forte, vel fucis. Fructus erat formoſus, vti in hoc genere eſſe ſolet, maturus, et, ſi externum habitum reſpicias, omnibus ſuis partibus perfectus. E ſuperiori eius parte, et quidem e medio fere calicis, gemma eminebat, frondi a latere adhaerens, a qua ramulus reſectus eſſe videbatur, veſtigio calloſo. Ex gemma autem duo mali folia prodibant petiolata, qualia ſunt primora folia harum arborum, et praeterea quinque pedunculi duabus vnciis longiores, et in eorum faſtigio totidem flores perfectiſſimi, conſueto petalorum, ſtaminum et piſtillorum apparatu numeroque inſtructi, floridiſſimi, etiam poſt trium dierum interuallum, quod vna cum fructu in cella illos reponi iuſſi.

2. Equidem noui, quicquid ſuccorum vel ad fructuum vel ad florum formationem inſeruit, id omne per pedunculum in illas partes deriuari. Si quid ergo

 natura

natura hic molita eſt, ex pedunculo in fructum ducere debuit ſuccos, non tantum ſolius fructus, ſed et frondis et gemmarum floriferarum procreationi idoneos. Et frondes quidem hac ratione ex ipſis fructibus nonnunquam prodire, in pirorum exemplis ſupra vidimus. Verum illas frondes praeter folia flores adhuc procreaſſe, id nec mea, nec aliorum obſeruatione conſtat. Quicquid horum ſit, ſi in noſtro exemplo id contigiſſe verum ſit, pedunculi aliqua continuatione in eum vsque locum, vbi frons et gemma viſebantur, opus erat. Id vero vt pateret, penitiori inſpectione opus erat. Diſſectionem itaque inſtitui iuxta frontem gemmiferam, vt illa diſpertiret tam pedunculum, quam pomum, in duas prope aequales partes, nec vlla ratione thalamum, ſiue receptaculum ſeminum laederet, ſimulque parceret frondi, ſi forte pomo profundius ſe inſinuaret. Hac ſectione patuit, frondem tantum non in mediam vsque pomi partem penetraſſe, et per vnum thalami loculum, ſemen vnicum effetum condentem, tranſiiſſe, ibidemque multis in eius ſubſtantiam circum circa immiſſis radiculis ſedem fixiſſe, circa frondem vero ſecundum totam longitudinem, quoad in carne pomi delituit, aliquam cauitatem exſtitiſſe, quae et hinc vlterius fronde vacua ſub angulo, ad pedunculum, ſiue productionem eius in carnem, acuto penetrauit, et acuto fine terminata eſt. Parietes porro huius cauitatis tam vacuae, quam frondem continentis, vetuſtate veluti calloſi erant. Tab XI. Fig. 3. 4.

3. Aderant quinque thalami loculi, et in ſingulis ſingula ſemina, tria optime conformata, duo effeta, ex quorum qualiumcunque praeſentia tuto concludere licet,

licet, nihil iis in procreanda fronde tribui poſſe. Cavitas porro circa frondem, eaque vltra frondem producta, ſubindicare videtur, eam artificio quodam, ſuſi forte intruſione, in pomum iam perfectum factam eſſe, cui ſub autumnum recens facta (mea enim obſeruatio menſe Ianuario facta eſt) frons mali immiſſa fuerit, cauitate quidem breuior, gemma tamen floriſera in extremitate inſtructa, quae paullatim in carnem fructus ſuccoſam radices egerit, eaque nutrimentum ceperit, vnde tandem folia et flores tepore loci, vbi fructus iacuerat, e gemma euoluti atque protruſi ſunt. Certe inſpectio quum docuerit, frondem gemmiferam cum pomo nullum niſi per radiculas, frondi continuas, et ex illa productas, commercium habuiſſe, flores ex gemma frondis repetendi ſunt, qui tamen progerminare non potuiſſent, niſi ſuccus pomi ipſis nutrimentum praebuiſſet, qui itaque terrae locum ſuſtinuit. Nihil temere hic ſupponitur; Videmus citriorum, aurantiorum, nyctanthis frondes exiguas gemmis onuſtas terraeque infixas non difficulter radices agere. Quidni ergo hoc fiat in pomo ſucci pleno? Experimenta olim capienda veritatem plenius demonſtrabunt.

EXPLICATIO FIGVRARVM.

Tab. XII. Fig. 2. Pomum ſiſtit naturali magnitudine, vti ſunt omnes icones prius recenſitae.

a. Gemma petiolos cum foliis et pedunculos floriferos promens.

b. Veſtigium ramuli a fronde infra gemmam reſecti.

Fig.

Fig. 3. et 4. Duo ſunt hemiſphaeria, in quae pomum ſectione per eius axin diuiſum eſt.

Fig. 3. Hemiſphaerium eſt, in quo frons gemmifera in ſitu naturali adumbratur, vbi quidem *a* et *b* easdem partes exprimunt, quas in Fig. 2.

ccc. Frons gemmifera.

d. Locus ad quem vsque in pomum penetrat.

de.) Sinus vacuus, a fine inferiori (*d*) frondis oblique excauatus.

ff.) Radiculae e fronde in carnem pomi pullulantes.

g.) Pomi quaedam pars, quae putredine corrumpi incepit.

h.) Petioli dimidia pars.

Fig. 4. Alterum hemiſphaerium, ſpatium a fronde gemmifera vacuum oſtendens.

aa) Reliquiae calicis, quem frons gemmifera tranſit.

bbb) Spatium, in quo frons gemmifera ſedem habebat.

cc) Vacuum ſpatium cum priori continuum

dd) Loculi receptaculi duo, in quibus

ee) Totidem ſemina effeta.

f) Petioli dimidiata pars.

III.

Flos roſae prolifer et frondoſus.

1. Ramus roſae (A) pro more ſpinoſus ab (*a*) ad (*b*) ſpinis orbus, quatuor foliis ſtipatur, ex vno magis rami iſtius latere poſitis, breuius petiolatis, ouatis. tribus ex ſinuato dentatis, (*ccc*) quarto (*d*) ex vno latere leuiter crenato, ex altero integerrimo, quibus Tab. XII. Fig. 5.

quintum (*e*) ab anteriori latere accedit, reliquis minus, ſed conformatione folio (*d*) ſimili. Scapo (*ab*) ex vtroque latere affixa erant petala roſea variae magnitudinis, colore et odore petala roſarum exacte imitantia, et inter haec quaedam dentata, quaedam varie ſinuoſa, quaedam etiam integra. Anterior ſcapi facies ab (*a*) ad (*f*) prorſus erat nuda et inermis, ab (*f*) ad (*b*) vsque, licet ſpinis carens petalis aliquot ſibi inuicem ſuperimpoſitis exornata, quae phyliriae inſtar conuoluta erant. Hinc ramus rurſus ſpinoſus poſt breue internallum folia fudit permulta, duo infima (*gg*), quae ſtipulis ſimiliora ſunt, margine crenato praedita, reliqua inferiora quinque (*hhhhh*) margine integerrima, omnia ſeſſilia, tum quinque adhuc alia ſuperiora (*iiikk*), quorum duo poſteriora petiolo communi inſtructa baſi connata ſunt, adeo integra, vt vix crenata dici mereantur.

2. Diuerſum eſt hoc exemplum ab illis, quorum in Eph. Gall. 1679. p. 168 et in Comment. Acad. Par. 1707. p. 650 ſqq. mentio fit, et icones adumbrantur, quorum vtrumque roſam ſiſtit duplicato proliferam et denique frondoſam, hac diſtinctione, quod roſae proliferae prioris exempli ſint multo pleniores, quam poſterioris. Noſtra autem ſimpliciter prolifera eſt, ſed foliorum, tam eorum, quae in roſa principe calicis vice funguntur, quam ſuperioris frondis, alia plane in noſtra eſt confirmatio. Icon roſae Ephemeridum Gallicarum prorſus coincidit cum illa, quae habetur in Mich. Bern. Valentini Mus. Mus. P. I. App. p. 22.

p. 22. Altenburgi Miſniae anno 1657 florens, et ipſo illo anno, curante D. Leonardo Vrſino, Prof. Altenburgenſi aeri inciſa. Nec dubium eſt, quin Vrſiniana icon in Galliam miſſa et minori forma in Ephemerides translata fuerit. Conueniunt enim praeter magnitudinem omnia, niſi quod in Vrſiniana icone ſcapus inter ſecundam et tertiam roſam ſit inermis, et quod fructuum rudimenta compareant, quae Gallicus ſculptor in apographo omiſit, ſed quae etiam, quia neque in Marchantiana, neque in noſtra icone obueniunt, Miſnicus ſculptor ex ſuo forte adiecit cerebro. Quascunque tamen has differentias ex incuria ſculptorum facile deducere licebit.

3. In tribus his exemplis 1. praecipuae roſae, quae infimae locum occupat, folia ſubſternuntur, proliferis nulla, ſuprema autem ſemper frondoſa eſt. 2. Quousque petala in ſcapo extenduntur, licet interiecta ſpatia exſiſtant, petalis nuda, ſpinae deſunt, id quod inprimis de Marchantiana et noſtra certum eſt, ſed vix etiam dubium de roſa Ephemeridum Gallicarum, cum icon Vrſiniana, magis genuina, a noſtris iconibus vix aliena ſiſtat. 3. Nulla veri floris neque in infima roſa, neque in proliferis apparent veſtigia; neque enim ſtamina, neque piſtilla, adparent, nec horum quaedam partes.

4. Omnino ſperandum eſt, ſi plura eiusmodi exempla colligerentur, ex eorum inuicem collatione

 cauſſas

cauſſas forte ſingularium eiusmodi productionum eruitum iri, quae vero non tantum huc, ſed et ad totum vegetationis opus, ſymbolum ſuum conferre poſſent. Tantum ſerio optandum eſt, velint ii, qui principiis ad obſeruationes phyſicas neceſſariis inſtructi ſunt, iis colligendis et exacte deſcribendis operam nauare, cum vnus, qui intelligit, quid obſeruandum ſit, ex vno exemplo plus addiſcere poſſit, quam centum hisce in rebus non exercitati in centies multiplicatis exemplis.

IV.

Obſeruatio Iridis multiplicis.

Varia paſſim de *modo* et *numero* Iridum phaenomena recenſentur ab auctoribus. Eorum aliqua repetemus hoc loco, et ſubiungemus, quae iteratis vicibus ipſi obſeruauimus. *Primariam* atque *ſecundariam* Iridem vulgus videt frequentiſſime: originem Eruditi omnes norunt; poſtquam, praeeunte *Marco Antonio de Dominis*, *Renatus des Cartes* illam et experimentis docuit, et calculis ſubiecit, *Meteororum cap. VIII.* De modo quidem ſequentia memorari poſſunt: Iridem inuerſam vidit *Pardies*, teſtante *Iourn. des ſavans* 1667. Iridem parabolicam viſam eſſe dicunt *Acta Erud. Lipſ. Supplementor. Tomo IV*, *p.* 28. Iridem perpendicularem vidit *Du Rondel* 13 Sept. 1684. conf. *Nouvelles de la Republique des lettres* 1684. *T.* 2. *p.* 173 *et* 292 Duas Irides ſeſe interſecantes inuenimus in

Obſer-

Obſeruations de Phyſique, T. 3, *p.* 70, ex *Iournal des ſavans* 1666, *p.* 71, 72 *et* 435; vti etiam Iridem pallidam in niue tenuiſſima, quam deſcripſit *Langius*, *Phyſicae p.* 216.

De numero autem Iridum ſimul apparentium videas dubitare et diſſentire Auctores. Negat tertiam fieri poſſe *Cardanus*, ex falſa cauſa, quam *Scaliger* refutat, minus ſolide tamen, theſin hanc ipſam admittens ex cauſa quidem adhuc inepta. Vid. *Scaliger de ſubt. ad Card. Exercit.* 80, *num.* 5. Negat tertiam Iridem conſpici poſſe, ob nimis inualidam impreſſionem, ab oculis humanis *Ioh. Bernoullius*, *Operum Tom IV. p.* 198, poſſe tamen fieri ait, vt illa conſpiciatur ab aquila, aut lynce, maiori, quam nos oculorum viuacitate praeditis. *Carteſius Meteoror. cap. VIII, p.* 271, *in eiusdem operibus Philoſoph.* 1656 *editis*, ex aliorum narratione tertiam refert Iridem, duas ordinarias cingentem, ſed multo pallidiorem, et tantum circiter a ſecunda remotam, quantum ab illa diſtat prima. Arbitratur, id vix accidiſſe, niſi forſan quaedam grandinis grana, maxime rotunda et pellucida, huic pluuiae fuerint immixta; in quibus, cum refractio multo quam in aëre (voluit ſcribere, *quam in aqua*,) maior fiat: arcus coeleſtis exterior multo etiam maior in illis eſſe debuerit, ac ita ſupra alteram apparere. Alii tertiam Iridem admittunt, ſed minus frequentem dicunt, et coloribus languentem. Nemo, quod ſciam, annotauit angulum, ſub quo videtur haec tertia, vel

 ordi-

ordinem colorum, ſi qui diſtinguuntur. Alio, quam primae et ſecundae Iridi parallelo, ſitu tertiam *Halleius* vidit, et in *Transactionibus Anglicanis num.* 420, deſcripſit. In prima et ſecunda nihil noui. Tertia colores habuit aeque viuidos ac ſecunda, ordine eo, quem prima demonſtrat. Crura fines cum primaria eosdem, altitudinem ſecundae, habent in ſchemate. Diciturque apud *Muſchenbroekium*, *Eſſais de Phyſique*, *p.* 818, ex quo haec tranſcribo, *Senguerdum* A. 1685 vidiſſe phaenomenum huic conſimile; *Halleium* vero, conſiderato ſolis et terrae poſitu, arbitrari, tertiam hancce Iridem ortam ex reflexione radiorum ſolis factam a vicino flumine. Cum igitur de tertia hac Iride adeo diſſentiant, aut minus determinate loquantur, obſeruatores: mirum non eſt, variare quoque opiniones Auctorum; vt alii eandem Iridem eſſe putent, alii haloñis portionem interpretentur. Conf. *Sturmius* in *Diſſert. de Admirandis Iridis*, et Auctores ibi allegati.

Vt igitur ad obſeruationes accedam, quae, quo rariores in hoc genere ſunt, eo magis aeſtimari etiam debent: exponam illas, quae a me factae fuerunt.

Anno 1741 die 25 Iunii ſt. n. hora 7 veſpertina, vidimus Dom. *Tafingerus*, Concionator Aulicus, et *ego* Stuttgardiae, e muſeo meo, Iridem quintuplicem; ſecundariam, primariam, et intra hanc tres zonas rubras, hoc ordine: 1. vt earum prima proxima

ma eſſet Iridi primariae. 2. Poſtea ſequebatur zona ex coeru'eo et viridi mixta, quam excipiebat rubra quarta, probe diſtincta; 3 denique zona ſubobſcura, cum quinta rubra ſatis diſtincta. Latitudo Iridis tertiae, quartae, et quintae, aequabat circiter dimidiam primariae.

Anno 1746, die 10 Iunii, hora 8 veſp. *iidem* iterum vidimus Iridem ſecundariam modo ordinario, primariam vero triplicem, et alicubi quadruplicem, vti antea.

Anno 1741, d. 27 Iunii, inter horam 6 et 7 veſpert. vidi Iridem primariam triplicatam.

Eodem anno, d. 7 Iulii, hora 5 veſp. vidi Iridem primariam triplicatam; primam ordinaria forma; ſecundam rubram et obſcuram, tertiam rubram. Duae poſteriores, coniungendo rubrum, obſcurum, et rubrum habebant latitudinem primariae.

Videtur autem obſeruatas zonas coloratas non tam fuiſſe Irides, ex maiori reflexionum numero factas, quam ortas ex diuerſis bullis, quae ellipticam fortaſſe figuram tenerent, ſiue ex alia cauſſa diuerſam refractionem producerent; aut fuiſſe coronas, vel halones; qua eadem ratione tales Irides multiplices explicarunt iam *Verdries* in *Phyſica* 1728 edita, p. 448; et *Sturmius* in *Iridis admirandis*, p. 21, et 87. Si certe calculos generales *Ioh. Bernoullii*, in *Opp. Tomo IV*, p. 197.

p. 197, ad Irides particulares applicemus, tum ſequens enaſcitur tabella:

		Ang. Incid.		Semidiam.	
Iris	I.	59°	23′	42°	2′
	II.	71	50	50	58
	III.	76	50	138	20
	IV.	79	38	223	56
	V.	81	26	308	28
	VI.	82	41	392	40

ex qua apparet, Irides, modo ordinario genitas, primae ſuccedentes, maiorem continuo acquirere ſemidiametrum apparentem; adeoque poſitas ſemper eſſe debere extra Iridem primariam; cuius cum in noſtris et aliis obſeruationibus factum ſit contrarium: non pro Iridibus proprie ſic dictis, ſed pro coronarum, aut halonum portionibus, allegatas zonas habemus.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE
OCTO ANNORVM IN DIVERSIS SIBIRIAE LOCIS AB A. MDCCXXXIV AD A. MDCCXLI FACTAE. IN ORDINEM REDEGIT, ANIMADVERSIONIBVS ILLVSTRAVIT, ET CONSECTARIA ADDIDIT

I. A. BRAVN.

In euulgandis his obſeruationibus Sibiricis meteorologicis, quae interuallo octo annorum a 1734 ad 1741 in diuerſis Sibiriae locis potiſſimum a V. C. Gmelino ſunt inſtitutae, eadem fere methodo vſi ſumus, ac in obſeruationibus Petropolitanis. Enotauimus videlicet ſummas et infimas mercurii altitudines in tubo torricelliano menſium et annorum cum differentiis, adeoque variationibus altitudinum barometricarum, ad ſpatium earum maximum cognoſcendum. Vt nexus cum tempeſtate innoteſceret, adiunximus ad quamlibet altitudinem maximam et minimam barometricam, tempeſtatem, non ſolum concomitantem eiusdem diei, quo ea eſt obſeruata, ſed etiam antecedentem et conſequentem. Pari modo verſati ſumus in obſeruationibus thermometricis. Nam et hic ſummas et infimas caloris diminutiones thermometro obſeruatas indicauimus, addidimus

 diffe-

differentias ad variationes caloris menſtruas et annuas cognoſcendas. Ob nexum cum tempeſtate ad quemlibet ſummum et infimum caloris gradum, altitudines barometricas et tempeſtatem adiunximus. Denique meteora inſigniora notauimus, vbi inter alia emphatica eminent. Obſeruationes barometricae factae ſunt barometro ſimplici, in quo pollices Pariſini duodecimales ſunt intelligendi, qui in centum partes ſunt diuiſi. Numeri ante punctum pollices, poſt punctum partes centeſimas indicant. Obſeruationes thermometricae factae ſunt ſecundum ſcalam Delilianam, in qua cifra nullitatis nota punctum aquae bullientis, numerus autem 150 aquae in glaciem abeuntis, ſeu aquae ſub glacie, vel niuis et glaciei, quae regelari incipit, denotat. Eundem hunc ſemper eſſe gradum, nec vllam differentiam deprehendi, obſeruationes innumerae ſumma adcuratione a me factae, ſemper docuerunt, qui igitur merito punctum congelationis dicendus eſt.

Quum hae obſeruationes in itinere factae ſint, mirandum non eſt, ſaepius non niſi fragmenta obſeruationum occurrere paucorum menſium, quin etiam nonnunquam paucorum dierum in vno loco. Separatim igitur hae notandae erant.

Quamuis harum obſeruationum quaedam maioris momenti iam hinc inde ſint publicatae: tamen et eas ſecundum ſeriem annorum Commentariis Academiae Scientiarum inferendas nemo, opinor, dubitabit, vt integrae ibi habeantur, et ſede propria. Progrediendum nunc erit ad ipſas obſeruationes, ea, qua diximus methodo, repraeſentandas.

Obſer-

Obſeruationum meteorologicarum interuallo octo annorum ſcilicet a. 1734 ad 1741. in diuerſis Sibiriae locis factarum potiora momenta ſunt, quae ſequuntur.

A. MDCCXXXIV.

Obſeruationes anni 1734. a menſe Auguſto demum incipiunt. Sunt hae primum factae in fortalitio ſeptem palatiorum ab Auguſti 2 ad 7. Ab Auguſto 11 ad 16 in fortalitio Vſt-Kameno-Gorenſi; a 20 ad 28 in officinis aerariis Kolywanenſibus. A. Septembris 14 ad 27 in vrbe Kusnezk. Ab Octobris 9 ad Nouembris 24 in vrbe Tomsk. Altitudines barometricae maximae et minimae his quatuor menſibus erant ſequentes:

Menſis.		Maxima	Minima.	Differentia.
Auguſti	7. - -	27.53 - -	25 94 d. 24 - -	1.59
Septembris	17 et 22.	27.51 - -	27.07 d. 14 - -	0.44
Octobris	31. - -	28.93 - -	27.15 d. 10 - -	1.78
Nouembris	1. - -	28 94 - -	27 05 - - -	1.89

Ergo horum quatuor menſium altitudo maxima 28. 94
et Minima - - - - 25. 94
et tota variatio - - - 3. 00.

Quum altitudo maxima igitur fuerit 28. 94. ſatis magna quidem eſt, non tamen attingit maximam Petropolitanam, quae nunc eſt ab anno 1757, 29. 12. Notata fuit haec in vrbe Tomsk Nouembris 1, ipſo meridie, vento SSO vix ſenſibili. Praecedebat proxime O, et ſequebatur S 2. Dies erat ſerenus, vti quoque aliquot praecedentes, ſequebantur dies nubili primum, dein nix. Erant in aëre ſcintillae radiantes. Thermometrum

Hhh 2 monſtra-

monſtrabat 175½. Minima altitudo 25. 94 obſeruata eſt in officinis aerariis Kolywanenſibus Auguſti 24 h. 6 p. m. H. 12 erat 26. 00 et h. 10. p. m. 26. 12. Ventus erat S. 4 h. 12, qui die praecedente iam coepit, et continuauit vsque ad h. 4 p. m. in pluuiam copioſam cum fulguribus et tonitribus deſinens, mutatus in W 1. Sequens dies ſerenus fuit. Thermometrum erat 113. Haec altitudo minima valde parua eſt, Petropolitana enim 26. 41 hanc multum ſuperat, ſcilicet quadraginta ſeptem partibus centeſimis pollicis Pariſini. Quum igitur variatio tota tres integros pollices conficiat; maior eſt Petropolitana, quae nunc eſt 2. 71, partibus centeſimis 29. Caloris diminutiones maximae et minimae fuerunt, quae ſequuntur.

Menſis.	Minimus.	Calor.	Maximus.	Differentia
Auguſti	23. 143	- - -	94	d. 5. 49
Septembris	26. 150	- - -	121	- 14. 29
Octobris	29. 180	- - -	139	- 20. 41
Nouembris	1. 180	- - -	149.	- 8. 31

Ergo frigus maximum menſibus Octobri et Nouembri aequale fuit, ſcilicet 180, quod non ſingulare eſt, niſi forte quod iam menſe Octobri tantus frigoris gradus ſit obſeruatus. Calor maximus Auguſto obſeruatus 94, ſat magnus eſt, qualis huc vsque Petroburgi nondum eſt notatus. Maximus enim gradus ab anno 1757 nunc eſt 97.

MDCCXXXV.

Anno 1735. obſeruationes factae ſunt primum in vrbe Ieniſeisk a Ianuarii 1mo ad 9; dein Krasnoiarii [Krasnoiarsk] a Ian. 19 ad Febr. 17. Selengiae [Selenginsk] ab Apr. 1 ad

30, et

80, et Kachmae ſimul ab Apr. 25 ad Maii 6. Nertſchiae (Nertſchinsk) a Iun. 16 ad Iul. 4. In officinis argenti Argunenſibus, a Iul. 14 ad 21., Ircuti [Irkutsk] ab Octobris 1 ad finem anni.

Obſeruationes Ieniſeae factae, ſunt nouem dierum a Ianuarii 1, ad 9 incluſiue. Intra hos nouem dies maxima barometri altitudo erat 28. 25 d. 6 coelo non perfecte ſereno, vento SSO 1. Minima autem 27. 45 d. 1 coelo fere ſereno, vento W 2. Altitudines igitur barometricae nihil memorabile continent, contra thermometricae eo ſunt notabiliores. Nam d. 5. eiusmodi frigoris gradus eſt notatus, qualis ante hoc tempus, quantum conſtat, nunquam. Thermometrum ſcilicet monſtrabat gradum 281. d. 5. h. 6. a. m. Hora 5 a. m. erat 262 et h. 10 p. m. diei praecedentis 200, vento SSO 1, qui die quoque praecedenti flauit, et ſequenti die ad h. 7. p. m. continuauit. H. 8 a. m. h. 12, et h. 6 p. m. erat 250 et h. 11 p. m. 222. Dirum frigus iam circa finem anni praecedentis Ieniſeae graſſari coepit, gradus tamen ideo determinari non potuerunt, quia ſcala breuior fuit, quam vt hi inſigniores frigoris gradus notari potuerint, omnis enim mercurius in inferioribus cylindris latebat. Ceterum coelum erat turbidum, et barometrum 28. 10 tempore obſeruationis, quae altitudo etiam veſpera praecedenti erat. Huius frigoris effectus varii, iique merito mirandi fuerunt. Redeunt autem huc potiſſimum:

Aues, paſſeres, picae hunc frigoris gradum perferre non potuerunt. Ceciderunt enim quaſi mortuae in terram, et re vera quoque mortuae ſunt, quae non ſtatim poſt lapſum in locum calidum ſunt delatae.

Secundo notatu digniſſima eſt nebula, quae fuit perpetua, quamuis coelum maxime ſerenum ſemper fuerit. Haec nebula ad infimam aëris regionem producta ſatis longe, mane erat ſpiſſiſſima, paullo minus veſperi, tenuior autem circa tempus meridiei. Haec ſpiſſa conſiſtentia differebat tamen ab ea, quae autumni tempore eſſe ſolet. Erat enim tenuior multum, nec aërem odore vllo inficiens, nec maiorem ſerenitatem, nec nubilam tempeſtatem producens.

Tertio vix homo fuit, qui non inſigniores capitis dolores ſentiret, ſiue incola, ſiue peregrinus fuerit.

Porro fumus caminorum difficillime adſcendit, et diſſipatus fuit, vti quoque vmbram alicuius ſtili ſole lucente obſeruare non facile erat, terminatio autem notari plane non potuit. Denique glacies ad feneſtras in latere fornaci obuerſo tempore 24 horarum $\frac{1}{2}$ circiter pollicis Lond. craſſitie ſe adpoſuit.

In obſeruationibus Kraſnoiarii factis a Ian. 19 ad 31, altitudo maxima contigit Ianuarii 30, quae fuit 28. 71; minima autem obſeruata die 19, fuit 27. 74. Per hos dies vt plurimum tempeſtas ſerena, et inſignis mercurii altitudo obſeruata fuit, vento ex variis plagis quidem ſpirante, potiſſimum tamen ex occidente boream verſus.

Frigus maximum 205 Ianuarii 22 eſt obſeruatum, barometro 28. 45, vento WgN. 3. Minimum autem 164 Ian. 19, altitudo barometri erat 27. 74 coelo mixto, vento SW.

A Fe-

A Februarii 1mo ad 17 nihil fere memorabile occurrit. Barometri altitudo maxima hiſce diebus fuit 28. 15 die 1mo, et minima 26. 92 die 11mo. Frigus maximum incidit in Febr. 1^mum^ 194, et minimum 146 d. 11.

Menſis Aprilis obſeruationes Selengiae factae ſunt. Maxima barometri altitudo hoc menſe notata fuit 26. 53 d. 23, minima autem 25. 58 d. 17. Minimam hanc altitudinem magna procella ſequuta eſt ex N antea fuit N O 2. Thermometrum erat 154. Haec altitudo igitur minor praecedenti 36 eſt, adeoque minor minima Petropolitana 83 partibus centeſimis pollicis pariſini. Thermometricae obſeruationes nihil peculiare continent. Maximus ſcilicet calor obſeruatus eſt d. 11 et minimus d. 1; ille fuit 120, hic 158. Die 12 Selengae fluuii glacies rupta fuit, thermometro 135 monſtrante, vento N 4. Venti vehementiores fuere d. 7. 12, 4 gr. d. 18 3 et 4 graduum, d. 24, 4 gr. d. 30. 3 gr.

Menſis Maii obſeruationes ſunt tantum 6 dierum, quae Kachtae factae ſunt. Maxima his 6 diebus altitudo barometri erat tantum 25. 57 d. 4, et minima 24. 79 d. 2. Hanc minimam altitudinem excepit procella N N W, qui ſequenti die per interualla continuauit, modo N, modo N g W. Hoc die 3 h. 4 a. m. nix quoque ceciderat, quamquam thermometrum gradum 140 vix attigerat. Procella igitur d. 1. 2 et 3 continuauit, et d. 6 duas horas continue quoque obſeruata eſt, quum barometrum ad 24. 90 deſcendiſſet, calorque 122 eſſet d. 5to. Minima barometri altitudo omnino eſt memorabilis, quia minima eſt, omnium in Sibiria obſeruatarum. Calor maximus 122 d. 5, et minimus 140 d. 1 fuit.

Menſis

Menſis Iunii obſeruationes incipiunt a die 6, et ſunt Nertſchiae factae. Maxima altitudo barometri erat 26. 38 d. 24, et minima 25. 77 d. 20. Maximus calor hoc menſe fuit d. 29. 105, et 108 d. 16, 27. 30. Minimus 120 d. 21. 22. Tonitrua fuerunt d. 22. 28. 29. 30.

Obſeruationes menſis Iulii a 1 ad 4 Nertſchiae adhuc factae ſunt; a die 14 autem ad 21 in Officinis argenti Arguuenſibus. Maxima barometri altitudo 25. 98 Iulii 2, et minima 25. 49 d. 14, quam ſequebantur fulgura et tonitrua vehementiſſima, grandine magnitudinis piſo maioris comitata. Ventus erat S 1. et thermometrum 124 D. 20 quoque pluuia copioſa cum fulgure et tonitru, vento ex S O. In munimento Argunenſi grando eodem die vitelli oui magnitudine cecidit circa veſperam, qua omne fere frumentum perditum fuit.

Auguſti et Septembris menſis obſeruationes nullae extant, Octobris autem per ſingulos menſis dies Ircuti factae. Hoc menſe maxima altitudo barometrica fuit 27. 30, obſeruata d. 19, thermometro 175, vento S W 3. Hora 9 p. m. halo circa lunam obſeruata pallidi coloris eſt, quae vltra dimidiam horam non durauit, Coelum eo tempore nubilum ſerenari coepit. Minima altitudo 26. 07 d. 15 fuit obſeruata, thermometro 140, Vento N 2, coelo tenuibus nubibus obducto, quod dein ſerenari coepit.

Calor minimus fuit d. 20 notatus 184, maximus 140 die 8 et 15.

Halo quoque die 20. h. 7. p. m. circa lunam conſpecta fuit, ſimilis haloni diei praecedentis; lata tres

lunae

lunae diametros, 18 lunae diametris a luna circiter diſtans. Coelum initio ſatis ſerenum fuit, quod vero haud ita multo poſt nubilum factum; hoc tamen non obſtabat, quo minus halo adhuc conſpici poſſet. Barometrum erat 27. 18, thermometrum 179, vento OSO 2.

Porro d. 23. h. 2. p. m. halo circa ſolem viſa pallidiſſima et breui euaneſcens, a ſole 14 circiter diametros ſolares diſtans, vnam ſolis diametrum lata. Coelum tenuibus nubibus erat tunc temporis obductum, barometrum 26. 85, et thermometrum 169, ventus NNW 1. Die 26 halo rurſus circa lunam h. 4. a. m. quae ad h. 6^{tam} durauit, coelo nubilo, Vento O 1, barometro 26. 94, et thermometro 163. Ceterum notandum, per integrum hunc menſem, nebulam fumi ſpecie continue ab Angara fluuio euehi viſam, tam ſpiſſam, vt in fluuio nauigantes, non vltra diſtantiam trium orgyiarum obiectum aliquod cernere potuerint.

Menſis Nouembris obſeruationes adhuc Ircuti factae ſunt. Maxima barometri altitudo fuit, 27. 37 d. 7, coelo mixto, vento O 2; thermometrum 172, mane 180, erat. Minima 26. 52, thermometrum 175, ventus W 1; nebula mediocris ſpiſſitudinis. Caeterum hic menſis maiorem partem ſerenus fuit. Vehementiores venti erant d. 2. 15. et 24 gr. 4, qui vltimus per vnicam tantum horam ſaeuiit ex NNW.

Secundum thermometricas obſeruationes frigus maximum fuit 185 d. 28, ventus O 1, coelum ſerenum; minimum autem 150 d. 3. coelo ſereno, vento 00,

M[illegible] 13. Nebula ſpiſſa fuit d. 4. vento OO, h. 7 a. m. [illegible] 14 [illegible] 17 quam excepit coelum ſerenum; porro d. 21 et 23 nebula mediocris ſpiſſitudinis. D. 10 Ircutus fluuius glacie coiuit, vento O 1, thermometro 160, barometro 27 06. Eodem die h. 6 et ½ p. m. halo circa lunam adparuit quadrantem horae durans. Coelum ante et poſt apparitionem ſerenum. Nocte ingruente inſignis vaporum copia inſtar nebulae adſcendit, ſequuta tamen eſt tempeſtas ſerena.

Menſis Decembris obſeruationes Ircutenſes hae fuerunt. Maxima barometri altitudo fuit 27. 47 d. 4 ventus NW 1, coelo ſereno, aëre tamen ſpiſſis vaporibus repleto; thermometrum 200 monſtrabat. Minima 26. 25 d. 1, thermometro 163, vento O 2, coelo ſereno.

Reliqua notatu digna huc redeunt: Venti vehementiores fuere gradus 4 d. 11, 20 et 21. Nebulae d. 4, 5, 8, 9, 16, 24. Spiſſa nebula, quae menſe antecedenti continue ſupra fluuium adparuit, etiam hoc menſe fuit perpetua. Halo circa lunam d. 9 h. 6 p. m. adparuit, quae circa h. 9 euanuit. Fuit nebula toto hoc die ſpiſſa, thermometro 187, barometro 27. 10, coelo nubilo. D. 20 h. 2 a. m. halo circa lunam conſpecta, quae ad h. 6 durauit, Vento NNW procelloſo, qui eodem tempore oriri coepit. Barometrum 26. 83, et thermometrum 168 erat; dies fuit ſerenus, et ventus de vehementia ſua circa h. 6 p. m. remiſit. Phaenomenum porro notatu dignum d. 16 h. 6 p. m. conſpectum fuit. Nempe a WNW verſus OSO faſciae, nubium ſublucidarum ſpecie, quinque erant extenſae

tenſae. Extremitatem orientalem verſus inſuper nubeculae quaedam debilem lucem ſpargentes conſpiciebantur; faſciae illae vtrinque in extremitatibus coibant, et in medio, ſiue Zenith, recedebant, h. 10 p. m. vix amplius obſeruari potuere, quia coelum nubibus obductum eſt. D. 27 h. 5 p. m. nubeculae quaedam peculiarem plane faciem habentes, coloris e fuſco cinerei, immixto rubore, hinc inde diſperſae, NNW verſus adparuere, quae h. 11 p. m. totum fere coelum occuparunt, quod ſubito rurſus ſerenum factum eſt.

In Angara fluuio d. 4 Decembr. cruſtae glaciales minores latae ſunt. In Balaganenſi munimento iam Nouembris 30 glacie coiuit Angara. Glacies continue per fluuium lata eſt, exceptis paucis diebus. Die 29 aquae Angarae multum intumuerunt, et glacies multa in fluuio adparuit, vento O 2, barometro 26. 50 et thermometro 168 Ad orgyiam vsque increuerunt aquae Angarae d. 30, barometrum erat 26. 88, thermometrum 162, ventus NNW,

A. MDCCXXXVI.

Annus 1736 continet fragmenta obſeruationum meteorologicarum in diuerſis locis factarum. Incipiunt a Ianuarii 1mo et pertinent ad Iunii 15.

Menſis Ianuarii obſeruationes a 1mo ad 20 pertingunt, quae adhuc Ircuti factae ſunt. Maxima barometri altitudo hoc menſe fuit d. 18. 27. 35, coelo ſereno, thermometro 181, vento O 1. Minima 26. 40 d. 10, coelo ſereno, quod dein te-

 nuiſſi-

tenuiſſimis nubibus fuit obductum. H. 6 p. m. halo circa lunam adparuit, in vertice, et non procul ab horizonte, non bene terminata, coelum fuit ſerenum, ventus O 3, thermometrum 175, barometrum 26. 45. Porro d. 13 ab h. 4 ad 5 a. m. halo circa lunam pallida conſpecta eſt, coelo ſereno, vento NNW 1, barometro 27. 00. Eodem die rurſus halo pallida circa lunam h. 11 p. m. coelo tenuiſſimis nubibus obducto, niue minutis floccis cadente, vento S 1, thermometro 178, barometro 26. 98. Secundum obſeruationes thermometricas calor hoc menſe diminutus fuit ad 196 Ian. 5 h. 10 p. m. coelo ſereno, vento O 2. Gradus quoque 195 notatus fuit Ian. 5, et 19. Minimum frigus fuit 166, d. 17, vento O 2, coelo fere ſereno. Procella fuit d. 18 WNW, barometro 27. 10, quum fuerit praecedenti nocte 26. 72; ceterum venti vehementiores d. 8. 9. 10. 14. 17. Angara fluuius nocte praeterita Ianuarii 1, e regione arcis Ircutenſis glacie conſtitit, quo facto, nebula illa perpetua, huc vsque ex fluuio hoc euecta, ceſſauit. Thermometrum erat 173, ventus 0.0. Ianuarii 4 lacus Baical totus iam glacie riguit circa Selengam.

Porro d. 15 h. 7 a. m. halo pallida circa lunam, coelo hinc inde ſereno. H. 1½ p. m. d. 16 coelo tenuiſſimis nubibus obducto ſegmentum halonis ſolaris in Zenith conſpectum fuit, viuidiſſimis coloribus ludens, quod breui diſparuit. Circa h. 3½ duae halones concentricae, et in interiore halone vtrinque parelii, faſciaeque ab illa protenſae; viuida pariter

lux

lux in vertice eiusdem halonis, et ſurgentia ex illa cornua, viuidiſſimis coloribus ludentia, conſpiciebantur. Meteorum hoc conuenit cum illo, quod Maraldi in Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae 1720 deſcripſit. Thermometrum 179, barometrum 26. 95 erat, vento O 3. Die praecedenti altitudines mercurii neque in barometro, neque in thermometro notatae fuerunt. Ceterum notari poteſt, barometrum et thermometrum, quae his obſeruationibus inſeruiere, fuiſſe in loco aëri peruio inter N et O, qui a ſuperficie fluuii ad $2\frac{1}{2}$ orgyias circiter eleuatus erat.

Menſis Februarii obſeruationes factae ſunt partim Balaganii, ſcilicet a d. 4 ad 9, partim in munimento Brattienſi a die 15 ad finem menſis. Hoc menſe maxima barometri altitudo fuit 27. 45, d. 28, vento N 1, thermometro 182, coelo ſereno. Minima 26. 45 d. 9, vento OSO 1, coelo nubilo et niuoſo, thermometro 176, quod paullo ante fuit 194. Maximum frigus d. 8 obſeruatum 201 h. 7. a. m. vento ONO 1, barometro 26. 75, coelo ſereno. Minimum 150 d. 16 vento W 4, coelo nubilo, barometro 26. 80, quod h. 7 a. m. ad 26. 70 deſcenderat. Venti procelloſi d. 5. 6. 15. 16, potiſſimum ex S et W ſpirantes.

Meteorum, quod d. 16 Ianuarii Ircuti viſum, d. 11 huius menſis rurſus elegantiſſime adparuit inter h. 10 et 11 a. m. Halo pallida circa ſolem viſa d. 15 h. 2 p. m. coelo tenuiſſimis nubibus obducto, vento S 2, thermometro 160, barometro 27. 00. Hora 7 p. m. halo quoque pallidiſſima circa lunam

 viſa,

viſa, vento SO 3, thermometro 165, barometro 26. 90. Die 20 rurſus halo circa ſolem, et in illa duo parelii ſibi ex oppoſito ſiti, lucidiſſimi coloris, intermixto rubro, viridi et luteo, figura ad ſenſum rotunda. Coelum erat ſerenum, ventus O g N 2. Huc pertinet quoque Meteorum Iakutiae circa lunam conſpectum d. 15 huius menſis a Beringio nauarcho. Comparere incepit h. circiter 5 p. m. et circa mediam demum noctem ſenſim euanuit. Praeter halones et Tab. XIII. Fig. 1. paraſelenas, quas icon exprimit, externe ad peripheriam maximae halonis, quae veram lunam ſecabat, meridiem et ſeptentriones verſus in vtraque plaga nubes lucida, ſegmentum fere iridis exprimens conſpecta fuit, et illa quidem ex meridie, altera multo lucidior erat, et propter colorum viuidiſſimam lucem pulchritudine illam multo ſuperauit. Vide fig. 1.

Menſis Martii obſeruationes a 1mo ad 20 pertinent, et Ilimii factae ſunt. Barometricae obſeruationes nihil peculiare continent. Maxima enim altitudo reperta 27. 60, d. 3; minima 27. 00 d. 11. Minutus calor ad 192 d. 10, vento O 2, coelo ſereno, barometro 27. 30. Maximus autem calor fuit 155 d. 18, W 3, niue copioſa cadente, barometro 27. 05. Halonis ſegmentum conſpectum fuit h. 9 a. m. d. 1 cornibus ſurſum erectis, iridis coloribus varium. Ventus erat NNW 1, thermometrum 170, barometrum 27. 37. D. 3 h. 7 a. m. idem meteorum obſeruatum, quod d. 28 menſis praecedentis, facies tantum erat alia. Vtraque halo vix diſtingui potuit, de inte-

riore

rioſe vero circa horizontem duo ſegmenta erant conſpicua, columnarum inſtar in altum ſurgentia. Haec ſegmenta iridis coloribus eximie coruſcabant, rubro colore id latus occupante, quod ſoli propius erat. In vtraque extremitate horizonti vicina parelius erat, iridis coloribus conſpicuus, et zonam lucidam vtrinque de ſe emittens. In vertice interioris halonis arcus erat ellipticus, vtrinque vero cornuum inſtar ampliabatur. Hic quoque iridis coloribus maxime inſignis erat, rubro colore concauam partem occupante. Arcus in vertice externae halonis iridis colores luce debili monſtrabat. H. 8½ nihil amplius conſpici potuit. Supremus arcus primus diſparuit, tum et halones omnino, praeter columnas, quae vna cum pareliis, et arcu in vertice interioris halonis ſito, ad finem vsque perdurarunt; barometrum 27. 60, thermometrum 184, vento O 1 erant. Vid. Fig. 2. Tab XIII. Fig. 2.

Martii 5 inter h. 2 et 3 a. m. NW verſus lux quaedam ſatis fortis erat conſpicua, et ſurgentes ex illa radii decem circiter, columnarum ſpecie, rubro, viridi et luteo colore ludentes, ad 45 vel 50 gradus recta in altum exporrecti erant. Nulla in meteoro mutatio contigit, niſi quod viuidus radiorum color breui diſparuerit, et quod poſt ¾ h. duo tantum radii ſuperſtites fuerint, h. 4 vero nec radiorum, nec lucis aliquid conſpici amplius potuit; coelum tota nocte ſerenum erat.

Die 7 a. m. rurſus duo parelii debilem lucem ſpargentes, cum halone pallidiſſima eos nectente, adparuere. Per noctem pauca nix ceciderat, ventus O 1, thermometrum

trum 177, barometrum 27. 30, aër tenuiſſimis vaporibus plenus erat. Die 8 h. 9 p. m. coelo ſtellis obſcure lucido, halo circa lunam iridis coloribus coruscans adparuit, vento O 1, thermometro 178, barometro 27. 45. D. 20 h. 9 p. m. multae nubes lucidae inter N et W conſpicuae non vltra 30 gradus elevatae videbantur. Poſt quadrantem horae coelum in ea regione admodum obfuſcatum fuit, nec ſerenitas, quae ceterum per totum coelum regnabat, ibidem rediit. Subiungere hic placet altitudinem montium Ilmienſium, ope barometri repertam, $74\frac{1}{2}$ orgyiarum. Differentia per tres dies a fluuio Ilime et ſummo cacumine montium fuit $\frac{60}{100}$ pollicis Pariſini.

Aprilis integri obſeruationes in vico Vſtilgenſi factae ſunt. Maxima huius menſis altitudo barometrica fuit, 27. 05, coelo ſereno, vento NW 1, thermometro 150. Die 22 glacies fluuii Ilgae rumpi coepit, Campi a niue omni liberi iam erant, et gemmae iulorum ſalicum copioſe prodiere. Minima 25. 85 d. 2, thermometro 140, vento SSO 4, coelo ſereno.

Frigus maximum fuit d. 4 h. 6. a. m. 161, barometrum 26. 70, vento W 4, tempeſtas dubia. Minimum 131 d. 18 h. 6 p. m. Barometrum 26. 38, ventus S 1, coelo tenuibus nubibus obducto.

Venti hoc menſe vehementiores d. 2 SSO 4, d. 3 W 3, d. 4 W 4, d. 9 NW 4, d. 10 NW 4, d. 12 W 3, d. 14 W 3, d. 24 W 4, d. 28 WgN 4.

Aquae

Aquae Lenae et Ilgae multis in locis a glacie liberi fuerunt iam d. 10. D. 22 glacies Ilgae plane rupta, et d. 23 glacies Lenae variis in locis rumpi coepit. April. 1. halo pallida circa ſolem h. 7. a. m. barometrum 26. 35, thermometrum 140, ventus 00, coelum mixtum erant.

Halo circa lunam d. 11 h. 10 p. m. pallida, vento W 1, coelo tenuiſſimis nubibus obducto. D. 28 circa occaſum ſolis pluuia copioſa cecidit, coelo occidentem verſus ſereno, quo tempore adparuit iris viuidiſſimis coloribus coruſcans, huicque alia exterior concentrica pallidior fuit. Vtraque vtroque extremo horizonti inſiſtere videbatur.

Menſis Maii obſeruationes adhuc in vico Vſt-Ilgenſi continuatae ſunt.

Huius menſis altitudo mercurii in tubo torricelliano maxima erat d. 10, 26. 80, vento N 1, thermometro 144. Aquae Lenae 3½ Werſchok increuerant, coelo tenuibus nubibus obducto, quae coeli facies aliquot dies ita continuauit. Eſt autem 1 Werſchok pars decima ſexta vlnae ruſſicae, hinc 4 Werſchok ſunt aequales 7 pollicibus Londinenſibus.

Minima altitudo 26. 10 d. 20 h. 6. a. m. obſeruata eſt, coelo maiorem partem ſpiſſis nubibus obducto, cum nebula, vento NNO 2, thermometro 119.

Calor maximus 119 d. 20 h. 6 a. m. coelo nubilo. Minimus autem 150 d. 7 h. 6 a. m. vento S 4, barometro 26. 45, coelo nubilo, et niue rara paruis floccis cadente.

 Dies

Dies pluuii fuerunt 2. 3. 9. 11. 12. 14. 16. 21. Venti vehementiores d. 5. W 3, d. 6. S 4, d. 7, S 4.

Nebula in regione fluuii et montium, ceterum coelo ſereno, d. 15, 17, et 20, perpetua conſpecta fuit.

Lenae fluuii glacies omnino ſoluta eſt, nocte inter diem 3. et 4tum. Caeterum aquae Lenae et Ilgae ſaepius hoc menſe increuerunt. Glacies in Ilga fluuio iam d. 1 non niſi ad littora comparuit.

Halo circa ſolem pallida d. 5. h. 12 adparuit, cuius ſegmentum ex meridie ſolis conſpiciebatur iridis coloribus obſcure ludens, circa ſolem vero integra halo pallida, quae h. 11. iam adparere coepit. Ventus S 1, thermometrum 140, barometrum 26. 65, erant.

Iunii obſeruationes inſtitutae ſunt Vſt-Kuti. Incipiunt a Iunii 4to et pertinent ad 16.

Barometri altitudo maxima 27. 16. obſeruata eſt d. 8 h. 6. a. m. vento 00, coelo ſereno, thermometro 140. Dies ſequentes aliquot fuerunt ſereni. Minima 26. 61. d. 9 h. 6. p. m. notata eſt, coelo hinc inde ſereno, vento 00, thermometro 117. Ventus vehementior d. 7 O 3; d. 11 W 3 et 4; d. 12 SSW 4; d. 13 W 3 et 4.

A. MDCCXXXVII.

Anni 1737 obſeruationes incipiunt ab Octobris 1mo et ad finem anni pertingunt. Factae ſunt omnes in Kiren.

Kirengenſi munimento. Locus, quo barometrum et thermometrum ſuſpenſa erant, duas circiter Orgyias a ſuperficie aquarum Lenae euectus erat.

Octobris 18, h. 6. a. m. barometri maxima altitudo obſeruata eſt 27. 47, vento W 2, thermometro, 172, coelo nubilo. Minima 26. 38. d. 13. h. 2. p. m. vento oo, coelo nubilo, thermometro 146. H. 8. Ventus cum vehementia 4ta ſaeuiit, qui iam die antecedenti initium ceperat. Thermometrum maximum frigoris gradum monſtrabat d. 16 et 23. h. 6. a. m. 190, coelo ſereno, barometro 27. 27. vento oo, quae malacia et hoc integro die et ſequenti continuauit, quam W g S 4 ſequutus eſt nocte inter 24 et 25. Die 16 quoque ventus oo erat, coelum ſerenum, barometrum 27. 12. Malaciam et hic ſequutus ventus W 3. Minimus frigoris gradus 136 obſeruatus d. 10. h. 2. p. m. vento S 3 et 4, quem praecedebat h. 6. a. m ventus oo. Barometrum erat 26. 47. Coelum ſerenum, quod paullo poſt nubibus obduci coepit.

Venti vehementiores fuerunt d. 10. S 3 et 4; d. 11 W 3 et 4; d. 14 W 4; d. 16. W 3; d. 20 et 21 W 4, quem ſequutus ventus oo vsque ad 24, quo die et 25 W 4; d. 27. S 4; d. 28. W 3; d. 29. S 3 et 4; d. 31. S 4.

Lena fluuius ex aduerſo Kirengenſis munimenti d. 5. poſt ortum ſolis riguit, non ex cruſtis glacialibus aggregatis, ſed ſolo frigore, id quod quotannis hoc in loco fit propter lentiſſimum aquarum motum, infra vero et ſupra hunc locum fluuius nondum rigebat.

Circa h. 10. p. m. diei 5, radii plures lucidi immobiles NO verſus conſpiciebantur, ſatis procul ab horizonte ſurgentes, ſeptentrionem verſus ſumma erat caligo; coelum tamen breui poſt etiam ibi, vbi radii conſpicui erant, totum obfuſcabatur. Ventus O 1, thermometrum 155, barometrum 26. 97.

Halo circa lunam conſpecta fuit pallida d. 28 circa horam ſeptimam, p. m. quae horam dimidiam durauit Coelum orientem verſus in regione lunae ſubſerenum erat. Circa h. 11 arcus lucidus ſeptentrionem verſus adparebat ad 30 gradus circiter eleuatus, ſpatio inter arcum et horizontem obſcuriſſimo.

Nouembris menſis integri obſeruationes in Kirengenſi munimento ſunt continuatae.

Barometri maxima altitudo fuit notata d. 10. h. 6. a. m. 27. 57, thermometro 195, vento 00, coelo ſereno. Minima autem 26.62. d. 23. h. 2. p. m. coelo nubilo, niue cadente, thermometro 168, vento S 2.

Thermometri gradus frigoris maiores hoc menſe notati d. 3. h. 6. a. m. 205, barometro 27.27, vento 00, coelo ſereno. D. 25 et 26 gradus 218 obſeruatus, barometrum a die 25 ad 27 variabatur a 27. 17 ad 27. 42. Circa meridiem d. 27 frigus ad 270 creuit, h. 2. p. m. autem iam erat 195, quem gradum iam poſt horam dimidiam monſtrabat. H. 6. a. m. erat 218. Ventus ſemper fuit 00, barometrum 27. 32, coelo nubilo.

Trabes

Trabes aedium, et feneſtrae, nocte tota d. 26 ſtrepuerunt. Coelum his diebus vel ſerenum vel nubibus tenuiſſimis obductum erat. Conſuetum intenſi frigoris phaenomenum quoque obſeruabatur, quod e conclaui egredienti pinnulae narium quaſi conſtrictae ſint. Minimum frigus 156. d. 8. h. 3. p. m. vento SW 4, barometro 26. 85, coelo nubilo, obſeruatum fuit.

Venti vehementiores hoc menſe Nouembri erant d. 1 W 4; d. 4. S 3; d. 5 W 3 et SW 4; d. 6. SW 3; d. 7 SW 4, d. 8. SW 4 et W 4; d. 18. W 4, antecedente et conſequente malacia; d. 20 W 4, rurſus antecedente et ſequente malacia; d. 25 N 3 eodem modo antecedebat et ſequebatur ventus o o; d. 28 S 3 et 4.

Halo pallida inter h. 10 et 11 p. m. circa lunam adparuit d. 1mo, vento W 4, thermometro 179, barometro 27. 22, coelo ſubſereno.

Color amoene coeruleus ſeptentrionem verſus adparuit, ſole per nubes translucente, circa occaſum ſolis d. 8. vento SW, h. 7. p. m. in W verſo, ex quo tempore perpetuo ſaeuiit vehementia 4.

Coelum multis nubibus tractibusque quaſi igneis propter colorem conſpicuum erat d. 17. h. 3½ p. m. barometro 27. 17, et thermometro 175, vento o o. Inter h. 10 a. m. et 2 p. m. nubes ſatis ſpiſſae fuerunt.

Halo pallida circa lunam d. 19. h. 12 nocte, quae iam h. 9. p. m. apparere incepit. Inter h. 9 et 10 pruinae quaedam ſpecies admodum humida et roris in-

ſtar madeſaciens ex aëre cecidit, vento o o, thermometro autem 188, barometro 26. 92 monſtrantibus.

Halo lunaris adparuit quoque die ſequenti 20 inter 7^{am} et 8^{am} horam p. m. Pruina humida iugiter per aëra cadebat ab h. 5. p. m. quo tempore niuium lapſus ceſſauerat, thermometro 188, barometro 27. 22, coelo ſubſereno. Die quoque ſequenti 21 halo pallida circa lunam, a 6ta ad 8^{am} horam vsque, adparuit, coelum tunc nubibus ſpiſſis obductum finem meteoro fecit, rediit tamen h. 11. Niues minutiſſimae toto die, pruinae inſtar, per aëra ceciderunt, quae continuarunt, etiam meteoro adparente, ad h. 12 et vlterius, vento SW 1 et 2, thermometro 185, barometro 27. 20.

Halo pallida itidem circa lunam d. 23 inter h. 8 et 9 p. m. coelo nubilo, vento o o, thermometro 167, barometro 26. 70. Die 24 inter h. 7 et 8 p. m. rurſus halo pallida circa lunam, vt et inter h. 10 et 11. H. 4. p. m. tenuiſſimae nubes oriebantur, quum antea niues cecidiſſent. H. 12. p. m. coelum erat ſerenum, vento inconſtanti, anemoſcopio in gyrum circumacto, cum gradu tamen tantum 2do, thermometrum h. 12. p. m. erat 185, et barometrum 27. 04. Halo itidem d. 26 ab h. 8. p. m. ſatis lucida, coelo tenuiſſimis nubibus hinc inde obducto. Die 30 rurſus halo h. 11. p. m. cum exortu lunae viuidiſſima, vento W 1, thermometro 172, barometro 26. 92. Frequentiſſimae igitur hoc menſe halones fuere, vt dubium ſit, an vnquam frequentius vno menſe adparuerint.

Menſis

Menſis Decembris obſeruationes in Kirengenſi munimento quoque factae ſunt, vt monuimus.

Barometri altitudo maxima notata eſt d. 9. h. 12 nocte 27. 70, vento o o, coelo ſereno, thermometro 196½. et ſequenti die mane 203, eadem barometri altitudine perſeuerante. Minima 26. 27. d. 26. h. 6. a. m. vento W 4, ingenti niuium copia ſimul cadente, thermometro 165.

Thermometri obſeruationes monſtrant, maiores frigoris gradus hoc menſe incidiſſe d. 10, 11, 29 et 30. D. 10. h. 8. a. m. et h. 11. p. m. 203, vento o o, barometro 27. 66, coelo ſereno. D. 11 h. 8. a. m. 210, vento o o, coelo ſereno, barometro 27. 65. Eodem die h. 3. p. m. 252, vento o o, coelo ſereno, barometro 27. 62. In hac obſeruatione idem accidit, quod d. 27. Nov. ſcilicet quod breuiſſimo tempore frigus, obſeruatore inſpectante, rurſus decreuerit, dum intra 13 minuta prima rurſus thermometrum 210, vti in antecedenti obſeruatione, monſtrauit. D. 27. 206. Die 29 autem h. 8. a. m. fuit 213, et h. 4. p. m. 263, vento o o, barometro 27. 62; coelo ſereno a duabus horis. In thermometro et barometro minutiſſimae bullulae adparebant inſigniore frigore hoc, quae ſua ſponte, decreſcente frigore, euanuere rurſus. Eiusdem diei h. 6. p. m. 217, barometro 26, 92. vento oo, coelo ſubſereno. Decembr. 30. h. 6. a. m. 206 per integrum diem; barometro quoque inuariato 27. o o et vento o o, qui frigoris gradus ſequenti die 31 h. 8. a. m. quoque notatus eſt, barometri quoque altitudine non mutata, coelo ſereno, h. 6 autem poſt meridiem

frigus

frigus iam ad 198 decreuerat; barometro nunc variato 26. 98. Ceterum toto die 31 vapor ſpecie nebulae magnam aëris regionem occupabat. Minimum frigus hoc fuit menſe d. 19 h. 7. a. m. et 4. p. m. ſcilicet 155, niue perpetuo cadente, vento S 4; barometro 26. 58; quum in obſeruatione praecedenti fuerit 26. 74.

Venti vehementiores hoc menſe fuerunt d. 1 inter W et N variabilis 3 et 4, quem ſequuta eſt malacia, praecedebat ventus W 1; d. 2, 3 et 4 SW3 et 4, ſequente malacia ad 7 vsque continue; d. 14 SW 3; d. 15 SW3 et 4, qui ad ſequentem diem continuauit. D. 17 SW4; d. 18. WgS4; d. 19 S 4 et W 3; d. 20 W4; ſequente d. 21 malacia, ſeu vento o o; d. 22 rurſus S4; d. 23 W4, qui per ſequentem diem integrum continuauit; d. 25 et 26 W4 ſequente d. 27, 28, 29 malacia, d. 30 N 3; ſequente rurſus malacia die ſequenti, et tribus ſequentibus.

Halo conſpecta pallidiſſima circa ſolem circa meridiei tempus d. 2, ita vt per nubes tenues transpareret, thermometro 177, barometro 27. 32, niue minuta cadente. D. 5 paullo ante occaſum ſolis, ex vtroque eius latere, in diſtantia 15 circiter diametrorum ſolarium a ſole, columna viſa fuit, iridis coloribus eximie coruſca, rubro colore faciei ſolis obuerſo, plane, vt Ilimii ſub ortum ſolis ſub finem Februarii 1736 viſum fuit. Cum occaſu ſolis diſparuit, et coelum ſerenum factum eſt. Coelum durante hoc phaenomeno tenuibus nubibus, quae et interdum ſolis faciem obſcurarunt, obductum erat.

erat. Poſt occaſum vero ſolis coelum ſerenum factum eſt. Barometrum circa meridiem erat 26. 97 et h. 11 p. m. 26. 92, thermometrum meridie 169, h. 11. p. m. 178, vento 00. Die 6to h. 1. a. m. ad h. 4 vsque adparuit aurora borealis magna lucidiſſima ſub facie arcus lucidi, et radiorum ex eo ſurgentium, rubro colore elegantiſſime ludentium, et tantum non in Zenith vsque euectorum, miraque celeritate euibratorum, totam regionem inter NNO et N N W occupauit. Plaga occidentalis, licet nullis radiis, aut arcu lucido, conſpicua fuerit; luce tamen quadam inconſueta oculos ferire videbatur. Barometrum h. 7. a. m. erat 26. 92, et h. 2. p. m. 26. 98; thermometro iisdem horis 182 et 181, vento 00. Pruina h. 7. a. m. inſtar roris madefaciebat, coelo nubilo, et h. 2. p. m. coelo plurimam partem ſereno, particulae glaciales per aëra cadebant. Ab h. 11. a. m. ad meridiem vsque columna ex meridie ſolis, in diſtantia 15 diametrorum ſolarium, 5 et 6 gradus alta, iridis coloribus ludens, conſpecta fuit ſub iisdem circumſtantiis antea iam indicatis. Die 23 inter h. 6. et 9. p. m. halo lucidiſſima circa lunam viſa, barometro 26 92, thermometro 164, vento W 4, niue farinae inſtar minuta et copioſe cadente, h. 4. a. m. Decembris 26. h. 11. p. m halo pallida circa lunam viſa eſt coelo nubilo, vento W 3, thermometro 192, barometro 26. 87; mane erat 26. 72. D. 28. h. 10 p. m. itidem halo circa lunam ſatis lucida adparuit, vento 00, coelo nubilo, nebula toto die, et h. inter 2 et 3 p. m. etiam niue cadente, thermometro 202, barometro 26. 70; h. 4. p. m. erat 27. 37. Decembris 29.

h. 11 p. m. halo circa lunam, coelo nubilo, vento W 3, thermometro 201, barometro 26. 92; h. 4. p. m. erat 27. 62. D. 30. h. 6. a. m. halo circa lunam viuidiſſimis coloribus ludens, coelo plurimam partem ſereno, vento N 3, thermometro 206, barometro 27. 00, quod inuariatum ad ſequentem diem perſtitit. D. 31 tota die nebulae ſpecie vapor magnam aëris regionem occupauit, coelo caeterum ſereno, vento 0 0, thermometro inter 206 et 198 variato, et barometro a 27. 00 ad 26. 98.

A. MDCCXXXVIII.

Menſium huius anni Ianuarii et Februarii obſeruationes adhuc in Kirengenſi munimento ſunt inſtitutae.

Menſe Ianuario ſumma in barometro altitudo fuit 27. 52 d. 4. h. 7. a. m, thermometro 182, vento 0 0, coelo nubilo. Minima 26. 67 d. 18. h. 11 p. m. coelo nubilo, vento W 1, thermometro 165½. Secundum thermometrum frigus ſummum hoc menſe fuit notatum 275. d. 9 fere circa mediam noctem, coelo ſubſereno, vento N 2, barometro 27. 42; h. 4. p. m. erat 217. Notandum eſt, inter mercurium hinc inde aëreas bullulas rurſus adparuiſſe. Ceterum maiores frigoris gradus obſeruati ſunt hoc menſe d. 5. 216. d. 6, 212. d. 7. 8 et 9, 217. d. 11 et 12, 220 et 226.

Minimum frigus 153, coelo nubilo, vento S 3 et 4, barometro 26. 80, quod d. 31. h. 4. p. m. contigit.

Venti vehementiores d. 3. WSW 3; d. 16. SW 4; d. 17 W 4; d. 19 W 3 et 4; d. 20 W 4; d. 24

d. 24 W4; d. 25 S3 et 4; d. 26 W4; d. 31 S3 et 4, reliquis diebus omnibus ſere malacia regnauit.

D. 8. magna vaporum copia, aërem inſtar nebulae tenuis obfuſcantium, coelum, quod fuit ſerenum, reddebat ſatis obſcurum, thermometro 217, barometro 27. 42, quod per aliquot dies antecedentes et conſequentes inuariatum fuit, vento o o. Nebula haec circa meridiem diei ſequentis demum diſſipata eſt, et coelum perfecte ſerenum factum.

Halones hoc menſe ſequentes fuere obſeruatae: D. 14 inter h. 7 et 9 p. m. halo pallida circa lunam comparuit, vento o o, thermometro 176, barometro 27. 22, coelo ſereno. D. 17 halo pallida circa lunam, vento SW 2 et 3, thermometro 166, barometro 26. 92. h. 12. nocte, coelo nubilo. D. 19 halo pallida circa lunam ab h. 9. p. m. per tres horas et amplius adparuit, vento W 3 et 4, thermometro 168, barometro 26. 82, coelo nubilo. D. 21 halo pallida circa lunam h. 5. p. m. vento o o, coelo nubilo, niue ſere roris inſtar cadente, thermometrum 188, barometrum 27. 14 monſtrabant. H. 7. a. m. erat 27. 22. D. 22 itidem halo circa lunam per longum tempus viſa h. 10. p. m. vento o o, thermometro 192, barometro 26. 98, coelo maiorem partem ſereno. D. 25 halo circa lunam ab eius ortu adparuit, vento 3 et 4 W et S, thermometro 154, barometro 26. 72. D. 27 h. 11. p. m. rurſus halo lunaris, coelo ſereno, thermometro 186, barometro 27. 27; h. 7. a. m. erat 27. 00. vento o o, praecedebat W 4.

Menſe Februario altitudo maxima barometrica fuit 27 50 d. 22. h. 11. p. m. thermometro 203, vento o o, coelo per totum diem ſereno. Minima 26. 27 d. 14; in antecedenti obſeruatione 26. 35, vento W 4, qui ad exiguum tempus tantum durauit, quem excepit malacia h. 11. p. m. barometrum rurſus erat 26. 40, thermometro 164, niuibus per totum diem cadentibus.

Frigus maximum 241 d. 23. h. 7. a. m. vento o o, barometro 27. 12; die praecedenti thermometrum monſtrabat 220, et h. 5. p. m. rurſus 177, et barometrum 27. 22, coelum erat nubilum. Minimum frigus erat 147 d. 5. p. m. barometro 26. 98. vento S 2, coelo nubilo, et niue cadente copioſiſſima.

Venti vehementiores fuere d. 2 S 4 et W 4, ſequente malacia; d. 8 W 4 ſequente malacia; d. 12. W 4, et d. 13. S 4, ſequente malacia breui; d. 14 W 4, ſequente malacia; d. 17 W 4, antecedente et ſequente malacia per omnes ſequentes dies.

D. 7 inter h. 8 et 10^{am} p. m. regio ſeptentrionalis multa luce fulgebat, praecedente inſigni obſcuritate, quae ſegmenti ſpecie adparebat. Nullus lucis motus, nulli radii, nec vlli colores. Ventus erat oo, thermometrum 164, barometrum 27. 00, h. 5. p. m. 26. 94.

Die 8 ſtatim poſt h. 9. p. m. plaga coeli inter NNW, et NO ſita, multis columnis viuida luce praeditis leuiterque rubentibus, et vix ad 45 gradus eleuatis, omni motu deſtitutis, interdum tamen

men viuidius micantibus, occupata erat, idque phaenomenum ad 10^{am} vsque horam conſpectum fuit, tunc omnis lux multo pallidior facta breui poſt plane diſſipata eſt, licet coelum ſerenum manſerit; vento 00, thermometro 195, barometro 27.30, antea 27.17, et poſtea 27.22 erat barometrum.

Halo circa lunam d. 19. h. 11. p. m. coelo hinc inde tenuiſſimis nubibus obducto, vento 00, thermometro 191, barometro 27. 07. Februarii 20 itidem h. 8. p. m. halo adparere coepit, et ad h. 12 et amplius durauit, vento 00, thermometro 187, barometro 26. 97, coelo tenuiſſimis nubibus obducto.

D. 24 inter h. 9. et 10. p. m. radii, ſiue faſciae, perquam lucidae, a ſeptentrionibus in *Zenith*, et ab hinc in meridiem vsque, exporrectae erant, motu omni deſtitutae, micantes tamen aliquantisper. Vix phaenomenum dimidiam horam durauit, quod coelum tenuiſſimis nubibus obductum vlteriorem eius comtemplationem impediuit. Alterum phaenomenum priori mox ſucceſſit, ſcilicet h. 11 halo circa lunam pallida, quae vero ob ſerenitatem coeli ibi regnanten vix conſpicua fuit, vento 00; thermometrum 188, barometrum 27. 42, antea 27. 34 poſtea 27. 32, et thermometrum antea 179 et poſtea 195 monſtrabant.

Hactenus obſeruationes Kirengenſes, reliquae huius anni in vrbe Ieniſea factae ſunt, quae vero a menſe Octobri demum incipiunt.

Menſis Octobris huius anni obſeruationes Ieniſeae inſtitutae, fuerunt ſequentes: Barometri altitudo maxima

ma hoc menſe fuit 28. 26. d. 16, thermometro 164, vento o o, coelo albis nubibus obducto; in antecedenti obſeruatione 28. 23. Minima 27. 06 d. 12, thermometro 149, vento S 2, pluuia paruis guttis cadente. 27. 33. h. 11. p. m. die praecedenti fuit, et ſequens obſeruatio 27. 13 indicabat.

Thermometrum in ſummo huius menſis frigore monſtrabat gradum 183. d. 28. h. 11. p. m., vento o o, coelo ſereno, barometro 28. 13, qui gradus frigoris durauit ad diem ſequentem, et notatus adhuc h. 8. a. m. coelo nubilo, vento W 3, barometro 28. 20. Minimum frigus 151. d. 5. h. 3. p. m. vento S 2, niue minuta per interualla cadente, barometro 27. 36, in antecedenti obſeruatione 27. 32.

Venti vehementiores gradus 3 et 4 fuerunt d. 2 SW 3 et 4, antecedente et ſequente malacia; d. 4. S 4; d. 5 SSW 4, antecedente et ſequente malacia; d. 11 SO 3; d. 20 WZS 4, antecedente, ſed non ſequente malacia; d. 29 W 3 et 4 per aliquot dies continuans, ſequente malacia, quae quoque antecedebat. D. 1 magna iam glaciei fruſta in fluuio Ieniſea comparuerunt, die antecedenti primae cruſtae glaciales viſae ſunt.

Nouembri menſe obſeruata fuit maxima mercurii in tubo barometrico altitudo 27. 98 d. 15, h. 9. a. m. vento o o, niuibus minutis cadentibus, thermometro 164. Minima 27. 23. d. 20. h. 9. a. m, thermometro 160, vento o o; in antecedenti obſeruatione 27. 68 altitudo fuit. Secundum thermometricas obſeruationes

ſum-

ſummum frigus fuit 203. d. 29. h. 9. a. m. in antecedenti obſeruatione 196, barometro 27. 68, vento O 2, coelo ſereno cum tenui nebula. Minimum 155 d. 2, coelo nubilo, niue per interualla cadente, vento SW 4, barometro 27. 35, antea 27. 54.

Venti vehementiores d. 1 SW 4, qui continuavit d. 2 et 3 per interualla; d. 13 SSO 4; d. 18 W 3; d. 27 S et N 4; d. 30 SSO 4, ſemper antecedente et ſequente vento vel debili, vel o o.

Nebula tenuis d. 29 antea iam indicata eſt.

Halo pallida circa lunam d. 11 circa mediam noctem, vento S 1, thermometro 164, barometro 27. 84, coelo tenuiſſimis nubibus obducto.

Decembris menſis obſeruationes in vrbe Ieniſea continuatae ſunt.

Hoc menſe mercurius ad 28. 28 in tubo torricelliano adſcendit d. 23, coelo nubilo, vento o o, thermometro 170, antea 28. 13 barometrum erat. Minima 27. 28 d. 2. h 10. a. m. thermometro 163, SW 3 et 4, coelo ſereno Obſeruatio antecedens 27. 58 et conſequens 27. 46 indicabat. Secundum thermometrum ſummum frigus 205 d. 4. h. 9 a. m. Vento o o, ſereno coelo, nebula tamen tenuiſſima, barometro 27. 72, antea 27. 65. Minimum 158. d. 9. 12. 13. Venti vehementiores d. 1 et 2 S 3 et 4; d. 5 S 3.

Nebula tenuiſſima d. 4. h. 9. a. m. antea iam notata eſt.

A.

A. MDCCXXXIX.

Obſeruationes anni 1739. Ieniſeae continuatae ſunt. Menſe Ianuario ſumma altitudo barometrica 28. 30 d. 4, thermometro 206, vento O 2, coelo ſereno, vapore tamen in aëre tenuiſſimo viſibili; antecedens obſeruatio 28. 20 et conſequens 28. 18 indicabat. Infima altitudo 27. 10 d. 24. h. 9. a. m. in antecedenti obſeruatione 27.40 et ſequenti 28. 09, thermometro 212, vento 0 0, coelo ſereno cum tenui tamen nebula.

Maximum frigus hoc menſe 215. d. 17. h. 8. a. m. vento 0 0, coelo ſereno, tenui tamen nebula. Inſigniores frigoris gradus fuerunt quoque d. 1, 208, d. 4, 210, d. 5, 206, d. 16, 213 d. 18, 214, d. 19, 212, d. 23, 214, d. 24, 212.

Minimum frigus 168 d. 11. h. 11. p. m. antecedens obſeruatio 175 et conſequens monſtrabat 169. coelum nubilum, ventus W 3 et 4, barometrum 27. 96, antea 28. 00 erant.

Venti vehementiores d. 1 SgO 3 et 4; d. 7 O 3; d. 12 W 3, reliquo tempore vel malacia, vel ventus debilis regnabat.

Vapor ſpiſſus atmoſphaeram ad notabilem altitudinem occupauit d. 1, coelo tamen ſereno, barometro 28. 28, thermometro 208, vento O 2. Eiusmodi vapor ſpiſſus d. 4 quoque obſeruatus eſt, coelo ſereno, barometro 28. 20, thermometro 210, vento 00; d. 5 vapor in aëre tenuis conſpectus eſt. Nebula ſatis ſpiſſa d. 16;

d. 16; nebula tenuis d. 17 et 18; tenuiſſima nebula itidem d. 19, 22; item d. 23, 24.

Halo circa lunam d. 7 ab h. 9. p. m. ad 12, et amplius, vento O 3, thermometro 181, barometro 28. 05. h. 12. Porro halo circa lunam pallidiſſima d. 9 inter h. 7 et 8 p. m. Circa mediam noctem multae faſciae lucidae per coelum diſperſae, barometro 28. 02, thermometro 180, vento OSO, coelo nubilo. Die 11 inter h. 8 et 9 p. m. rurſus halo circa lunam, coelo nubilo, vento W 3 et 4, thermometro 168, barometro 27. 96, antea 28. 00.

Menſe Februario ſumma barometri altitudo 28. 10 d. 21. h. 11. p. m. coelo ſereno, vento SSO 1, thermometro 169. Barometrum in priore obſeruatione erat 28. 03, et in ſequenti 28. 00. Minima altitudo 27. 23 d. 12. h. 9. a. m. coelo nubilo, vento SgO 4, thermometro 158. Antecedens obſeruatio barometrica 27. 53, ſequens 27. 48, continuante vento W 4.

Thermometricae obſeruationes monſtrant, frigus ſummum fuiſſe d. 6. h. 8. a. m. 186, vento SO 2, coelo nubilo, barometro 27. 68. Praecedens obſeruatio thermometrica 155, et ſequens 161 indicabat. Frigus minimum erat 133. d. 19. h. 9. a. m. vento S 2, coelo nubilo, niue ſe reſoluere incipiente, barometrum 27. 62 indicabat.

Venti vehementiores d. 1 SO 4, idem die ſequenti; d. 5 S 3; d. 7 W 3; d. 9 W 4; d. 11 S 4; d. 12 W 4; d. 19 S 3; d 23 S 4.

D. 28. h. 12. p. m. a meridie ſeptentrionem verſus, in altitudine 15 circiter graduum, zona conſpiciebatur perquam lucida, non admodum lata, infra quam coelum obſcuriſſimum adparuit, reliquae coeli regiones ſtellis egregie lucebant. Catarrhi toto menſe epidemice graſſati ſunt.

Menſe Martio notata ſumma barometri altitudo eſt 28. 12, d. 31. h. 9. a. m. ſequens obſeruatio erat 28. 05 et antecedens 28. 00. Coelum ſerenum, Ventus SO 1, thermometrum 157 erant. Minima altitudo 27. 30. d. 14. h. 8. a. m. Praecedens 27. 47 et ſequens 27. 35. Coelum nubilum vento W 2, thermometro 147.

Secundum thermometrum frigus maximum 170 d. 20. h. 8. a. m. in praecedenti et ſequenti obſeruatione 160. Barometrum 27. 80, ventus NO 1, coelum ſerenum, quod toto die durauit. Frigus minimum 147 d. 14, h. 8. a. m. vento W 2, coelo nubilo, barometro 27. 30.

Venti vehementiores d. 6 SW 3; d. 9 W 4; d. 16 S 4; d. 25 W 4.

Aurora borealis d. 2 inter 7 et 9. horam p. m. conſpecta, quae primum ſub rubedinis lucidae ſicie NO verſus comparuit, tum paullatim columnas in altum miſit, ad ſeptentriones ſimul propius accedens. Columnae illae omnes, quarum vltra duas ſimul non viſae ſunt, exiguae durationis erant, et colore quodam rubro ludebant, vento O 1, thermometro 155, barometro

metro 27. 73. D. 18 inter h. 8. et 9. p. m. rubedo quaedam inſolita ſeptentriones et meridiem verſus viſa eſt, quae breui diſparuit. Prima rubedo eaque fulgentiſſima meridiem verſus erat, orientem haec paulatim petiit, et in ſeptentrionibus deſiit. Coelum nubibus varium, vento WSW 1, ſequente malacia, thermometro 155, et barometro 27. 53.

D. 19 inter h. 9 et 10. p. m. trabes igneae quinque, ſex, ſeptentriones verſus conſpectae, quae nullo motu agitatae fuerunt, niſi quod interdum vna et altera diſparuerit, et rurſus comparauerit. Euanuerunt vero paulatim, vento N 2, thermometro 160, barometro 27. 75, coelo fere ſereno.

D. 30 inter h. 9 et 11. p. m columnae lucidae exiguae altitudinis, et nullius motus ſeptentriones verſus viſae ſunt, luce interdum ſatis viuida, interdum perquam debili lucentes, vento O 2, thermometro 158, barometro 28. 05, coelo ſereno.

Hae columnae rurſus adparuerunt inter h. 2 et 3 a. m. ſequentis diei 31, quae vero breui diſparuerunt. Caeterum catarrhi cum tuſſe epidemica hoc menſe graſſati ſunt. Febres quoque ardentes et pleuritides non infrequentes fuerunt. In quibusdam etiam febres ephemerae obſeruatae ſunt. Sub medium menſem morbilli graſſari coeperunt.

Hactenus obſeruationes in vrbe Ieniſea inſtitutae, ſequentes huius anni 1739 partim in vrbe Mangaſea factae ſunt, quae incipiunt a Iunii 9 et pertinent ad

 Iunii

Iunii 18, reliquae Kraſnoiarii ab Octobris 18 ad finem anni.

Hoc menſe Iunio a 9 ad 18 ſumma barometri altitudo obſeruata Mangaſeae 27. 74 d. 12. h. 7. a. m. coelo ſereno, vento O 1, thermometro 148. Praecedens obſeruatio barometrica 27. 70, et ſequens quoque erat. Hoc die declinatio acus magneticae aliquoties horis poſt meridiem obſeruata, orientem verſus 8° monſtrauit. Minima 27. 44. d. 9, h. 7. a. m. coelo nubilo, vento WNW 1, thermometro 150. Minimus calor $152\frac{1}{2}$ d. 10, h. 9. a. m. Maximus autem 131 d. 15 et 18. Aquae in plateis ſtagnantes glacie obductae d. 8 et 9, et nix quoque cecidit d. 9. 10.

Ventus ſemel 3 gradus fuit WNW d. 10, barometro 27. 54, thermometro 151 et 152. Antecedens obſeruatio barometrica 27. 52; caeterum malacia regnauit, et dies vt plurimum ſereni fuerunt.

A menſis Octobris d. 18 ad finem ſumma altitudo barometri Kraſnoiarii erat 28. 33 d. 18. h. 3. p. m. vento NNW 1, antecedens 28. 30, ſequens 28. 04, coelo ſereno. Minima 27. 07 d. 24. h. 3 p. m. vento W 4, coelo nubilo. Antecedens 27. 20 et ſequens 27. 35.

Thermometricae obſeruationes hic deſunt, ex variis datis autem concludere licet, tempeſtatem hoc menſe iam admodum frigidam fuiſſe.

Nam

Nam Mana fluuio, quinto iam huius menſis die, glacies profluxit. D. 18 ab h. 9 ad 12 per Ieniſeam fluuium multa glacies lata eſt, quae poſtea diſparuit rurſus, et d. 16 cruſtae glaciales inſignis magnitudinis conſpicuae erant, quae numero iam ita auctae ſunt, vt ſpiſſiſima fluuium tantum non texerint. D. 19. ingens frigus et glaciales cruſtae inſignis magnitudinis per fluuium latae, et ſequentibus quoque diebus donec d. 23 circa meridiem glacie riguerit fluuius. Soluta quidem glacies aliquoties diebus ſequentibus fuit per aquas intumeſcentes, ſed ſemper rurſus concreuit.

Nebula d. 19. h. 7. a. m. ſatis ſpiſſa, quae circa h. 9. a. m. diſſipata fuit, ſequente coelo ſereno, et frigore aliquantum remittente.

Venti vehementiores d. 24 W 4; d. 25 SW et W 4; d. 27 W 4.

Menſis Nouembris barometrica altitudo maxima 28. 35. d. 5. h. 5. p. m. antecedens 28. 17, ſequens 28. 25, vento 00, coelo ſereno, tempeſtate frigidiſſima. Trabes domuum noctu ſtrepitum ediderunt. Minima 26. 97 d. 29. Antecedens obſeruatio 27. 03, ſequens 27. 20. Ventus erat W 4, coelum nubilum. Thermometricae obſeruationes deſunt.

Venti vehementiores d. 1 W 4, qui ad ſequentem diem continuauit; d. 12 et 13 SW 4; d. 14. et 15 SW 4; d. 19 et 20 procella inter W et S, barometro 27. 14, antea 27. 40, et poſtea 27. 63; d. 23 SW 4; d. 25 W 4; d. 26 SW 4; d. 27 W 4; d. 29 W 4.

 Caete-

Caeterum hoc et praecedente menſe febres ephemerae et ardentes, ſatis tamen benigne, et ſine ſtrage, graſſatae ſunt.

Maxima barometrica altitudo Decembri 28. 14 d. 15 h. 5. p. m. Antecedens obſeruatio 28. 05, et ſequens 27. 95, Vento o o, coelo ſereno, et tempeſtate frigidiſſima. Minima 26. 85 d. 3, h. 7. a. m. antecedens 27. 20, ſeq. 27. 15, V. W 2, coelo ſpiſſis nubibus obducto.

Venti vehementiores d. 7 W 4; d. 11 W 4; d. 18. Nebula admodum ſpiſſa h. 7. a. m. vento o o, barometro 28. 00, coelo ſereno, ſequente frigore intenſo.

MDCCXL.

Obſeruationes huius anni 1740 a Ianuarii 1 ad Septembris 6 adhuc Krasnoiarii factae ſunt, ſed deficiunt adhuc obſeruationes thermometricae; reliquae ab Octobris 1mo ad finem anni inſtitutae Tomii (Tomsk) ſunt.

Menſe Ianuario barometri altitudo maxima 28. 40, d. 17; h. 7, a. m. antecedens obſeruatio 28. 39, et ſequens 28. 33 indicauit. Coelum ad horizontem nubilum, caetera ſerenum. Vento W 3, qui iam a d. 15 ſaeviit vehementia 3 et 4, frigore intenſo. Minima 27. 08 d. 10 h. 8. a. m. in praecedenti obſeruatione 27. 30, in ſequente 27. 09, vento W 1, coelo nubilo, tempeſtate tepida.

Venti hoc menſe vehementiores d. 15 W 3; d. 18 SW 3; d. 21 SW 4; d. 22 SW 3; d. 30 W 3

W 3 et 4; diebus ſere omnibus intermediis perfecta malacia, et dies fuerunt ſereni, et frigus intenſiſſimum.

Nebula tenuis, frigore intenſo, coelo fere ſereno d. 2 h. 7. a. m.

Nebula ſpiſſa, a ſaeuo gelu, vento W 2, barometro 27. 80 d. 14 h. 7. a. m. praecedente et ſequente coelo ſereno.

D. 15 rurſus nebula ſpiſſa, h. 7. a. m. intenſo frigore, quae h. 11. a. m. diſſipata eſt, vento 00, ſequente vento W 3, et coelo mixto; d. 19 ſpiſſa nebula h. 7. a. m. praecedente coelo ſereno et ſequente vento 00, quem proxime praecedebat SW 2, et ſequebatur quoque.

Summa altitudo barometrica menſe Februario fuit 28. 16 d. 21 h. 9. a. m. in praecedente obſeruatione 28. 02, in ſequenti 28. 13, coelo ad horizontem tenuibus nubibus obducto, frigore intenſo. Minima 26. 90 d. 27. h. 8. a. m. praecedens 26. 92 ſequens 27. 37. Procella inter W et SW, quae iam a ſecunda hora poſt mediam noctem regnabat, mox intenſius, mox remiſſius, interdum cum intermiſſione totali. H. 7. a. m. pluuia minutiſſimis guttis per quadrantem horae cecidit.

Venti vehementiores d. 23 W 4; d. 25. SW 4; d. 26 et 27 SW 3 et 4. A 1 ad 21 perfecta malacia regnauit, coeli ſerenitas et frigus intenſum.

Menſis Martii barometri altitudo ſumma 28. 45, d. 13. h. 8. a. m. in antecedenti obſeruatione 28. 27, in

27, in ſequenti 28. 40 erat. Minima 27. 25, d. 24, in antecedenti 27. 32 et ſequenti 27. 30, vento WSW 2, coelo ſpiſſis nubibus obducto.

Venti vehementiores d. 2 W 4, ſequente malacia, quae quoque proximo incedebat; d. 4 NW 4; d. 11 W 4; d. 12 inter W et NW 4; d. 14 WSW 3, d. 16 OSO 3; d. 25 N 3.

D. 10 duas horas ante occaſum ſolis duo parelii, et ab iis vtrinque ad latus a ſole auerſum faſcia lucida horizontaliter extenſa conſpiciebantur. In parreliis illis vtrinque terminabatur columna ab horizonte extenſa, et ſemicirculus ſupra ſolum conſpicuus, qui vt et parrhelii a ſole 15 circiter diametros ſolares diſtabant. Supra ſemicirculum in diſtantia 12 circiter diametrorum ſolarium arcus cruribus ſurſum verſis ſuſpenſus erat. Omnia iridis coloribus lucebant, rubeo colore in columnis et dimidio circulo ſoli obuerſo; in arcu inuerſo in contrariam partem. Haec ad occaſum vsque ſolis durabant, nubibus per interualla impedientibus, ne diſtincte omnia omni tempore conſpici potuerint. Ventus erat oo, barometrum 27. 57.

D. 24 ventus WSW 4 h. 9, a. m. grandinem exiguae tantum molis attulit, quam multae niues ſequutae. D. 30 h. 10 p. m. circa lunam halo pallida adparuit, quae 5 horas et amplius durauit, vento oo, coelo ſubſereno, barometro 27. 65.

Menſis

Menſis Aprilis ſumma barometri altitudo 27. 90, d. 26. h. 9. a. m. antecedens obſeruatio 27. 65, et ſequens 27. 84 indicabant, vento NNW 2 et 3, coelo ſereno. . Minima 26. 85, d. 18 h. 8. a. m. Antecedens 26. 95, et ſequens 27. 50, vento W4, coelo nubilo et pluuio. Aquae fluuii ex veſpera heſterni diei 5 Werſchok auctae erant.

Venti vehementiores d. 8. 9. et 10, W3et 4; d. 11 W4; d. 12 WgS4; d. 13 WNW4; d. 14 W3; d. 15 OgS4; d. 16 W4; d. 18 W4; d. 24 N4.

Aquae fluuii Ieniſeae increuerunt inſigniter d. 14. D. 16, vento W4, multis in locis glacies in Ieniſea fluuio ſoluta fuit, d. 19, fluuii glacies rupta. Solennis huius rupturae glaciei terminus apud incolas habetur dies Georgii. Caeterum poſt ruptam glaciem fluuii Ieniſeae, cruſtae glaciales admodum multae ad 21 vſque latae ſunt, potiſſimum a glacie ad littora relicta, et ſtatim poſt rupturam aqua valde increuit. Circa d. 8 Pulſatillae florere coeperunt, circa d. 10 anſeres, et d. 13 cygni viſi ſunt. Primum tonitru cum fulgure et larga pluuia d. 29 eſt obſeruatum.

Menſis Maii altitudo barometri ſumma obſeruata fuit 27. 75, d. 15, h. 8 a. m. coelo ſereno, vento 00, in antecedenti obſeruatione barometrum erat 27. 70, et in ſequenti 27. 62. Dies antecedens et ſequens fuerunt ſereni. Minima notata eſt 27. 07 d. 22 h. 8 a. m.

a. m. vento W 3, coelo maiorem partem nubibus ſpiſſis obducto. Aquae fluuii nocte 2 Werſchok auctae erant. Praecedens obſeruatio 27.12 et ſequens 27. 26, notabant. Ventus antecedens erat NW 1, et ſequens W 4, quem larga ſequuta eſt pluuia, ſemi horam tantum durans. Poſt hanc ventus ex NW ſumma cum vehementia ſequutus. Quum hic vix flare coepiſſet, mercurius in barometro altius adſcendit, et coelum paullatim ſerenum factum eſt.

Venti vehementiores d. 2 W3, d. 3 W3, d. 7 N3, d. 9 NO4, d. 11 SW4, d. 12 SW4, d. 13 W4, ſequente vento oo, d. 15 et d. 26 W4.

Tonitru e longinquo auditum eſt d. 3 circa h. 5 a. m. Inter h. 3 et 4 p. m. tonitru frequens fulgure comitatum, eſt auditum, d. 26 h. 8. p. m. tonitru et fulgura, quae ſequuta eſt larga pluuia per horam durans, d. 30 tonitru cum fulgure et cum pluuia larga.

Niues hoc menſe cecidere adhuc d. 5, vento WNW 2, d. 7 niues per interualla, vento N et NgW 2. Niues pluuiae interdum mixtae, nonnunquam grando, exiguae tamen molis, vento N 2 et 3 et NW 4. D. 8 nocte nix cecidit, et per diem quoque per intervalla. D. 9 rurſus niues, vento NO4, tranſeunte in SO4. Grando piſi magnitudine d. 29 cecidit.

Pluuiae cecidere d. 3. 4. 12. 13. 14. 19. 22. 26. 28; d. 24 mane pruina admodum copioſa, vnde

de multa vegetabilia, inprimis ea, quae floruerunt, aduſta fuere. D. 25 ros largus mane cecidit; d. 29 rurſus pluuia, vt et d. 31.

Caeterum fluuii Ieniſeae aquae frequenter hoc menſe increuerunt, vti d. 4, et 7, vento NO 2, d. 21. 22, 24, 25, 26, vento W 1, et 3, d. 27. et 28 vento W 2 et 3. Vti aquae fluuii ſaepius ſupra altitudinem ordinariam adſcenderunt, ſic quoque ſaepius infra illam hoc menſe deſcenderunt.

Iunio menſe barometrica altitudo ſumma fuit 27. 43, d. 10 h. 8 a. m. antecedens 27. 36, ſequens, 27. 33, coelo adhuc ſereno, dein ſpiſſis nubibus obducto, vento SW 2, ſequente vento WNW 1, dein vento CO. Minima 26. 87, d. 29 h. 6 a. m. coelo nubilo, cum ſole interlucente, vento SSW 2. Proxime antecedens 26. 93, vento SSW 2, pluuia tota die per interualla cadente, ſequens 27. 02, vento SW 2, pluuiis et imbribus per interualla cadentibus.

Venti vehementiores d. 3 S 4, quem larga ſequuta eſt pluuia, d. 9 SW 3, d. 14 W 3, d. 20 S W 4, quem modica pluuia ſequuta eſt.

Pluuiae largae d. 1 antecedentibus fulguribus perquam lucidis, et tonitru perquam concuſſorio. Sequuta eſt quoque grando piſi magnitudine cum pluuia, quo tempore ventus ex NW ſpirauit, qui alias maiorem diei partem inter W et SW ſubſtitit. Porro pluuiae d. 3 et 4, cum tonitru; pluuia cum tonitru d. 5, et 6; d. 8 circa occaſum ſolis pluuia pauca; d. 9 tonitru cum

 imbre,

imbre; d. 13 tonitrua cum larga pluuia, vt et d. 17. 18. 20; d. 24 fulgura et tonitrua horrenda largiſſima pluuia ſubſequente, praecedente vento S 4, barometro 27 25, in antecedenti obſeruatione 17. 05; d. 25 pluuia, vt et 26. 27, d. 28 pluuia per totum diem cum incremento aquarum, vento SSW 2, et d. 29 cum incremento aquarum, aëre praeter modum frigido, vento SW 2.

Iulio menſe ſumma barometri altitudo 27. 57 d. 27. h. 8. a. m. vento N 1, praecedente O 2, et ſequente W 1, coelo tenuiſſimis nubibus obducto, ſequente coelo ſereno. Antecedens altitudo 27. 55, ſequens 27. 48, aquis Ieniſeae diebus aliquot antecedentibus et ſubſequentibus admodum auctis. Minima altitudo 26. 95 d. 1, vento inter WSW et SSW vario, ſole per nubes lucente, ſequente h. 3. p. m. inſigni tempeſtate cum lucidiſſimis fulguribus et tonitru perquam concuſſorio. Nocte et mane per interualla larga pluuia cecidit. Antecedens altitudo 26. 90, ſequens 27. 30.

Venti vehementiores d. 16 W 4, barometro 27. 07, antecedens altitudo 27. 00, ſequens 27. 18; d. 23 W 3; d. 25 WgS 4, altitudo barometri 27. 30, antecedens 27. 15 et ſequens 27. 43; d. 30 N 3; d. 31 O 3 et 4.

Pluuiae et tonitrua. D. 1mo longa pluuia, tonitrua et fulgura lucidiſſima; d. 2 imbres et pluuiae; d. 3 tenues pluuiae; d. 4 modica pluuia; d. 5 pluuia modica.

D. 9

D. 9 inter h. 3 et 4. p. m. fulgura admodum lucida ex S et W prodibant cum tonitru intenſo, et perquam concuſſorio, quae pluuia ſequuta eſt largiſſima in imbrem tandem mutata. Aëre praecedente feruidiſſimo. Ventus W 1, altitudo barometri 27. 12, antecedens 27. 17, ſequens 27. 20 erant. D 11 pluuia largiſſima; d. 13 pluuia larga; d. 15 pluuia larga, vento paullo ante ex W cum vehementia 3 ſpirante; d. 18 pluuia larga; d. 19 ingens pluuia, vento ex SO 4. D. 21 magna pluuia, vento ex N cum vehementia tertia et quarta ſpirante. D. 23, praeeunte vento ex W 4, pluuia largiſſima, tonitru quoque e longinquo auditum eſt.

Nebula ſpiſſiſſima d. 31 ab ortu ſolis fluuio Ieniſeae imminuit, vento 00. Aquae Ieniſeae fere perpetuo, modo increuerunt, modo decreuerunt, vix vno alteroque die praeterlabente, quin mutationem paſſus ſit fluuius.

Auguſto menſe altitudo barometri maxima 27. 87 d. 31. h. 7. a. m. vento 00, coelo ſereno, aëre perquam frigido. Antecedens altitudo 27. 66, et ſequens 27. 65. Minima 27. 08 d. 28 h. 8. a. m. coelo ſereno, interſperſis hinc inde tenuibus nubeculis, ſequuta eſt h. 2. p. m. procella ex W cum grandine piſi maioris magnitudine, dein pluuia ſatis larga, calor interdiu aeſtiuus in aëre regnauit. Antecedens altitudo 27. 15, ſequens 27 24 erat.

Venti vehementiores d 5 O 4, deſcendente barometro a 27. 50 ad 27. 32; d. 14 NW 3, deſcen-

 dente

dente barometro ab h. 8. a. m. ad h. 6. p. m. a 27. 60 ad 27. 50; d. 15 et 17 OgS3; d. 22 O3; d. 23 ONO3; d. 25 SSW3, d. 26 W4 quem comitata ingens pluuia, barometri altitudo 27. 22 a die 24, ſequens autem h. 11. p. m. huius diei 27. 44. D. 28 W3 et 4; d. 29 W3 et 4, aëre frigidiuſculo.

Pluuiae. D. 6 7 et 8. pluuia larga; d. 13 largiſſima repetitis vicibus; d. 24 pluuia tenuis; d. 25 pauca pluuia; d. 26 ingens pluuia.

Nebulae. D. 9 circa ortum ſolis ſpiſſa nebula, quae poſt ortum eius mox diſſipata eſt, d. 10 nebula, vt praecedens, circa ortum ſolis. Caeterum aquae fluuii Ieniſeae rariſſime nullam mutationem paſſae ſunt, ſed modo increuerunt, modo decreuerunt.

Septembris menſis obſeruationes barometricae tantum per ſex dies habentur, a 1mo ad 6^{tum} intra quos barometrum variatum a 27. 57 ad 27. 37. In montoſis locis ſupra vrbem Ieniſeam nix ſatis larga nocte inter d. 4 et 5 cecidit ex relatione inde profectorum.

Hactenus obſeruationes Kraſnoiarii factae. Has quae excipiunt, in itinere Tomſkum verſus inſtituto habitae ſunt.

Dies nonus Septembris calore et amoenitate aeſtiuo ſimilis fuit, quem et nox ſequebatur clariſſima ſtellarum luce ſplendens et tepida. Dimidia vero hora ante mediam noctem ſeptentriones verſus nubes admodum lucida conſpecta

ſpecta fuit, horizonte in vicinia prae obſcuritate ſeratro. Caeterum etiam coelum, antea quidem ſplendidiſſimum, atris nubeculis, quae, ſtellis interpoſitae, harum lucem quaſi illuſtriorem reddiderunt, paullatim hinc inde obductum fuit. Nubes lucida in ſeptentrionibus breui poſt igneo fulgore ruboreque coruſcabat. Eodem fere tempore orientem verſus tres praelucidae columnae ab horizonte in altum ad 30 circiter gradus extenſae conſpiciebantur, mox rurſus diſparentes. Nubes illa lucida memorata lucem ſuam admodum variabat omni momento, interdum penitus rubra, interdum orientis inter nubes ſolis inſtar tincta, nonnunquam et lunae inſtar pallida erat. Quadrantis horae ſpatio elapſo eadem nubes orientem verſus amplificabatur, tuncque conſtanter pallida fuit. Breui poſt totum coelum obſcuratum fuit, et ventus ſubito vehementiſſimus ex SW, cuius afflatu lux illa ſeptentrionalis ſubito quaſi exſtincta, aut diſſipata fuit. Ventus hic nec ſaeuire deſiit tota nocte, at coelum, poſt praeterlapſam dimidiam horam, rurſus aliquantum ſerenabatur, partique ſeptentrionali inprimis tanta claritas inducebatur, quae totam atmoſphaeram ita claram reddidit, quaſi lunae pleno ſplendore illuſtraretur. Hocque durabat ad h. $1\frac{1}{2}$ poſt mediam noctem, quo tempore coelum ſpiſſiſſimis nubibus obductum eſt. Circa diluculum diei ſequentis inſignis pluuia cecidit, quam procella omnium vehementiſſima SW ſequuta eſt. Ex hoc porro tempore ad 20 vsque venti fere perpetuo ſaeuiere, copioſaeque pluuiae ceciderunt. D. 18 aliquot leucas infra Koſchuci oſtium ad Kiam grauiſſima obſeruata eſt tempeſtas, tonitribus fulguri-

guribusque frequentiſſimis ſtipata, qualis hoc anni tempore in Sibiria a nemine adhuc audita. Poſt meridiem nix cecidit, ſaeuiente vento perpetuo. Diebus ſequentibus 19 et 20 perpetua erat procella cum niuibus copioſis, ſed d. 21 coelum ſerenabatur et ad finem vsque menſis dies erant adeo placidi, tepidi ac ſereni, qui cum amoeniſſimis veris diebus certare potuerunt.

Reliquorum menſium huius anni 1740. ſcilicet Octobris, Nouembris, Decembris obſeruationes Tomii inſtitutae ſunt, et thermometricae rurſus incipiunt.

Menſis Octobris maxima barometri altitudo 28. 25 d. 17. h. 11. p. m. vento SO 1, praecedente malacia, et ſequente vento OSO 1. Altitudo antecedens 28. 24, ſequens 28. 18, thermometrum 168, coelum ſerenum erant. Cruſtae glaciales toto hoc die per Tomum fluvium latae ſunt, et aquae Tomi iam a tribus diebus admmodu increuerant. Minima 27. 42 d. 29 h. 8. a. m. Antecedens 27. 64, ſequens 27. 94, thermometrum 156, ventus inconſtans SSW 3, antea SSW 4 qui tantus fuit nocte ad diluculum vsque, vt hinc inde tecta domuum tolleret, ſequente vento S 2 et deinde malacia.

Frigus maximum 178 d. 30, antecedens 169 et ſequens 174, vento SO 1 et ſtatim ſequente malacia, antecedens ventus SSW 3 et 4. Barometrum 28. 00, antecedens altitudo 27. 94 et ſequens 27. 90 erat.

Mini-

Minimum frigus 137 d. 10, h. 10. p. m. antecedens 148, et ſequens 145. Barometrum 27. 52, ventus S 2, coelum ſerenum, tamen hinc inde tenuiſſimis nubibus obductum, ſequente pluuia rara, tenuiſſimis guttis roris inſtar cadente.

Venti vehementiores d. 3 et 4 S 4, d. 12 SW 4, barometro deſcendente a 27. 72 ad 27. 17 ab h. 12 nocte ad h. 9. a. m. h. 5 p. m. rurſus erat 27. 46, ſequente W 2, et malacia; d. 14 SSW 3 et 4; d. 18 S 3 et 4; d. 22 SW 3; d. 28 SSW 4, altitudo barometri 27. 64, antecedens 28. 10, et ſequens 27. 42 procella continuante.

Pluuia, nix, grando. D. 3. h. 4. p. m. per interualla mox pluuia, mox grando minuta; praecedenti die h. 3. p. m. aër ſubito totus nebulae cuiusdam ſpecie obſuſcabatur, quae fere dimidiam horam durauit, aduſtae rei odorem ſpirans; d. 4 nix rara, nocte vero niues perpetuae; d. 5 nix continua. D. 6 nix; d. 7 pluuia copioſa vt et d. 8; d. 10 pluuia rara; d. 12 pluuia, nocte vero nix rara magnis tamen floccis per dimidiam horam cecidit; die 13 larga nix; d. 14 niues magnorum floccorum; d. 16 toto niues ciciderunt; d. 19 inter horam 2 et 6tam tanta niuium copia cecidit, vt campos penitus operiret. D. 20 ſpiſſa nebula; d. 22 nix rara; d. 23 nix copioſiſſima minutis floccis; d. 27 niues largae mediocrium floccorum, h. 5 p. m. fulgur quoque ex occidente iactatum eſt inſigne, coloris autem multo pallidioris, quam aeſtate fieri ſolet; d. 30 tenuis nebula.

Tomus fluuius circa meridiem d. 24 glacie coiuit, thermometro 157, poſtquam iam a d. 15 cruſtae glaciales per fluuium latae fuerunt per interualla. Per vices quoque increuit et decreuit.

Menſis Nouembris maxima barometri altitudo 28. 35 d. 30. h. 11. p. m. vento 00, coelo ſereno, thermometro 187. Antecedens altitudo 28. 00, ſequens 191 primo ſcilicet die menſis ſequentis. Minima 26. 82 d. 14, vento S 4, coelo nubilo et copioſas niues fundente, quamuis thermometrum tantum 146 monſtraret, niues autem breui poſt in aquam reſolutae. Sequens altitudo barometri 27. 02, procella continuante; antecedens 27. 45.

Frigus maximum 191 d. 10 per totum diem, vento 00, qualis et antecedens et conſequens fuit, barometri altitudo 28. 15, antecedens 27. 95, conſequens 27. 90. Minimum 146 d. 14, vento S 4, coelo nubilo et niuoſo, barometro 26. 82.

Ex vtroque latere ſolis bina parelia viſa fuerunt d. 17 ab h. 11½ a. m. ad h. 1^{am} iridis coloribus ludentia, a quorum vtroque horizontaliter faſcia pallida, in imum vero verticaliter ignea quaſi columna protendebatur, vento S 1, coelo ſereno, thermometro 184, barometro 27 85. Die antecedenti coelum tenuiſſimis nubibus obductum erat, et minutiſſimae moleculae glaciales per aëra ceciderunt.

Menſis

Menſis Decembris barometrica altitudo ſumma fuit, 28. 48 d. 27. h. 11. p. m. Antecedens 28. 26, ſubſequens 28. 25, thermometro 173, vento OSO 1, antecedente et ſubſequente malacia. Coelum ſerenum, vti quoque diebus antecedentibus et conſequentibus erat. Minima 27. 30 d. 3 h. 11. p. m. antecedens 27. 60 et ſequens quoque 27. 60, thermometro 155, vento SW 2, praecedente SW 4 et ſequente W 2, Coelum nubilum, et niuoſum, die antecedenti quoque et ſequenti niues cecidere.

Frigus ſummum 191 d. 1 h. 8. a. m. Praecedens 187 et ſequens 180, barometri altitudo 28. 35 ſequens 28. 20. Ventus S 2, ſequente S 4, antecedente malacia. Coelum ſerenum per totum diem, vti quoque diebus antecedentibus aliquot, ſequenti vero die coelum nubilum, et ſequentibus quoque diebus fuit. Frigus minimum hoc menſe incidit in diem 23 h. 9. a. m. quod fuit 151, antecedens 154, et ſequens 157, barometro 27. 60, vento SSW 2, coelo nubilo.

Venti vehementiores d. 1 S 4; d. 2 S 3 et 4; d. 3 S 4; d. 5 S 4; d. 14 S 4; d. 16 SO 4; d. 19 SSO 4; d. 20 SSO 4.

Halo pallida circa lunam adparuit d. 1 h. 11 p. m. coelo tenuiſſimis nubibus obducto, thermometro 176, barometro 28. 00, vento S 2, antecedente et ſequente S 4.

 A. MDCCXLI.

A. MDCCXLI.

Obſeruationes huius anni barometricae et thermometricae Tomii ſunt continuatae, et pertingunt ad Aprilis 22, a Ianuarii 1mo incipientes. Incendio enim hoc die facto inſtrumenta, quae meteorologicis obſeruationibus adhuc inſeruiere, fuerunt perdita.

Menſe Ianuario maxima barometri altitudo 28. 40 d. 4. h. 8. a. m. Antecedens 28. 36, ſequens 28. 38, thermometro 184, vento 00, ſequente OSO 1, dein SSO 2 et 3, praecedente malacia. Coelum ſerenum, vti quoque fuit diebus aliquot antecedentibus, et die ſequenti. Minima altitudo 27. 38 d. 26, antecedens 27. 44 ſequens 27. 74, vento NW 2, coelo nubilo niues largas fundente pulueris inſtar, thermometro 152.

Frigus maximum hoc menſe 205 d. 21 h. 8. a. m. Praecedens 195, ſequens 198. Altitudo barometrica 27. 96, antecedens 28. 05, ſequens 27. 72. Ventus SO 2, antecedens SO 1, ſequens 00, dein S 3. Coelum ſerenum, tenuiſſimae tamen nebulae in aëre. Dies tres antecedentes ſereni, ſequens autem mixtus. Minimum frigus 152 d. 26. h. 8. a. m. praecedens 154 et ſequens 158, barometro 27. 38, vento NW 2, coelo nubilo et niue pulueris inſtar copioſiſſima cadente.

Venti vehementiores d. 6 SSO 3; d. 9 OSO 4; d. 14 SSO 4; d. 18 S 4; d. 30 OSO 4; d. 31 SSO 4.

D. 12

D. 12 inter h. 8 et 9 p. m. coelum inter ſeptentrionem et occidentem ſubito ruberrimo fulgore coruſcabat, cui fulgori mox ex ſeptentrionibus et poſtea ex occidente faſciae eiusdem coloris iungebantur. Sed haec lux inter varias mutationes, et motus vix dimidiam horam durauit, coelo iis in regionibus paullatim tenuibus nubibus obducto. Adparuerunt quidem mox poſtea per obſcuritatem coeli, quaſi emicantes quatuor aut quinque faſciae in altum ſurgentes, et inter illas etiam vna et altera rubro colore inſignis, ſed et illae breui diſparuerunt, coelo adhuc obſcuriore facto. Coelum tenuiſſimis nubibus erat obductum, vento OSO 2, thermometro 180 barometro 27. 80, h. 11. p. m.

Tenuiſſimae nebulae d. 20 et 21 fuerunt.

Februario menſe ſumma barometri altitudo 28. 30 d. 23. h. 8 a. m. antecedens 28. 20, ſequens 28. 25, thermometro 185, vento OSO 1, praecedente malacia, et ſequente SSO 3, coelum ſerenum, vti die antecedenti, ſequenti autem nubilum fuit. Minima 27. 02 d. 20. h. 8. a. m. antecedens 27. 40, ſequens 27. 25, thermometro 148, vento S et SSW 4, praecedens S 4, et ſequens W 4. Coelum nubilum, et niues interdum et exigua grando pluuiaque cadebant.

Frigus ſummum 188 d. 24. h. 8. a. m. antecedens 180, ſequens 169, barometri altitudo 28. 16, antecedens 28. 25, ſequens 28. 17, vento SSO 3, antece-

dente OSO 1, ſequentes SW 2, coelo nubilo, antea ſereno poſtea nubilo et niuoſo. Minimum frigus 140 d. 12, h 8. a. m. antecedens 155, ſequens quoque 155. vento SSW 2, antecedente S 2, et ſequente etiam S 2, Coelum nubilum et niues, rarae et minutae, vti quoque antecedenti et conſequenti die cecidere.

Venti vehementiores d. 2 W 4 et SSW 4; d. 4 SSO 4 d. 5 SSW 4 et S 4; d 6 SO 4, durante hoc vento, barometrum a 27. 90 deſcendit ad 27. 32; d. 7. SSO 3 et 4; d. 8 SO 4. D. 20 SSO 4 et S. 4 D. 21 W 4; d. 26 S 4; d. 28 SO 3 et 4.

Halo circa lunam et per longum ſatis tempus ſtella in ipſo halonis limbo d. 15 inter h. 8 et 10. p. m. adparuit, coelo plurimam partem ſereno, vento S 2, thermometro 172, barometro 28. 10, ſequens altitudo 28. 00 erat.

Menſis Martii barometri altitudo ſumma fuit 28. 28 d. 25 h. 8 a. m. antecedens 28. 17, ſequens 28. 20, thermometro 166, vento W 1, antecedente SgO 2, et ſequente SgO 2, coelum tenuiſſimis nubibus obductum erat. Minima 26. 85 d 21 h. 11 p. m. antecedens 27. 17, ſequens 26 97, thermometro 152, H. 7 a. m. 171, in ſequenti obſeruatione 158, vento SO 2, praecedente OSO 3, et ſequente SO 4 et W 4. Coelum nubilum, niue ad crepuſculum vsque cadente.

Frigus maximum 181, d. 27, antecedens 166, ſequens 164, vento OSO 1, praecedente O 1 et ſequente SO 4, coelum ſerenum, ſequente nubilo cum niuibus largis.

largis. Minimum 150, d. 17 h. 11 p. m. vento S2, coelo nubilo, barometri altitudo 27. 58, antecedens 27. 63, et ſequens 27. 47, erat.

Venti vehementiores hoc menſe d. 4 et 11 S3, d. 18 W3; d. 19 S3, d. 20 S4, barometri altitudo 27. 48, antecedens 27. 20; d. 21 OSO3, et SO4; d. 22 W4, barometro 27. 25 antea 26. 97; d. 23 S3; d. 27 SO4, barometro ab 28. 05 ad 27. 75 deſcendente.

Halo circa lunam debili luce d. 16 inter h. 9 et 11 p. m. vento OgS2, thermometro 154, barometro 27. 78, ſequens altitudo 27. 63, coelo ſereno, ſequentibus tenuibus nubibus.

A 1mo ad 22 Aprilis obſeruationes ita ſe habent:

Barometri maxima altitudo his diebus viginti duobus fuit 28. 10 d. 5 h. 7 a. m. coelo ſereno, vento SO2, thermometro 155. Minima 27. 45 d. 8 et 9, thermometro 144 vento SO1, coelo ſubſereno.

Frigus maximum 155 d. 5, vento SO2, barometro 28. 16 coelo ſereno. Calor maximus 127 d. 19. h. 5 p. m. vento O2, coelo ſereno.

Venti vehementiores d. 1 O3 et OSO4; d. 7 O3 et 4; d. 13 S4.

D. 2 anſeres et anates primum viſi ſunt; d. 5 cygni viſi ſunt.

D. 18 Tomus fluuius circa h. 1. p. m. glacie reſolutus eſt, et aquae admodum intumuerunt, thermometro 132. Glacies inde ad 25 ſatis large per fluui-

fluuium lata, die ſequenti ceſſavit. Aquae quoque paullatim decreuerunt, et limpidiores euaſerunt, quae durante incremento turbidiſſimae erant.

Quia Aprilis 22, incendio facto, barometra et thermometra amiſſa ſunt, vt iam monuimus, potiora tantum meteora menſibus ſequentibus ſunt notata, ex quibus potiſſima indicabimus.

Maii 8 prima pluuia cecidit; porro d. 16 mane pluuia, circa meridiem autem et veſperam niues ceciderunt, quae quidem breui rurſus ſolutae ſunt, ſed propter gelu mox inſequens, flores iam in campis copioſe comparentes, tantum non omnes periere. Menſe Iunio et Iulio nihil memorabile occurrit; menſis autem Auguſti initium in Tara vrbe memorabile, quia admodum feruidum et ſerenum erat. Praecipue vero ob anni tempus aeſtiuum notabilis eſt aurora borealis, quae ſub initium Auguſti adparuit. Nocte ſcilicet inter 2 et 3 h. 10$\frac{1}{2}$ p. m. circiter in regione NNW, trabes igneae decem aut vndecim ab horizonte ad notabilem altitudinem ſurgebant, nec admodum micantes, nec motu in ſenſus incurrente donati, igneus tantum ſplendor interdum augebatur, interdum imminuebatur. Tandem ſpatium trabibus interceptum atrum paullatim euaſit, qui ater color breui tempore cum ipſis trabibus communicatus eſt, vnde denique tota regio atra euaſit. Sed poſt aliqua momenta totum coelum nubibus obductum eſt, quo tempore et atra antea regio eundem cum reliquo coelo colorem obtinuit, id quod accidit h. 11$\frac{1}{2}$ p. m. Ceterum feruor aëris diebus ſequentibus tantus erat, vt

omnia

omnia vegetabilia ita adparerent circa medium Auguſtum, vti ſero auctumno comparere ſolent, omnia ſcilicet exſiccata et quaſi combuſta. Vix florum quid in campis conſpiciebatur, maiorque plantarum pars iam in ſemina excreuerat.

Septembris 21 in munimento Ialutorowenſi cum ſerena tempeſtate Boreas fortiter ſpirauit. Veſpera eius diei ſereniſſima erat tempeſtas, et ventus placatus; h. 10. p. m. aurora borealis tranquilla comparebat. Circa h. 11. NW verſus trabes ruberrimo colore donatae conſpiciebantur. Circa mediam noctem omnes trabes lucidiſſimae erant, ſine rubore. Breui ante proxime ad horizontem, infra trabes admodum obſcura erat regio, quae in ſerenam mutata fuit ipſo eo tempore, quo lux trabibus adeo viuida inducta fuit, quo facto ſubito coelum meridiem verſus et occidentem ſpiſſis nubibus obductum fuit, breuique poſt ventus fortis ex occidente ſpirare coepit, qui coelo priſtinam ſerenitatem paulatim reſtituit; pro ratione autem incrementi ſerenitatis, ſerenitas lucis borealis decreuit, cuius tamen veſtigia ad diluculum vsque comparuerunt, vna vel altera pallida trabe ad illud vsque tempus perpetuo in coelo reſtante.

Octobri menſe nil memorabile contigit, niſi quod circa 16. 17. 18. Irtis, Tobol, Tura, aliique iis vicini fluuii ſubito glacie riguere. Adnotamus adhuc, quod Aprilis 28 huius anni 1741 in Kraſna Sloboda, ex relatione incolarum, grando oui gallinacei minoris magnitudine ceciderit. Grando quoque nucis iuglandis magnitudine

Maii 30 in regione Alapaichenſium aerifodinarum cecidit, item Iulii 20, in regione Dalmatowenſis monaſterii ad Terſcham et ad Pyſchmam fluuios grando ingens cecidit cum magna frumentorum iactura. Pertinet ad hiſtoriam grandinum ex anno 1740 adhuc quod Septembris 4, in regione Iesſaulowi Iurti ad Irtim fluvium inter Tobolium vrbem et Demianskoi vicum tempeſtas magna contigit, tonitru fulguribusque comitata, vbi grando quoque oui columbini magnitudine cecidit, quae tantae erat intenſitatis et duritiei, vt ſolidae glaciei parum ceſſerit, niſi quod non adeo diaphana fuerit. Hic deſinunt obſeruationes meteorologicae Sibiricae in itinere Kamtſchatkienſi factae.

Caeterum praeterire non poſſumus phaenomena quaedam ſingularia, quorum ſchemata a Ioanne Demetrii filio Bucholz duce manipulario, quem Brigadier dicunt, cum Cl. Gmelino ſunt communicata, iam 1727 et 1728 obſeruata. Die 19 Octobris h. 4. p. m. 1727, Vdinii ad Selengam fluuium orientem verſus adparuit phaenomenum ſequenti forma N 1. Porro d. 12 Nouembris eiusdem anni
Tab. XVII. Fig. 3. 1727 Selengiae Draco volans conſpectus meridiem verſus motus ſpecie ſequenti N 2. D. 1 Aprilis 1728 h. 10, 45', a. m. circa ſolem Selengiae obſeruatum phaenomenum ſub ſpecie N. 3. Quum horum phaenomenorum deſcriptio ſpecialior non occurrat, neque vllae circumſtantiae praeterea ſint adnotatae; nos obſeruationes quoque has ſpecialius enarrare non poſſumus. Interim figurae adcurate delineatae loco deſcriptionis ſpecialis eſſe poſſunt.

Vt altitudines barometri maximae et minimae ſingulorum annorum, earumque differentiae eo melius in

in oculos incurrant, et vno obtutu conſpici queant; breuiter quaſi in tabula eas repraeſentabimus. Idem quoque faciemus de thermometricis obſeruationibus, vt et haec quam faciliime conſiderari poſſint, vt alios vſus nunc taceamus.

M D C C X X X I V.

Menſe.	Barometri altitudines Maxima.		Minima.		Differentia
Auguſto	27 53	- -	25. 94	- -	1. 59
Septembri	27. 51	- -	27. 07	- -	0. 44
Octobri	28. 93	- -	27. 15	- -	1. 78
Nouembri	28 94	- -	27. 05	- -	1. 89

Ergo his menſibus Maxima 28. 94. Minima 25. 94 Diff. 3 00.

M D C C X X X V.

Menſe.	Altitudo barometri Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	28. 71	- -	27 47	- -	1. 24
Februario	28 15	- -	26. 92	- -	1. 23
Martio	Deficit				
Aprili	26. 53	- -	25. 58	- -	0. 95
Maio	25. 77	- -	24. 70	- -	1. 07
Iunio	26. 38	- -	25. 77	- -	0. 61
Iulio	25. 98	- -	25. 49	- -	0. 49
Auguſto	Deficit				
Octobri	27 30	- -	26. 01	- -	1. 29
Nouembri	27 37	- -	26. 52	- -	0. 85
Decembri	27. 47	- -	26. 25	- -	1. 22

Maxima 28. 71. Minima 24. 70. Differentia 4. 01.

A. MDCCXXXVI

Altitudo Barometri

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	27. 35	- -	26. 40	- -	0. 95
Februario	27. 45	- -	26. 45	- -	1. 00
Martio	27. 60	- -	27. 00	- -	0. 60
Aprili	26. 96	- -	25. 85	- -	1. 11
Maio	26. 80	- -	26. 10	- -	0. 70
Iunio	27. 06	- -	26. 61	- -	0. 45

Ergo Maxima 27. 60. Minima 25. 85. Differ. 1. 75.

MDCCXXXVII.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Octobri	27. 47	- -	26. 38	- -	1. 09
Nouembri	27. 57	- -	26. 62	- -	0 95
Decembri	27. 70	- -	26. 27	- -	1. 43

Ergo Maxima 27. 70. Minima 26. 27. Differ. 1. 43.

MDCCXXXVIII.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	27. 52	- -	26. 67	- -	0. 85
Februario	27. 50	- -	26. 27	- -	1. 23
Octobri	28. 26	- -	27. 06	- -	1. 20
Nouembri	27. 98	- -	27. 23	- -	0. 75.

Ergo Maxima 17. 98. Minima 26. 27. Differ. 1. 71.

MDCCXXXIX.

M D C C X X X I X.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	28. 30	- -	27. 10	- -	1. 20
Februario	28. 10	- -	27. 23	- -	0. 87
Martio	28. 12	- -	27. 30	- -	0. 82
Iunio	27. 47	- -	27. 44	- -	0. 03
Octobri	28. 33	- -	27. 07	- -	1. 26
Nouembri	28. 35	- -	26. 27	- -	2. 08
Decembri	28. 14	- -	26. 85	- -	1. 29.

Ergo Maxima 28. 35. Minima 26. 27. Differ. 2. 08.

M D C C X L.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	28. 40	- -	27. 08	- -	1. 32
Februario	28. 16	- -	26. 90	- -	1. 26
Martio	28. 45	- -	27. 25	- -	1. 20
Aprili	27. 90	- -	26. 85	- -	1. 05
Maio	27. 75	- -	27. 07	- -	0. 68
Iunio	27. 43	- -	26. 87	- -	0. 56
Iulio	27. 57	- -	26. 95	- -	0. 57
Auguſto	27. 87	- -	27. 08	- -	0. 79
Septembri	27. 57	- -	27. 37	- -	0. 20
Octobri	28. 25	- -	27. 42	- -	0. 83
Nouembri	28 35	- -	26. 82	- -	1. 53
Decembri	28. 48	- -	27. 30	-	1. 18

Ergo Maxima 28. 48. Minima 26. 82. Differ. 1. 66.

MDCCXLI.

Barometri altitudo

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	28. 40	- -	27. 38	- -	1. 02
Februario	28 30	- -	27. 02	- -	1. 28
Martio	28. 28	- -	26. 85	- -	1. 43
Aprili	28. 10	- -	27. 45	- -	0 65

Ergo Maxima 28. 40. Minima 26 85. Differ. 1. 55.

Hiſce altitudinibus maximis et minimis inter ſe collatis, eluceſcit omnium horum annorum fuiſſe maximam 28. 94, et minimam 24. 70, adeoque differentiam maximam 4. 24. Maxima haec altitudo 1734. menſis Nouembris 1mo obſeruata Tomii non attingit maximam Petropolitanam, quae ad annum 1750 vsque fuit 29. 01, ab anno 1750 ad annum 1757, 29. 10; ab anno 1757 autem ad hoc vsque tempus 29. 12. Minima autem altitudo 24. 70 Maii 2do 1735 Kachtae obſeruata, procella ſaeuire incipiente, multo minor eſt minima Petropolitana, quae eſt adhuc 26. 41. Fuit igitur ſpatium variationum ponderis atmoſphaerae per omnes hos annos in Sibiria 4. 24, adeoque maius 1. 53 Petropolitano, quod nunc eſt 2. 71, quum antea ad annum 1750. fuerit 2. 60, et ab hoc anno ad 1757 2. 69. Aliae altitudines inſigniter paruae fuerunt 1734, 25. 94; 1735, 25. 58, 25. 94, 25. 77; 1736, 25. 85 et aliae, vti ex tabellis adparet.

Hactenus de altitudinibus barometricis, ſequitur vt nunc quoque caloris diminutiones maximas et minimas

ſimas, cum differentiis menſtruis et annuis, ſiue ſummos frigoris et caloris gradus, veluti in tabella, ſecundum ordinem temporis repraeſentemus, ſecundum ſcalam thermometricam Delilianam.

A. MDCCXXXIV.

Menſe	Frigus ſummum.			Calor maximus.			Differentia.
Auguſto	143	-	-	94	-	-	49
Septembri	150	-	-	121	-	-	29
Octobri	180	-	-	139	-	-	41
Nouembri	180	-	-	149	-	-	31

Ergo Max. frig. 180 Cal. max. 94. Diff. 86 per hos quat. menſes.

MDCCXXXV.

Frigus.

Menſe.	Maximum.			Minimum.			Differentia.
Ianuario	281	-	-	164	-	-	117
Februario	194	-	-	146	-	-	48
Aprili	158	-	-	120	-	-	38
Maio	142	-	-	122	-	-	20
Iunio	120	-	-	108	-	-	12
Iulio	129	-	-	112½	-	-	16½
Auguſto	deficit.						
Septembri	deficit.						
Octobri	184	-	-	140	-	-	44
Nouembri	185	-	-	150	-	-	35
Decembri	208	-	-	161	-	-	47

Ergo Maximum frigus 281, et cal. maximus. 108. Diff. 173.

A.

A. MDCCXXXVI.

Caloris diminutio.

Menſe.	Maxima.			Minima.			Differentia.
Ianuario	196	-	-	166	-	-	30
Februario	201	-	-	150	-	-	51
Martio	191	-	-	155	-	-	36
Aprili	161	-	-	131	-	-	30
Maio	150	-	-	119	-	-	31
Iunio	140	-	-	113	-	-	27.

Ergo Frigus ſummum 201. Calor maximus 113. Differentia 88.

A. MDCCXXXVII.

Frigus.

Menſe.	Maximum.			Minimum.			Differentia.
Octobri	190	-	-	136	-	-	54
Nouembri	270	-	-	156	-	-	114
Decembri	257	-	-	155	-	-	102

Ergo Frigus max. 270. Minimum 136. Differ. 134.

A. MDCCXXXVIII.

Frigus.

Menſe.	Maximum.			Minimum.			Differentia.
Ianuario	275	-	-	153	-	-	122
Februario	241	-	-	147	-	-	94
Octobri	183	-	-	151	-	-	32
Nouembri	203	-	-	151	-	-	52
Decembri	205	-	-	158	-	-	47

Ergo Summum frigus 275. Minimum 147. Differentia 128.

A.

A. MDCCXXXIX.

Caloris diminutio

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia.
Ianuario	215	- -	168	- -	47
Februario	186	- -	147	- -	39
Martio	170	- -	147	- -	23
Iunio	152$\frac{1}{5}$	- -	131	- -	21$\frac{1}{5}$

Ergo Max. frigus 215. Minimum 131. Differ. maxima 84.

A. MDCCIXL.

Frigus

Menſe.	Maximum.		Minimum.		Differentia.
Octobri	178	- -	137	- -	41
Nouembri	191	- -	146	- -	45
Decembri	191	- -	151	- -	40

Ergo ſummus frig. gradus 191, et infim. 137. Differentia 54.

A. MDCCXLI.

Caloris diminutio

Menſe.	Maxima.		Minima.		Differentia
Ianuario	205	- -	152	- -	53
Februario	188	- -	140	- -	48
Martio	181	- -	150	- -	31
Aprili	155	- -	127	- -	28

Ergo Frig. max. 205. Minimum 127 Variatio thermometrica integra per hos menſes 78.

Quodſi hi frigoris et caloris gradus maximi inter ſe comparentur, patet, omnium horum annorum gradum frigoris ſummum fuiſſe 281, qui Ieniſeae Ianuarii 5to 1735 eſt obſeruatus, et iam publicatus. Nihil inuenire potuimus, quod hanc obſeruationem ſuſpectam reddere potuiſſet, inprimis quum gradus haud multo inferiores ſaepius occurrant, vti 270 a. 1737; 275 a. 1738. Alii inſigniores frigoris gradus in his obſeruationibus ſunt 201. 203. 205. 208. 215. 241. 252. vti ex tabula patet. Huc vsque igitur gradus 281 ſummus eſt, qui vnquam eſt obſeruatus. Maximus caloris gradus eſt 94, notatus 1734 menſe Auguſto vt adeo differentia maxima ſit 187 a ſummo frigore ad ſummum calorem. Summo calore hoc maiores alibi obſeruati gradus ſunt plures e. g. in Sina Pekini 85; Aſtrachani a V. C. Lerchio 93, 1746 Auguſti 6to; 92, 1746 Iulii 19, in ſole erat 58; 91 1746 Iulii 15, in ſole 63; 90, 1746 Iulii 17. In Senegal ab Adanſonio 1753 gradus caloris 75, quin 65½, haud dubie maximus adhuc in vmbra obſeruatus, ſi obſeruatio recte ſe habet, fuiſſe dicitur; alios adhuc in variis terrarum locis obſeruatos inſignes caloris gradus in praeſenti tacemus.

Quum in tabula altitudinum barometricarum et thermometricarum praecipue pro ſcopo hic habuerimus, ſummas et infimas altitudines barometricas obſeruatas, et maximos frigoris et caloris gradus notatos breuiter repraeſentare, vt facile cum aliis comparari poſſint; huic ſcopo non obſtat, quod in diuerſis Sibiriae locis obſeruationes ſint inſtitutae, vt taceamus alios vſus. Multa praeterea conſideratu digna in his obſeruationibus occur-

currunt, vt eſt halonum frequentia, praecipue lunarium, cum paraſelenis et parelis, quae tam frequentes nullibi forſitan, et tam continuae, quam in dictis Sibiriae locis, vnquam ſunt obſeruatae. Porro ſunt alia phaenomena emphatica et meteora rariora e. g. nebula, cuius mentio in obſeruationibus Ieniſeae inſtitutis facta eſt, aurora borealis menſe Auguſto 1741 obſeruata, et alia, quae attentione digniſſima eſſe, nemo non videt, quae vero in praeſenti ſpecialius conſiderare non poſſumus, ſpatii et temporis anguſtia excluſi; vti quoque varia ex his obſeruationibus fluentia conſectaria ſpecialia praeterire ideo cogimur, quae non ſolum Meteorologiae, ſed etiam Geographiae inſeruire poſſunt, quum conſtet, ex altitudinibus barometricis locorum, vbi notatae ſunt, altitudinem ſoli ſupra mare quodammodo inueniri poſſe. Nam quo altiora ſunt loca, eo minores altitudines barometricae mediae eſſe ſolent et debent; contra eo maiores, quo loca ſunt inferiora.

Haec locorum et terrarum diuerſa altitudo ſuper ſuperficiem maris non poteſt non magnum habere influxum in temperaturam coeli locorum et fertilitatem, et efficere, vt alia plane ſit coeli temperies, quam eleuatio poli et loci latitudo requirere videtur. Hinc ſaepius loca eandem latitudinem habentia diuerſiſſimam coeli temperaturam experiri non ſolum poſſunt, et ſolent, ob diuerſam ſupra aequor altitudinem; ſed etiam loca, multo minore latitudine gaudentia, multo frigidiora eſſe poſſunt et ſolent, quam alia ſub maiore eleuatione poli ſita, ſi ſunt editiora ſupra

mare, et contra ea, ſi ſint minus elata, multo calidiora, quamuis eorum latitudo ſit maior. Exempla luculenta in diuerſis Sibiriae locis occurrunt, vbi inſigne frigus regnare ſolet, ita vt terrae ad exiguam tantum profunditatem tempore aeſtiuo regelentur, et corpora ſepulta putreſcere non ſoleant, quum e contrario alia loca, ſub eadem quin maiore poli altitudine ſita, ſatis ſint temperata et fertilia, minus ſupra mare edita.

Quum praeterea conſtet loca orientaliora dici frigidiora minus orientalibus, experientia quoque ſaepius confirmante: intelligitur pendere hoc frigus ſaepius poſſe a maiore locorum altitudine ſupra ſuperficiem maris, quamuis et aliae cauſae potiſſimum a natura ſoli pendentes concurrere queant. Sed de his et aliis huc pertinentibus conſiderationibus alias.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

INVESTIGATIO PARALLAXEOS LVNAE OBSERVATIONIBVS ALIQVOT ANNO 1752. PETROPOLI ET IN PROMONTORIO BONAE SPEI EX COMPACTO HABITIS INNIXA.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

Inter obſeruationes Lunares Anno 1752 in obſeruatorio Imperiali Petropolitano peractas tres tantum occurrunt reſpondentes iis, quarum in Promontorio Bonae ſpei inſtituendarum coelum Cel. Abbati de la Caille, Academiae Regiae Scientiarum Pariſinae membro, copiam fecit; nimirum obſeruationes d. $\frac{18}{29}$ Ianuarii, $\frac{19}{30}$ Ianuarii et $\frac{12}{23}$ Februarii habitae, quarum inſuper media non omnibus ex numeris eſt perfecta, quippe quae obſeruatione ſtellarum fixarum, quarum in Parallelo Luna tunc verſabatur, careat. Binae autem reliquae ſatis ſunt completae, vt ex iis vel ipſa differentia Meridianorum Petropolitani obſeruatorii et Speculae aſtronomicae, quam in Promontorio Bonae ſpei erigi curauit Cel. de la Caille, colligi queat. Principem autem locum inter binas haſce obſeruationes tenet ea, quae d. $\frac{12}{23}$ Februarii habita eſt; Luna tunc temporis Perigaea in limitibus maxi-

maximae declinationis borealis et prope fixam ζ ♉ haerente.

Coeli autem. ſerenitatem in his obſeruationibus ſi ſpectas, prima obſeruatio inſtituta eſt Luna Petropoli tremula, in Promontorio vndoſa; in ſecunda obſeruatione correſpondenti Luna in Promontorio Bonae ſpei parum videbatur vndoſa, et Petropoli minus tremula, quam in obſeruatione praecedenti, quamuis non omni trepidatione deſtituta, vt fere fit in noſtra regione, menſe praecipue et Decembri et Ianuario. Tertia denique obſeruatio d. $\frac{12}{23}$ Februarii appropinquante vere absque vlla agitatione limborum Lunae Petropoli peracta, in Promontorio Bonae ſpei e contrario ſenſibili motu Lunae vndoſo comitata fuit.

Ab hiſce autem circumſtantiis abſtrahens, ad differentiam Meridianorum Petropolitani obſeruatorii et Promontorii Bonae ſpei definiendam, primo me conferam, eamque ex comparatione differentiae Aſcenſionum rectarum Lunae et fixarum Parallelo Lunae proximarum Petropoli obſeruatae, cum illa, quae ex obſeruationibus in Promontorio habitis fluit, deriuare atque ſtabilire conabor. Eiusmodi enim comparatio inter obſeruationes et d. $\frac{18}{29}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. in vtraque ſpecula aſtronomica factas, modo ſequenti inſtituta, Meridianorum diſtantiam, de qua agitur, accurate ſatis, vt opinor, pro noſtro ſcopo declarabit.

Obſer-

Obſeruationes autem ipſae huc ſpectantes, in Promontorio Bonae ſpei et in obſeruatorio Imperiali Petropolitano habitae, in ſequentibus Tabulis exhibentur.

OBSERVATIONES IN PROMONTORIO BONAE SPEI INSTITVTAE.

Temp. ver. App. ad fil. ver. Tubi ſextantis. H. M. S.	MDCCLII. d. $\frac{18}{29}$ Ianuarii.	Diſt. a Zenith Parallaxi et Refract. affecta. G. M. S.
7.34.38	α ♉ - - - - - - -	49.53.15.6
11. 4.12½	Limbus praecedens ☽ae. Limbus borealis. Limbis Lunae vndoſis.	51.37.18.8
	d. $\frac{19}{30}$ Ianuarii.	
7. 7.29	δ ♉ - - - - - - -	50.50.17.8
11.53. 0	circiter α ♋ - - - - - - - -	46.42. 2.9
12. 0 27½	Limbi Lunae. Limbus borealis - -	
12. 2.47½		47.26.48 9

Vento impediente, horologium tempore tranſitus α ♋ non audiebatur. Luna quidem parum videbatur vndoſa; ſatius autem fuiſſet limbum eius auſtralem obſeruare.

	d. $\frac{12}{23}$ Februarii.	
6.53.43	Limbus Lunae praecedens. Limbus auſtralis	55.20.31.0*
6.56.55	ζ ♉ - - - - - - -	54.51.41.3
8.23.19½	ζ - - - - - - - -	54.48.14.2
	Limbis Lunae vndantibus	

* Loco 55°. 20'. 31''. 0, me iudice, legendum eſt 55°. 40'. 31''0.

OBSERVATIONES IN OBSERVATORIO IMPER. PETROPOLITANO HABITAE.

Dies obſeruat.	Temp. ver.	Obſeruat. et circumſtant.
MDCCLII.		
d. $\frac{18}{29}$ Ian. veſp.	$7^h . 34' . 37''$.	Culminatio α ♉ quam proxime.
	35. 9. 1	$6^h . 22' . 59'' \frac{3}{4}$. t. Pend. Appulſ. α ♉ ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
		Altitudo α ♉ tunc erat $= 46°. 10' - \frac{1}{2}$ fil. $- 2^R. 75^{P.} \frac{3}{4}$. micrometri.
		Altitudo itaque Meridiana apparens α ♉ $= 46°. 3'. 28''$.
	11. 2. 44. 8.	$9^h . 50' . 29''$. t. Pend. App. 1^{mi} limbi ☽ae ad. fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
	3. 24.	Culminatio Centri ☽ae circiter.
	3. 57.	Altit. marg. ☽ae bor $= 46°. 10' - \frac{1}{2}$ fil. $+ 8^R. 8^{P.} \frac{3}{4}$ micr.

Dies

Dies obſeruat.	Temp. ver.	Obſeruat. et circumſtant.
MDCCLII.		
		Altit. igitur Merid. appar. marg. ☽ae bor. = 46°. 26′. 20″. 5 aere particulis glacialibus repleto, Luna tremula.
		$23^h. 55'. 9''$. Pend = 360°.
d. $\frac{19}{30}$ Ian. veſp.	$11^b. 58'. 58''. 8$	$10^b. 45'. 56''$ t. Pend. App Imi. limbi ☽ae ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
	59. 36.	Culminatio Centri ☽ae circiter.
	12. 0. 13.	Altit. marg. ☽ae bor. = 42°. 10′ + $\frac{3}{4}$ fil. + 4R. 9P $\frac{1}{4}$ micr.
	1. 18. 4	$10^b. 48. 15\frac{1}{2}$ t. Pend. App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.

 Dies

Dies obſeruat.	Temp. ver.	Obſeruat. et circumſtant.
MDCCLII.		
d. $\frac{19}{30}$ Ian. veſp.		Altit. itaque Merid. appar. marg. ☽ae bor. = 42°. 18′. 6″. 1.
		Diameter ☽ae horizontalis ad tempus culminationis ☽ae ex mora tranſitus diſci lunaris per filum verticale quadrantis deducta = 32′. 52″$\frac{1}{2}$.
		Luna ob coelum vaporoſum tremula.
		Stellas Parallelo ☽ae proximas, nubibus impeditus obſeruare non potui.
		23^h. 55′. 9″ Pend. = 360°.
d. $\frac{12}{23}$ Febr. veſp.	6^h. 18′. 0″.	Diameter ☽ae appar. per tubum 8 ped micr. Angl munitum = 36^R. 8^P. = 33′. 8″. 8.

Dies

Dies obſeruat.	Temp. ver.	Obſeruat. et circumſtant.
MDCCLII.		
d. $\frac{12}{23}$ Febr. veſp.	6. 52. 12. 3	$5^h.14'.1''$ Pend. App. 1^{mi} limbi ☽ae ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
	52. 23.	Altit. marginis ☽ae bor. $= 50°.50' + 4^{R.} 15^{P.} \frac{1}{4}$.
	53. 11.	Culminatio Centri ☽ae quam proxime.
	53. 26.	Tranſitus Centri ☽ae per fil. vert. quadrantis, circiter.
		Altit. itaque Merid. appar. marg. ☽ae bor. $= 50°.58'.2''.6$.
	6. 57. 12.	Culminatio ζ♉ circiter.
	57. 27. 5	$5^h.19'.16''$. t. Pend. App. ζ♉ ad fil. vert. quadr. Merid. quam proximum.
		Altit. ζ♉ tunc erat $= 50°.50'. + 6^{R.} 13^{P.} \frac{3}{4}$.
		Hinc. Altid. Merid. appar. ζ♉ $= 51°.2'.14''.1$.
		Coelo eximie ſereno
		$23^h.55'.7''\frac{2}{3}$ Pend. $= 360°$.

 Cum

Cum ad calculos vtriusque incogniti, Meridianorum nempe differentiae et Parallaxis Lunae horizontalis, inſtituendos, data nonnulla elementa a Tabulis aſtronomicis neceſſario ſint mutuanda, ex Tabulis Halleianis ad dies tempusque obſeruationum iam memoratarum ſequentes accuratiſſime ſupputaui poſitiones Lunae, poſita differentia Meridianorum inter Grenouicenſe obſeruatorium et Petropolitanum $= 2^h. 1'. 10''$.

1752. D. $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h\ 3'. 0''$ t. v. ſub *Merid.* Petropolitano Longitudo Centri Lunae vera $= 3^s. 26°. 34'. 41''. 3$, eiusdemque latitudo vera $= 4°. 9'. 18''$, Auſtr. hinc, poſita obliquitate Ecclipticae $= 23°. 28'. 30''$, pro eodem temporis momento Aſcenſio recta Lunae vera $= 117°. 46'. 55''. 9$ et Declinatio Lunae vera $= 16°. 47'. 22''. 7$ bor. Eadem ratione inveni ad $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h. 53'. 0''$, t. v. Petrop. Longitud. Lunae veram $= 3^s. 27°. 4'. 22''. 1$; Latitudinem veram $= 4°. 10'. 46''$. Auſt. Aſcenſionem rectam veram $= 118°. 17'. 0''. 3$ et Declinationem veram $= 16°. 40'. 23''$. Bor. ita vt motus Lunae verus pro 50 min. pr. temp. in Aſcenſionem rectam ſit $= 30'. 4''. 4$, ſecundum Declinationem autem $= 6'. 59''. 7$. Parallaxis Lunae horizontalis denique, quae ex iisdem Tabulis pro hoc tempore prodit, aequatur $59'. 48''$, et diameter Lunae horiozontalis $32'. 53''\frac{1}{2}$.

1752. D. $\frac{19}{30}$ Ian. 12^h.0′.0″ t. v. ſub Merid. Petropol. Longitudo Centri Lunae vera = 4^s. 11°.49′.8″.6; Latitudo vera = 4° 45′.9″.4. Auſtr. Aſcenſio recta vera = 132°. 56′. 1″. 9 et Declinatio vera = 12°. 42′. 1″.7 Bor. Simili modo prodibit ad 12^h. 50′.0″ t. v. Petrop. Longitudo Lunae vera = 4^s. 12°. 19′. 27″; Latitudo vera = 4°. 46′. 0″. 4 Auſtr. Aſcenſio recta vera = 133°. 25′. 33″. 8 et Declinatio vera = 12°. 32′ 57″. Bor. Praeterea Parallaxis Lunae horizontalis ad tempus obſeruationum lunarium = 59′. 20″$\frac{1}{2}$ et diameter Lunae horizontalis = 32′. 38″$\frac{1}{4}$.

1752. D. $\frac{11}{22}$ Febr. 6^h. 52′.0″ t. v. Petrop. Longitudo Lunae vera = 2^s. 20°. 21′. 53″. 4; Latitudo vera = 1° 53′. 4″. 4, Auſtr. Aſcenſio recta vera = 79°. 39′. 37″. 8 et Declinatio vera = 21°. 14′. 41″ 2. Bor. Itemque 7^h.42′.0″.t.v. Petrop. Longitudo Lunae vera = 2^s.20° 51′.25″8; Latitudo vera = 1°. 55′. 28″. 8. Auſtr. Aſcenſio recta vera = 80°. 11′. 24″. 5 et Declinatio vera = 21°. 14′ 20″. 7 Bor. Parallaxis autem Lunae horizontalis = 58′. 54″$\frac{1}{2}$ et diameter eius horizontalis 32′. 24″.

Hiſce ſtabilitis, computatio differentiae Meridianorum Petropolin inter et Promontorium Bonae ſpei ſic erit adornanda:

Petro-

Petropoli.

D $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h.2'.44''8$ t. v. vel $9^h.50'.29''$ t	Pend. App. 1^{mi} limbi ☽ae ad filum vert. Quadrantis Meridiano quam proximum.
7. 35. 9. 1 t. v. vel 6. 22. $59\frac{3}{4}$ t.	Pend App. α ♉ ad idem filum
$3^h.27'.35''.7$ t. v. vel $3^h.27'.29''\frac{1}{4}$ t.	Pend. = different. inter tranſitum α♉ et 1^{mi} limbi ☽ae.

Cum vero $23^h.55'.53''.7$ temp. veri, vel $23^h.55'.9''$ temp. Pend. reſpondeant 360°, prodibit differentia Aſcenſionum rectarum α ♉ et 1^{mi} limbi ☽ae d. $\frac{18}{29}$ Ian. $11^h.2'.45''$ t. vero Petrop. $= 52°.2'.50''$. Ob declinationem autem fili verticalis quadrantis a Meridiano occidentem verſus addatur $0''.7$, et propter Parallaxin Lunae in Aſcenſionem rectam $4''.4$, ita vt vera differentia Aſcenſionum rectarum α♉ et 1^{mi} limbi Lunae ſit $11^h.2'45''$ t. v. Petrop. $= 52°.2'.55''.1$.

Simili

Simili modo in Promontorio Bonae ſpei.

D. $\frac{19}{30}$ Ian. $11^h. 4'. 12''\frac{1}{2}$ t. v. App. 1^{mi} limbi Lunae ad filum verticale Sextantis Meridiano quam proximum.

$7. 34. 38.$ t. v. App. α♉ ad idem filum

$3^h. 29'. 34''\frac{1}{2}$ t. v. = differ. inter tranſitum α♉ et 1^{mi} limbi Lunae, quae in partes Aequatoris conuerſa dat differentiam Aſcenſionum rectarum α♉ et 1^{mi} limbi Lunae $11^h. 4'. 12''\frac{1}{2}$ t. v. in Promontorio Bonae ſpei $= 52°. 32'. 36''$, vel $29'. 41''$ maiorem ea, quae obſeruata fuit Petropoli $11^h. 2'. 45''$ t. v. Quia vero motus Lunae verus in Aſcenſionem rectam pro 50 min. prim. temp. ſupra inuentus eſt $= 30'. 4''. 4$, patet iſta $29'. 41''$ reſpondere $49'. 21''. 1$ temp. Vnde ſequitur, Aſcenſionem rectam Lunae veram in Promontorio Bonae ſpei $10^h. 14'. 51''$ t. v. eandem fuiſſe quae Petropoli obſeruata eſt $11^h. 2'. 45''$ t. v. ita vt differentia Meridianorum obſeruatorii Petropolitani et Promontorii Bonae ſpei ex his obſeruationibus collecta, ſit $= 0^h. 47'. 54''$. quibus obſeruatorium Petropol. orientalius eſt, quam Specula aſtronomica Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei.

Huius inuentae Meridianorum differentiae magis adhuc conſtabiliendae gratia, conſimili ſupputandi ratione, ex obſeruationibus Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 habitis, differentiam Aſcenſionum rectarum Lunae et fixae ζ♉ ad momenta obſeruationum in ephemeridibus notata eruere atque concinnare

 iuuabit.

iuuabit. Habebimus itaque ſecundum obſeruationum ephemeridem in obſeruatorio Petropol. conditam.

1752. D. $\frac{12}{23}$ Febr $6^b.57'.27''.5$ t. v. ſiue $5^b.19'.16''$ t. Pend. App. ζ♉ ad fil. vert. quadr. Mer. quam proximum.

6. 52. 12. 3 t. v. ſiue 5. 14. 1 t. Pend. App. 1^{mi} limbi ☽ae ad idem filum.

hinc $0^b.5'.15''.2$ t. v. ſiue $0^b.5'.15''$ t. Pend. = differentiae. Aſcenſionum rectarum ζ♉ et 1^{mi} limbi Lunae $6^b.52'.12''.3$. t. v. Petropoli.

Et quia $23^b.56'.13''.6$ t. veri vel $23^b.55'.7''\frac{1}{3}$ t. Pend. aequantur 360° Aequat. erit differentia Aſcenſionum rectarum ζ♉ et 1^{mi} limbi Lunae d. $\frac{12}{23}$ Febr. $6^b.52'.12''.3$ temp. v. Petrop. = $1°.19'.1''$. Ob aberrationem fili verticalis quadrantis a Meridiano occaſum verſus pro differentia altitudinum ſtellae et Centri Lunae addendum eſt $1''.2$, propter Parallaxin autem Lunae in Aſcenſionem rectam tempore tranſitus ipſius per filum verticale quadrantis $2''.2$ ſunt ſubtrahenda, ita vt vera differentia Aſcenſionum rectarum 1^{mi} limbi Lunae et ζ♉ hora ſupra notata ſit = $1°.19'.0''$.

In Promontorio Bonae Spei.

D. $\frac{12}{23}$ Febr. $6^b.56'.55''$ t. v. App. ζ♉ ad filum verticale Sextantis Merid. quam proximum.

6. 53. 43 App. 1^{mi} limbi Lunae ad idem filum

adeoque $0^b.3'.12''$. = different. temp. inter tranſitum

ſitum ζ♉ et 1^{mi} limbi ☽ae., quae ad partes Aequatoris pro ratione $23^h.56'.13''.6$ ad $260°$ reducta, abit in $0°.48'.7''.6$ = verae differentiae Aſcenſionum rectarum 1^{mi} limbi Lunae et ζ♉ in Promontorio Bonae ſpei $6^h.53'.43''$. t. vero. Differentia haec Aſcenſionum rectarum $30'.52''.4$, minor eſt ea, quae Petropoli obſeruata fuit eodem die $6^h.52'.12''.3$; motus autem Lunae verus in Aſcenſionem rectam ex tabulis Halleianis depromtus tunc temporis 50 min. prim. temp. reſpondens aequatur $31'.46''.7$. Ex quo colligitur, differentiam illam Aſcenſionum rectarum Lunae $30'.52''.4$ aequare $0^h.48'.34''.6$, quibus tempori obſeruationis lunaris in Promontorio ſubductis, reſiduum $6^h.5'.8''.4$, reſpondebit $6^h.52'.12''.3$, ſub Merid. Petropolitano, ita vt differentia horum Meridianorum ſecundum obſeruationes d. $\frac{12}{23}$ Febr. ſit $= 0^h.47'.4''$.

Haec Meridianorum differentia, ſi comparetur cum ea, quae ex obſeruationibus d. $\frac{18}{29}$ Ian. habitis fluit, diſcrimen quidem occurrit inſigne, 50 nimirum minut. ſecund. temp. minus autem ſingulare, ſi animaduerteris errorem vnius minuti ſecundi temporis in obſeruationibus admiſſum differentiae Meridianorum methodo hac concluſae afferre errorem trigeſies circiter maiorem, ſiue 30 minut. ſec. temporis. Caeterum autem, vt certi aliquid circa horum Meridianorum differentiam ſtatuere poſſimus, facile intelligitur, obſeruationem d. $\frac{12}{29}$ Febr. inſtitutam, varias ob rationes haud abſtruſas, ad praeſentem quidem vſum, altera d. $\frac{18}{29}$ Ian. peracta, eſſe praeſtabiliorem, praecipue cum interuallum temporis inter tranſitum Lunae et ſtellae in obſeruatione d. $\frac{12}{23}$ Febr.

 quadra-

quadrageſies circiter minus ſit, quam in obſeruatione praecedenti. Hiſce rationum momentis inductus, in vſum ſequentis calculi ad Parallaxin Lunae definiendam inſtituendi, differentiam Meridianorum Petropolitani obſeruatorii et Promontorii Bonae ſpei, ſtatuam $= 0^h.47'.10''$.

Ad Parallaxin iam lunarem ex obſeruationibus ab Illuſtriſſ. Academia Scientiarum Pariſina propoſitis, exactiſſime hauriendam aggreſſuris, Meridiani terreſtris figura cum nobis ſit conſideranda, neceſſe erit primum, ea calculo definiamus elementa, quorum beneficio, pro vtroque obſeruationum loco, Parallaxin Lunae horizontalem, obſeruatis Lunae a ſtellis proximis diſtantiis, conſentaneam, aſſignare valemus. Requiritur autem ad hocce negotium et radiorum terreſtrium bina obſeruationum loca, cum centro Telluris iungentium magnitudo, ſiue potius ratio, et anguli, quem conſtituit in ſingulis locis verticalis linea cum radio terreſtri competenti menſura. Haec vero pro varia Meridiani terreſtris curuatura adeo ab inuicem diſcrepare debent, vt qualis quantusque ſit effectus exinde ad Parallaxin Lunae redundans, curioſe non inueſtigaſſe nefas foret. Duplici itaque modo in ſequentibus figuram Meridiani terteſtris conſiderare, atque elementa ſupra memorata definire ſtatuimus; primo Telluri tribuendo figuram Sphaeroidis elliptici, in quo gradus Meridiani ab Aequatore Polos verſus in ratione quam proxime duplicata ſinuum latitudinum accreſcunt, cuiusque natura e binorum Meridiani graduum menſura innoteſcit: deinde autem eam admittendo figuram, quam Cel. Bouguerus, Academiae Reg. Scient. Pariſinae membrum, per quatuor graduum terreſtrium menſuram Telluri conciliauit, in qua incrementa graduum

duum Meridiani ab Aequatore ſequutus rationem biquadratorum ſinuum latitudinum

Referat in hypotheſi Terrae Sphaeroïdicae ellipſis ADB Meridianum terreſtrem per locum R in ſuperficie Telluris poſitum tranſeuntem, Agatur normalis RP. in tangentem ERp loci R ad diametrum Aequatoris in P terminata, itemque perpendicularis Rr in diametrum Aequatoris. Data nunc ratione radii Aequatoris AC ad ſemiaxem DC, vna cum eleuatione Poli loci propoſiti, quaeritur loci huius diſtantia a Centro Terrae RC, et angulus PRC, quem format verticalis linea RP cum radio terreſtri RC? Tab. XIV. Fig. 1.

Vocemus rationem radii Aequatoris AC ad ſemiaxem CD $a : b$, eleuationem Poli loci R, ſiue angulum RPA l, angulum RCA v, angulum PRC π, et radium RCr, eritque ex natura ellipſeos ſubnormalis Pr $= \frac{b^2}{a^2}.Cr$ et Rr $=$ Pr. tang. $l = \frac{b^2}{a^2}.Cr$. tang l. Cum vero $\frac{Rr}{Cr} =$ tang. v, habebimus tang. $v = \frac{b^2.\,Cr.\,tang.\,l}{a^2.\,Cr}$ $= \frac{b^2}{a^2}$ tang. l. Dato autem angulo v, erit angulus quaeſitus $\pi = l - v$, vel tang. $\pi = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}{\frac{a^2}{tang.\,l} + b^2\, tang.\, l}$; hinc ſub latitudine, cuius tangens $= \frac{a}{b}$, angulus π erit maximus, eiusque tangens $= \frac{a^2 - b^2}{2ab} = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}.)$

Ducatur porro ex Centro terrae C ipſi RP parallela Cp in tangentem loci R perpendicularis, quo facto erit in triangulo RCp. $1 : r =$ ſin. CRp $=$ coſ. π : Cp, ſiue Cp $= r$. coſ. π; itemque in triangulo PRC ſin. $l : r$ $=$ ſin. v : RP, vel RP $= \frac{r.\,ſin.\,v}{ſin.\,l}$, adeoque RP $\times$ Cp $= \frac{r^2.\,ſin.\,v.\,coſ.\,\pi}{ſin.\,l}$. Quia vero in ellipſi RP $\times$ Cp $=$ CD^2 $= b^2$,

 pro-

prodibit radius Terrae ad locum R ductus, ſiue $r = b\sqrt{\frac{ſin.\,l}{ſin.\,v \cdot coſ.\,\pi}}$.

Inuentis itaque formulis, commode ſat et angulum π et radium terreſtrem r exhibentibus, vtrumque iam quaeſitum pro quauis differentia axium Terrae Sphaeroidicae data, ad quamlibet latitudinem definire valemus. Si ponatur ex gr. differentia axium $= \frac{1}{217}$, vt fere fluit ex calculo Cel. de la Condamine, Acad. Reg. Scient. Pariſinae membri, comparatione inter primum et $66\frac{1}{3}$ latitud. bor. gradum inſtituta, et quaeratur anguli, quem conſtituit cum radio terreſtri verticalis linea, et radii ipſius menſura ad eleuationem Poli obſeruatorii Petropolitani, (quam interea ponimus $= 59°.56'\frac{2}{3}$) habebitur, poſito $a = 1$, $b = 0.9953488 4$, et $l = 59°, 56'.40''$, adeoque

$$
\begin{aligned}
lb &= 9.9979753 \\
lb^2 &= 9.9959506 \\
la^2 &= 0.0000000 \\
\hline
l\tfrac{b^2}{a^2} &= 9.9959506 \\
l\,\text{tang.}\,l &= 10.2375887 \\
\hline
l\tfrac{b^2}{a^2}.\,\text{tang.}\,l = l\,\text{tang.}\,v &= 10.2335393, \text{ hinc} \\
\text{angulus } v &= 59°.42'.44''.\tfrac{2}{3} \\
\text{angulus } l &= 59.\ 56.\ 40 \text{ idcirco} \\
\hline
\end{aligned}
$$

angulus, quem format Petropoli verticalis linea cum radio terreſtri, ſiue $\pi = 0°, 13'.55''\frac{1}{3}$.

Cogni-

Cognitis iam angulis *v* et *π*, calculus radii terreſtris pro Parallelo Petropolitani obſeruatorii ſic concinnari poteſt:

$$
\begin{aligned}
l.\ \text{ſin.}\ v &= 9.9362644\\
l.\ \text{coſ.}\ \pi &= 9.9999964\\
\hline
l.\ \text{ſin.}\ v.\ \text{coſ.}\ \pi &= 9.9362608\\
l.\ \text{ſin.}\ l &= 9.9372872\\
\hline
l.\ \frac{\text{ſin.}\ l}{\text{ſin.}\ v.\ \text{coſ.}\ \pi} &= 0.0010264\\
l.\ \sqrt{\frac{\text{ſin.}\ l}{\text{ſin.}\ v\ \text{coſ.}\ \pi}} &= 0.0005132\\
lb &= 9.9979753\\
\hline
lr &= 9.9984885,\ \text{ſiue}\\
r &= 0.99652568.
\end{aligned}
$$

Conſimili prorſus calculo colligitur, pro latitudine obſeruatorii Cel. de la Caille, in Promontorio Bonae ſpei 33°.55′.12″, angulus, quem format verticalis linea cum radio ad Centrum Terrae ducto $= 14'.49''$, et radius ipſe $= 0.99856302$. Definitis igitur hisce elementis pro Terra ellipſoidali, ad alteram iam accedemus hypotheſin a Cel. Bouguero excogitatam, vt ſecundum hanc quoque innoteſcat valor anguli *π* et radii *r*, pro vtriusque obſeruatorii latitudine.

Methodus ſupputandi diſtantiam loci cuiuscunque in ſuperficie Terrae dati a Centro Telluris, itemque angulum, quem format radius centrum Terrae et locum propoſitum iungens cum verticali linea eiusdem loci, ſecundum theoriam Cel. Bougueri eiusdemque hypotheſin, quod incrementa graduum Meridiani ab Aequatore

verſus

verſus polos biquadratis ſinuum latitudinum ſint propor-tionalia.

Tab. XIV. Fig. 2. Sit AKB Meridianus terreſtris, AC ſemi diameter Aequatoris, CB ſemi-axis Terrae, DGE Grauicentrica, vt ab Auctore vocatur, KGZ tangens Grauicentricae, ſiue verticalis linea loci K. Vocetur arcus Grauicentricae DG u, ſinus totus a, ſinus latitudinis loci K, ſiue coſinus anguli KZCS; eritque ſecundum hypotheſin Cel. Bougueri $u = \frac{s^4}{a^3}$, arcus totalis Grauicentricae $ED = a$, $EC = \frac{4}{5}a$, $DC = \frac{8}{15}a$, tang. $GZ = \frac{8a^4 + 4a^2s^2 - 12s^4}{15a^3}$ (*) $= \frac{8}{15}a$

(*) Circa aequationem pro tangente GZ obſeruandum eſt, eam, quam hic exhibuimus, non omnino congruere cum formula in libro Cel. Bougueri p. 289 notata. In formula enim Cel. Bougueri occurrit terminus $\frac{4as^2}{15a^3}$, in noſtra autem $\frac{4a^2s^2}{15a^3}$. Praeterea vero Cel. Bouguerus pergendo concludit, tangentes, vt GZ, eſſe aequales $\frac{8}{15}$ curuae integrae EGD $- \frac{5}{4}$ arcus DG $+ \frac{4s^2}{15.a^2}$, adeo vt praeter errorem in termino $\frac{4s^2}{15.a}$ alius adhuc obuius ſit, nimirum $\frac{5}{4}$ arcus DG loco $\frac{4}{5}$ arcus DG, qui quidem ex formula generali corrigi poſſet; quia vero eadem menda pag. 313 et 314 eſt repetita, difficile eſt iudicatu, vtrum ipſa formula generalis pro tangente GZ, an vero concluſio ex illa deducta, ſit erronea. Quamobrem operae pretium erit, vt tangens GZ ex aequatione generali Grauicentricae definiatur.

Hunc

$=\frac{8}{15}a+\frac{4s^2}{15a}-\frac{4s^4}{5a^3}=\frac{8}{15}a+\frac{4s^2}{15a}-\frac{4}{5}u$, et tang. GW $=\frac{4s^4}{5a^3}=\frac{4}{5}u$, adeoque $ZW=\frac{8}{15}a+\frac{4s^2}{15a}=DC+\frac{4s^2}{15a}$.

Cum porro radii, vt AD, KG etc. ipſis graduum Meridiani amplitudinibus ſint proportionales, et vice verſa, radios iam dictos ipſis graduum Meridiani menſuris exprimere licet. Sic primi gradus latitudinis radius AD erit $=56753$ hexaped. Gall. arcus Grauicentr. totalis ED, ſiue exceſſus 90^{mi} gradus latitudinis ſupra primum $=959$ hexaped. hinc $EC=767\frac{1}{5}$ hexap. et DC

Hunc in finem producatur ordinata HG ad F, ducaturque ipſi infinite propinqua bg. Vocetur abſciſſa HDx, ordinata HGy, arcus DGu; eritque, demiſſa perpendiculari GI in bg, $GI=dx$, $Ig=dy$, $gG=du$, et $GF=\frac{8}{15}a-y$; adeoque in triangulis IGg et GZI ſimilibus $dy:du=\frac{8}{15}a-y:GZ$ ſiue $GZ=\frac{du}{dy}(\frac{8}{15}a-y$. Eſt autem in Grauicentrica

$x=\frac{4s^5}{5a^4}$, $y=\frac{8}{15}a-(\frac{8}{15a^2}+\frac{4s^2}{5a^4})(a^2-s^2)^{\frac{3}{2}}$, et $u=\frac{s^4}{a^3}$, ideoque $du=\frac{4s^3ds}{a^3}$, et $dy=(\frac{8s}{5a^2}+\frac{12s^3}{5a^4})(a^2-s^2)^{\frac{1}{2}}ds$ $-\frac{8s}{5a^4}(a^2-s^2)^{\frac{3}{2}}ds=(\frac{8s}{5a^2}+\frac{12s^3}{5a^4}-\frac{8s}{5a^4}(a^2-s^2))(a^2-s^2)^{\frac{1}{2}}$ $ds=\frac{4.s^3ds}{a^4}\sqrt{(a^2-s^2)}$; hinc $\frac{du}{dy}(\frac{8}{15}a-y)$ ſiue GZ

$$=\frac{al(\frac{8}{15aa}+\frac{4ss}{5a^4})(aa-ss)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(aa-ss)}}=a(\frac{8}{15a^2}+\frac{4s^2}{5a^4})(a^2-s^2)$$

$=\frac{8}{15}a+\frac{4s^2}{15a}-\frac{4s^4}{5a^3}=\frac{8a^4+4a^2s^2-12s^4}{15a^3}$. Vnde aperta ſiunt, quae ſupra obiter monenda duximus.

$DC = 511\frac{7}{15}$ hexap. Poſito igitur ſinu toto *a*, ſiue arcu $ED = 1$, erit $AD = 59.179351$, vel $lAD = 1.7721702$. Radio GK in eisdem partibus expreſſo addenda eſt tangentis pars GZ, vt habeatur KZ. Dato nunc in triangulo ZWC angulo CZW altitud. Aequatoris in loco K, vna cum hypothenuſa ZW, determinabitur ZC, qua cognita, dantur in triangulo KZC duo latera ZK et ZC, vna cum angulo intercepto KZC, ex quibus facile fluit et angulus ZKC, quem conſtituit verticalis linea ZK cum radio KC, et diſtantia loci K a centro Telluris KC, quae vt in hexaped. Gall. exhibeatur, ſequenti analogia vtendum eſt:

$AD + DC : 3281013 = KC$ ad numerum hexapedarum quaeſitum. Quia vero, poſito $a = 1$, $AD = 59.179351$ et $DC = 0.5333333$, erit $AD + DC = 59.7126845$ hinc ad logar. KC addatur logar. conſtans 4.7399413, ſumma erit logarithmus, cuius numerus diſtantiam loci propoſiti a Centro Telluris KC in hexapedis Gall. expreſſum indicabit.

Quaeritur ex. c. pro noſtro ſcopo angulus, quem format verticalis linea KG cum radio KC ſub latitudine Petropol. obſeruat. $59°.56'\frac{2}{3}$, nec non longitudo radii iam dicti KC.

Hae-

Habebimus itaque, poſito $a = 1$,

$ls = 9.9372872$, hinc

$ls^2 = 9.8745744$

$l\frac{4}{15a} = 9.4259687$

$l\frac{4s^2}{15a} = 9.3005431$, vel

$\frac{4s^2}{15a} = 0.1997759$

$DC = \frac{8a}{15} = 0.5333333$

$\frac{8a}{15} + \frac{4s^2}{15a} = 0.7331092 = ZW$

Porro $ls^4 = 9.7491488$, vel

$\frac{s^4}{a^3} = u = DG = 0.5912403$, et

$\frac{4s^4}{5a^3} = \frac{4}{5}DG = 0.4489922$

Quia vero $GZ = ZW - GW = ZW - \frac{4}{5}DG$,

erit $GZ = 0.2841170$

In praeſenti hypotheſi incrementa graduum Meridiani ab Aequatore proportionalia ſunt biquadratis ſinuum latitudinum. Quocirca, cum exceſſus vltimi gradus latitudinis ſupra primum aequatur 959 hexaped.

ad logarithmum s^4 - - - - = 9.7491488

addendus eſt logarith. 959 hexaped. = 2.9818186, vt

prodeat log. exceſſus 59°. $56\frac{2}{3}$ - - -

gradus latitudinis ſupra primum = 2.7309674, ſiue

exceſſus ipſe - - - = 538.23 hexap. cui addatur

1^{mi} gradus latit. menſura = 56753 00 hexap. eritque

longitudo gradus Meridiani

ſub Parallelo Petropol. = 57291,23 hexap. Qua inventa, radius huius gradus KG per ſequentem analogiam innoteſcet:

56753 hexap: AD = 57291.23 hexap: KG, ſiue:
56753 : 59.179351 = 57291.23 : KG, adeoque

KG = 59.740589
addatur GZ = 0.284117 vt

prodeat KZ = 60.024706.

Datis nunc in triangulo rectangulo ZWC hypothenuſa ZW = 0.7331092. et angulo ZWC = 59°.56$\frac{2}{3}$, argumentari licet.

1 : ZW = ſin. ZWC : ZC, hinc:

lZW = 9.8651686.
lſin. ZWC = 9.9372872.

lZC = 9.8024558; vel ZC = 0.6345353;

In triangulo denique KZC datur KZ = 60.024706, ZC = 0.6345353; et angul. KZC = 30°. 3$\frac{1}{3}$, ex quibus deducitur:

$$\text{tangens ZKC} = \frac{\text{ZC ſin. KZC}}{\text{KZ} - \text{ZC. coſ. KZC}}, \text{ adeoque:}$$

$l$coſ. KZC = 9.9372872.
lZC = 9.8024558

lZC. coſ KZC = 9.7397430
ZC. coſ. KZC = 0.549216
KZ = 60.024706

KZ − ZC coſ. KZC = 59.475490
lKZ − ZC. coſ. KZC = 1.7743381.
lſin KZC = 9.6996986.

7.9253605.
lZC = 9.8024558.

$l$tang. ZKC = 7.7278163,

Angu-

Angulus itaque, quem format verticalis linea KZ cum radio KC, ſin. ZKC, aequatur 18′.22″, quo cognito diſtantia loci K a Centro terrae, ſiue KC ſequenti modo colligitur:

$$l\,\text{ſin.}KZC = 9.6996986$$
$$l\,ZC = 9.8024558$$
$$l\,ZC.\text{ſin.}KZC = 9.5021544$$
$$l\,\text{tang.}ZKC = 7.7278163$$
$$l\,\frac{ZC.\,\text{ſin.}\,KZC}{\text{tang.}\,ZKC} = 1.7743381$$
$$l\,\text{coſ.}\,KZC = 9.9999938$$
$$l.\,KC = 1.7743443$$
$$\text{log. conſt. add.} = 4.7399413$$
$$l\,KC \text{ in hexaped.} = 6.5142856$$
$$\text{hinc } KC = 3268027. \text{ hexaped. Gall.}$$

Eodem modo in hypotheſi hac Bougueriana nactus ſum pro Parallelo Obſeruatorii Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei angulum, quem verticalis linea cum radio terreſtri conſtituit, $= 16'.27\,''\tfrac{1}{3}$, et radium ad centrum Terrae ductum $= 3276132$ hexaped. Datis nunc diſtantiis locorum a Centro telluris vna cum angulis, quos formant verticales lineae cum radiis terreſtribus, ad loca propoſita e Centro terrae ductis, Lunae in Meridiano verſantis Parallaxis, ſiue horizontalis, ſiue altitudini alicui viſae cognitae reſpondens, ſequenti methodo facillime determinari poterit:

Repraeſentet ÆRQ Meridianum terreſtrem per locum in ſuperficie Telluris datum R tranſeuntem, Tab. XIV. Fig. 3.

 ÆCQ

ÆCQ Aequatorem, et C Centrum terrae. Ducantur tangentes RL ad radium terreſtrem RC, et Rl ad verticalem lineam SRP loci R, ad orbitam lunarem vsque productae. Erit itaque angulus, quem conſtituit verticalis linea cum radio terreſtri, $=$ angulo PRC, ſiue SRs, qui vocetur Π, poſito radio $CR = r$ et diſtantia Lunae a Centro terrae $CL = Cl = d$. Quo facto habebimus Parallaxin Lunae horizontalem ad verticalem lineam SP, ſiue ſinum anguli $RlC = \frac{r}{d}$ coſ Π; ſinum vero Parallaxeos Lunae horizontalis ad radium terreſtrem RC, tanquam omnium maximae, ſiue ſin. ang. $RLC = \frac{r}{d}$. Ponatur iam altitudo Lunae Meridiana viſa $lR\lambda = v$, eritque

$$\lambda C : \text{ſin.}\, \lambda RC = RC : \text{ſin.}\, C\lambda R, \text{ vel}$$

$$d : \text{coſ.}(v + \Pi) = r : \text{ſin. Parall. altitud. in Meridiano,}$$

$$\text{adeoque ſin. Parallaxeos altitud} = \frac{r}{d}\text{coſ.}(v + \Pi).$$

Si nunc dicamus radium terreſtrem alius cuiusuis loci in ſuperficie telluris R, angulum, quem format radius iſte cum verticali illius loci, π, et altitudinem Lunae meridianam viſam V, erit ſimiliter ſin. Parall. horiz. maximae $= \frac{R}{d}$, et ſin. Parall. altitud. in Meridiano $= \frac{R}{d}$ coſ.$(V + \pi)$. Quodſi itaque e binis locis ſub eodem Meridiano ſitis diſtantia Centri Lunae culminantis a ſtella quadam fixa ſecundum declinationem obſeruata fuerit, locaque illa adeo ab inuicem fuerint diſſita, vt diſtantiarum obſeruatarum differentia aequetur ſummae Parallaxium Lunae in altitudinem, facili negotio Parallaxis Lunae horizontalis ipſa ex obſeruationibus definiri poterit. Vocetur enim diſtantiarum ſecundum

cundum declinationem differentia obſeruata A, eritque in hoc caſu $\frac{r}{d}\,\text{coſ.}(v+\Pi)+\frac{R}{d}\,\text{coſ.}(V+\pi)=A$, ſiue ſi ponatur $\frac{R}{r}=m$, prodibit $\frac{r}{d}\,\text{coſ.}(v+\Pi)+\frac{r}{d}\,m\,\text{coſ.}(V+\pi)=A$, hinc Parallaxis Lunae horizontalis ad radium terreſtrem r, ſiue $\frac{r}{d}=\frac{A}{m\cdot\text{coſ.}(V+\pi)+\text{coſ.}(v+\Pi)}$, et Parallaxis horizontalis ad radium terreſtrem R, vel $\frac{R}{d}=\frac{A}{\text{coſ}(V+\pi)+\frac{\text{coſ.}(v+\Pi)}{m}}$.

Secundum formulas haſce iam leui negotio Parallaxin Lunae horizontalem ex noſtris obſeruationibus definire valebimus, ſtatim ac differentia diſtantiarum Lunae, ſecundum declinationem a ſtella quadam fixa Lunae proxima in Promontorio Bonae ſpei, et in loco ſub eodem cum Promontorio Meridiano, in Parallelo Petropolitano ſito obſeruatorum, et altitudines Lunae Meridianae viſae in vtroque loco ex obſeruationibus ibidem peractis determinatae fuerint. Ad hoc itaque efficiendum oportet prius, vt altitudines Lunae Meridianae Petropoli obſeruatae ſingulae Tabularum Aſtronomicarum ope ad Meridianum Promontorii Bonae ſpei reducantur, deindeque diſtantia viſa centri Lunae culminantis a ſtella fixa Lunae proxima, ſecundum declinationem ad momentum culminationis Lunae ſub Meridiano Promontorii pro vtroque loco recte definiatur.

Antequam vero calculos hoſce pro ſingulis obſeruationibus ſupra relatis inſtituam, e re eſſe videtur, nonnihil circa veram diametri lunaris menſuram monere, eamque ex noſtris obſeruationibus, quantum fieri poterit, exactiſſime eruere. Ad hunc finem notandum eſt, me quidem diametrum Lunae apparentem per tubum

8 pedum, micrometro anglicano exquiſitiſſimo munitum, quo vti ſoleo, d. $\frac{18}{29}$ et $\frac{19}{30}$ Ian. obſeruare non potuiſſe, eam vero ad culminationis Lunae tempus d. $\frac{19}{30}$ Ian. ex mora tranſitus diſci lunaris per filum verticale quadrantis circa id tempus obſeruata deduxiſſe $= 32'.52''\frac{1}{2}$; quae, cum ſit diameter Lunae horizontalis, facili negotio, additis $15''$ pro variatione diametri Lunae horizontalis a d. $\frac{18}{29}$ ad $\frac{19}{30}$. Ian. ex tabulis Halleianis deſumta, reducitur ad diametrum Lunae horizontalem tempori obſeruationis lunaris d. $\frac{18}{29}$ Ian. reſpondentem $= 33'.7''\frac{1}{2}$. Porro accurate obſeruaui diametrum Lunae apparentem per tubum 8 ped. micrometro angl. inſtructum d. $\frac{11}{22}$ Febr. 1752 in altitudine Lunae viſa $44^{\circ}.30' = 33'.2''$. eodemque organo d. $\frac{12}{23}$ Febr. in altitudine Lunae viſa $50^{\circ}\frac{1}{5}$ $= 33'.8''$ 8, ita vt diameter Lunae horizontalis ex hiſce obſeruatis ad tempus culminationis Lunae deducta ſit d. $\frac{11}{22}$ Febr. $= 32'.38''\frac{1}{2}$, et d. $\frac{12}{23}$ Febr. $32'.43''$.

Hiſce de diametro Lunae Petropoli obſeruata dictis, ad inueſtigationem iam Parallaxeos Lunae horizontalis methodo ſupra expoſita inſtituendam reuertor, ex ſingulis obſeruationibus reſpondentibus ea, quae ad calculum hunc ſubducendum neceſſaria iudicantur, ſequenti ratione definiturus.

Primum itaque incidimus in obſeruationem d $\frac{18}{29}$ Ian. 1752 habitam, in qua Luna comparata fuit cum Palilicio. Obſeruata nimirum eſt

In

In Promontorio Bonae ſpei.

Altit. Merid. appar. limbi ☽ae borealis 11^h. 5′. 22″. circ. t. v.
= 38°. 22′. 41″. 2
refractio ſubtrahenda - - = 1. 14.

Altit. Merid. appar. limbi ☽ae borealis
refractione correcta = 38°. 21′. 27″. 2
Semidiam. Lunae apparens (ſecundum ea quae, ſupra de diam. diximus) = 16. 44. 5

Altit. Merid. apparens Centri ☽ae
refractione correcta = 38° 38′. 11″. 7
Altit. Meridiana apparens Palilicii = 40°. 6′ 44″. 4
refractio ſubtrahenda = 1. 9. 5

Alt. Merid. Palilicii refractione correcta = 40. 5. 34 9
Altit. Merid. apparens Centri ☽ae
refractione correcta = 38. 38. 11. 7
Diſtantia apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſecundum declinat. = 1°. 27′. 23″. 2 Bor. verſ.

Simili modo in obſeruatorio Petropolitano.

Altit. Merid. appar. marginis ☽ae borealis 11^h. 3′. 24″ t. v.
= 46°. 26′. 20″. 5
refractio ſubtrahenda = 0. 57.

Altit. Merid. appar. marg. ☽ae bor.
refractione correcta = 46°. 25′. 23″. 5
Semidiameter ☽ae apparens - 16. 46. 4
Altit. Merid. appar. Centri ☽ae
refractione correcta = 46°. 8′. 37″. 1

Haec autem altitudo Meridiana Lunae Petropoli obſeruata, vt ad Meridianum Promontorii Bonae Spei, ſiue ad tempus culminationis Lunae ſub Meridiano Promontorii reducatur, ex Tabulis lunaribus depromtus motus Lunae verus in declinationem ſequenti iam modo adhibeatur neceſſe eſt:

Tempus culminationis Centri ☽ae in Promontorio Bonae ſpei	$11^h. 5'. 22''$. t. v.
Differ. Merid. Pet. inter et Promont.	47. 10
Tempus culminat. Centri ☽ae in Promont. ad Mer. Petrop. reduct.	11. 52. 32
Tempus culminat. Centri ☽ae in obſeruatorio Petropolitano	11. 3. 24
differentia	$0^h. 49'. 8''$

Motus Lunae verus in declinationem pro 50 min. prim. temp. ex Tabulis Halleianis ſupputatus, aequatur $6'. 59''. 7$ auſtrum verſus, hinc motus Lunae verus in declinationem pro $49'. 8''$ temp. erit $= 6'. 52''. 4$, quibus ſubductis ab altitudine Merid. appar. Centri ☽ae Petropoli obſeru. $46°. 8'. 37''. 1$, remanebit altitudo Merid. appar. Centri ☽ae ſub Meridiano Promontorii B. S. in Parallelo obſeruatorii Petropolitani $= 46°. 1'. 44''. 7$

Propter decrementum declinationis ☽ae borealis pro aucta parallaxi Lunae altitud. ſubtrahenda ſunt:	0. 5. 2
Altitudo Merid. apparens Centri ☽ae ſub Meridiano Promontorii Bonae ſpei in Parallelo obſeruatorii Petropolitani correcta	$= 46°. 1'. 39''. 5$

Alti-

Altitudo Merid. Palilicii Petropoli obſeruata	=	46°.	3'.	28''.
refractio ſubtrahenda	=		0. 57.	8
Altit. Merid. Palilicii refractione correcta	=	46.	2. 30.	2
Altit. Merid. appar. Centri ☽ae ſub Merid. Promontorii B. S. in Parall. obſeruatorii Petrop. correcta	=	46.	1. 39.	5

Hinc diſtantia apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſec. declinat. = 0°. 0'. 50''. 7 Auſt. verſus.

Diſtant. apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſecundum declinationem eodem tempore in Promontorio obſeruata. = 1. 27. 23. 2 Bor. verſus.

Diſtantiarum apparentium itaque differentia, ſiue ſumma Parallaxium. = 1°. 28'. 13''. 9

Habebimus igitur ſecundum formulas ſupra traditas $A = 1°. 28'. 13''. 9$; $v. = 46°. 1'. 39''. 5$; $V = 38°. 38'. 11''. 7$; et in hypotheſi Terrae ellipſoidalis ſupra admiſſa $r = 0.99652568$; $R = 0.99856302$; $\Pi = 13'.55''.6$; $\pi = 14'.49''$; hinc $m = 1.00204$, ſiue $lm = 0.0008870$; $v + \Pi = 46°. 15'. 35''$ et $V + \pi = 83°. 53'. 1''$,

adeoque $l\,\text{coſ.}(V+\pi) = 9.8912155$	$\text{coſ.}(v+\Pi) = 0.6913905$
$lm = 0.0008870$	$m.\text{coſ.}(V+\pi) = 0.7800142$
$lm\,\text{coſ.}(V+\pi) = 9.8921025$	$m.\text{coſ.}(V+\pi) + \text{coſ.}(v+\Pi) = 1.4714047$
$m\,\text{coſ.}(V+\pi) = 0.7800142$	l - - - - - $= 0.1677323$
	$l\,A''$ - - - - $= 3.7237757$
	$l\frac{r}{d}$ - - - - $= 3.5560434$

 Colli-

Colligimus itaque ex praecedenti calculo pro tempore obſeruationis lunaris d. $\frac{18}{29}$ Ian. 1752 in hypotheſi terrae ellipſoidalis Parallaxin Lunae horizontalem ſub Parallelo obſeruatorii Petropolitani, ſiue $\frac{r}{d} = 59'.57''.9.$ eodemque modo Parallaxin Lunae horizontalem ſub Parallelo Promontorii Bonae ſpei, ſiue $\frac{R}{d} = 60'.5''.2.$ Si admittere placet hypotheſin Cel. Bougueri circa figuram Telluris, erit ex ſupra inuentis $r = 3268027$ hex. $R = 3276132$ hex. hinc $m = 1.00248$, vel $l\,m = 0.0010758$; $\Pi = 18'.22''$ et $\pi = 16'.27''.4$, adeoque Parallaxis Lunae horizontalis pro tempore obſeruationum lunarium d. $\frac{18}{29}$ Ian. ſub Parallelo obſeruatorii Petropolitani $= 60'\,0''$, et pro Parallelo obſeruatorii Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei $= 60'.9''$. In hac obſeruatione Anomalia Lunae vera erat $= 6^s.29.$ Argumentum annuum $= 1^s.23°\frac{3}{4}$, et diſtantia Lunae a Sole $= 5^s.17°\frac{1}{4}$.

Progredior iam ad ſecundam obſeruationem lunarem reſpondentem d. $\frac{19}{30}$ Ian. 1752 habitam. Quamvis enim Petropoli ſtellas Parallelo Lunae proximas iſto die, nubibus impedientibus, obſeruare non licuerit, nec eandem ob cauſam determinatio Parallaxeos ex hac obſeruatione aeque certa videatur, ac illa, quae obſervationibus d. $\frac{18}{29}$ Ian. et $\frac{12}{23}$ Febr. nititur, nolui tamen obſeruationem hanc praeterire, quin eam ad Parallaxin Lunae definiendam vna cum reliquis adhiberem, aut ſaltem experirer; praecipue cum periculum in hac Parallaxeos lunaris computatione ſola hypotheſi, quod errores diuiſionum inſtrumentorum pro maiori interuallo in limbo maiores eſſe poſſent, totum innititur. Huius

vero.

vero generis errores in Organo, quo Petropoli vſus ſum, nullos eſſe ſenſibiles, ex certis rationibus, alio loco indicandis, perſuaſum hactenus habeo.

Ad calculum hunc inſtituendum comparanda erit altitudo Meridiana Lunae, die iam notato in vtroque obſeruatorio capta, cum altitudine Meridiana Palilicii, die praecedente et in Promontorio Bonae ſpei et Petropoli obſeruata, quippe quae variationibus, ſiue viciſſitudinibus, refractionum minime ſit obnoxia. Caeterum Luna hac in obſeruatione ad eandem fere altitudinem Meridianam tranſiit Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei, ita vt ſumma Parallaxium, ex obſeruationibus huius diei colligenda, omnium ferme ſit maxima.

Colligitur autem ex obſeruatione d. $\frac{19}{30}$ Ian. in Promontorio Bonae ſpei habita

Altit. Merid. apparens marginis Lunae
borealis - - $12^h\ 1'.37''$.t.v. = $42^\circ.33'.11''.1$
refractio ſubtrahenda - 1. 3. 8

Altit. Merid. apparens marg. ☽ae boreal.
refractione correcta - - - = 42. 32. 7. 3
Semidiameter Lunae apparens 16. 37. 8

Altit. Merid. appar. Centri ☽ae refract.
correcta - - - - - = 42. 48. 45. 1
Altit. Merid. Palilicii refractione correcta
ex obſeruatione d. $\frac{18}{29}$ Ian. - - = 40. 5. 34. 9
Hinc diſtantia apparens Centri Lunae
culminantis, ſecund. declinationem
a Palilicio in Promont. obſeruata = $2^\circ.43'.10''.2$

Secundum obſeruationes d. $\frac{19}{30}$ Ian. in obſeruatorio Petropolitano inſtitutas

Altitudo Meridiana apparens marginis Lunae borealis $11^h.59'.36''$. t. v. $= 42°.18'\ 6''.1$

refractio ſubtrahenda - $= \quad 1.\ 4.\ 4$

Altitudo Meridiana apparens marg. ☽ae borealis refractione correcta $= 42.\ 17.\ 1.\ 7$

Semidiameter Lunae apparens $\quad 16\ 37.\ 9$

Altit. Mer. app. Centri Lunae refract. corr. $= 42°.\ 0'\ 23''.9$

Ad altitudinem hanc Lunae Meridianam ad Meridianum Promontorii Bonae ſpei reducendam, habemus tempus culminationis Centri ☽ae in Promontorio — $12^h.\ 1'.37''$ t. v.

Meridianorum differentia — $0.\ 47.\ 10$

Tempus culminat Centri ☽ae in Promontorio ad Merid. Petropol. reduct. $= 12.\ 48.\ 47$

Tempus culminat. Centri ☽ae Petropol. $= 11.\ 59.\ 36$

differentia $= 0^h.49'\ 11''$

Secundum Tabulas Halleianas motus Lunae verus in declinationem pro 50 min. prim. temp. aequatur $9'.4''\ 7$, Auſtrum verſus; quocirca motus Lunae verus in declinationem pro $49'.11''$. temp. erit $= 8'.55''\ 8$, hinc Altitudo Meridiana appar. Centri Lunae ſub Meridiano Promontorii B. S in Parallelo obſeruatorii Petropolitani - - - - - - - $= 41°.51'.28''.1$

ob imminutam altitud. Merid. ☽ae pro aucta parallaxi ☽ae altitud. ſubtrahantur $= \quad 6.\ 3$

Altit. Merid. appar. Centri ☽ae ſub Merid. Promontorii in Parall. Petroburg. correcta $= 41°.51'.21''.8$

Altit.

Altit. Merid. Palilicii Petropol. d. $\frac{18}{29}$ Ian. obſeruata et refractione correcta - - - - $= 46.° 2'. 30''. 2$

Diſtantia apparens Centri ☽ae culminantis a Palilicio ſecundum declinationem in Parallelo obſeruatorii Petropol. ſub Meridiano Promontorii Auſtrum verſus $= 4°. 11'. 8''. 4$

Diſtant. apparens Centri ☽ae culminantis ſecund. declinationem a Palilicio in Promontorio obſeruata Auſtr. verſus $= 2°. 43'. 10''. 2$

Hinc diſtantiarum apparentium different. ſiue ſumma Parallaxium $= 1°. 27'. 58''. 2$

Erit igitur in formulis ſupra pro parallaxi horizontali exhibitis $A = 1°. 27'. 58''. 2$; $v = 41° 51'. 21''. 8$; $V = 42°. 48'. 45''. 1$; adeoque in hypotheſi terrae ellipſoidalis $v + \Pi = 42°. 5'. 17''$; $V + \pi = 43°. 3'. 34''$, et in hypotheſi Cel. Bougueri $v + \Pi = 42°. 9'. 44''$; $V + \pi = 43°. 5'. 12''$, valoribus reliquarum quantitatum manentibus iisdem, vt ſupra.

Calculo ſecundum hoſce valores datos poſito, prodibit pro tempore obſeruationis lunaris d. $\frac{18}{38}$ Ian. in hypotheſi terrae ellipſoidalis parallaxis Lunae horizontalis pro Parallelo Petropolitano $= 59'. 40''. 2$, et pro Parallelo Promontorii Bonae ſpei $= 59'. 47''. 6$. In hypotheſi autem Cel. Bougueri ſub Parallelo Petropol. $= 59'. 42''. 4$, et ſub Parallelo Promontorii $= 59'. 51''. 3$. Tempore huius obſeruationis lunaris Anomalia Lunae vera erat $= 7^s. 14°$. Argumentum annuum $= 1^s. 24° \frac{2}{3}$, et diſtantia Lunae a Sole $= 6^s. 1° \frac{1}{2}$.

Acce-

Accedimus nunc ad tertiam obſeruationem lunarem reſpondentem d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752. peractam, Luna circa limites maximae declinationis borealis verſante, adeoque exiguo valde motu in declinationem gaudente.

Obſeruauit autem Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei die iam dicto

Altit. Merid. appar. marg ☽ae Auſtr.
6′.54′.58″. t. v. - - - - = 34°.19′.29″
refractio ſubtrahenda - - - = 1. 26

Hinc erit Altit. Merid. appar. marg. ☽ae
auſtr. refract. correcta - - - = 34. 18. 3
Semidiameter Lunae apparens ex noſtra
obſeruatione - - - - = 16. 31. 1

Altit. Merid. appar. centri Lunae refract.
correcta - - - - - = 34°.1′.31″.9
Altit. Meridiana apparens ζ♉ - - = 35°.8′.18″.7
refractio ſubducenda - - - = 1. 23

Altit. Merid. appar. ζ♉ refractione correcta = 35. 6. 55. 7
Alt. Merid. app. centri Lunae refr. correcta = 34. 1. 31. 9

Diſtantia appar. centri ☽ae culminantis
ſecundum declinationem a ζ♉ in Promontorio Bonae ſpei obſeruata - = 1°.5′.23″.8 Bor. verſ.

In

In obſeruatorio Petropolitano eodem die obſeruata fuit

Altitudo Merid. app. marg. ☽ae borealis 6^h.53'.11''t.v.
= 50°.58'.2''.6

Propter exiguam obliquitatem cornuum ☽ae addenda ſunt - - - - - - 3.

Alt. Merid. app. marg. ☽ae borealis correcta = 50. 58. 5.6
refractio ſubtrahenda - - - - - - 49.

Alt. Mer. app. marg. ☽ae bor. refract. corr. = 50.57.16 6
Semidiameter Lunae apparens - - 16.34.8

Alt. Merid. app. centri ☽ae refract. correcta = 50. 40. 41. 8

Altitudo autem haec Lunae Meridiana Petropoli obſeruata, vt ad Meridianum Promontorii Bonae ſpei reducatur, habemus tempus culminationis centri Lunae in Promontorio - - - - 6^b.54'.58''.t.v.
addatur Meridianorum differentia o. 47. 10

Tempus culminat. Centri ☽ae in Promont. ad Merid. Petropol. reductum - - 7. 42. 8
Tempus culminat. centri ☽ae Petropoli - 6. 53. 11
differentia = o^b.48'.57''.

Motus Lunae verus in declinationem ſecundum Tabulas Halleianas ſupputatus, pro 50 min. prim. temp. in hac obſeruatione aequat. 20''.$\frac{1}{2}$ Auſtrum verſus, adeoque pro 48'.57''. temp. 20''.1, quibus ex altitudine Meridiana apparenti Centri Lunae Petropoli obſeruata ablatis, obtinebitur altitudo Meridiana apparens Centri

Lunae ſub Meridiano Promontorii in Parallelo obſeruatorii Petropolit. - - - $= 50°.40'.21''.7.$

Altit. Merid. appar. ζ♉ Petrop. obſeruat. $= 51°.2'.14''.8$
 refractio ſubtrahenda - - - 49.

Altitudo Merid ζ♉ refractione correcta $= 51.\ 1.\ 25.\ 8$

Alt. Merid. app. Centri ☽ae ſub Merid. Promont in parall. Petropol. $= 50.\ 40.\ 21.\ 7$

Diſtantia appar. Centri ☽ae culm. ſecundum declinationem a ζ♉ in Parallelo obſeruatorii Petropol. ſub Meridiano Promontorii - - $= 0°.21'.3''.4$ Auſt.verſ.

Diſt. appar. centri ☽ae culm. ſec. declinat. a ζ♉ in Promont. obſeru. $= 1.\ 5.\ 23\ 8.$Bor.verſ.

Diſt. app. differ. ſiue ſumma Parallaxium $= 1°.26'.27''.2.$

Hinc in noſtris formulis pro ſupputanda Parallaxi horizontali $A = 1°.26'.27''.2$; $v = 50°.40'.21''.7$; $V = 34°.1'.31''.9$ et in hypotheſi Terrae ellipſoidalis ſupra aſſumta $v + \Pi = 50°.54'.17''$; $V + \pi = 34°.16'.21''$. In hypotheſi Bougueriana autem $v + \Pi = 50°.58'.44''$. et $V + \pi = 34°.17'.59''\frac{1}{2}$. Valoribus hiſce ſubſtitutis, prodibit Parallaxis Lunae horizontalis ad tempus obſeruat lunar. d. $\frac{12}{23}$ Febr. in hypotheſi Terrae ellipſoidalis, pro Parallelo Obſeruatorii Petropolitani $= 59'.16''.1$; pro Parallelo Promontorii Bonae ſpei $= 59'.23''.4$, In hypotheſi Bougueriana autem ſub Parallelo Petropolitano $= 59'.18''.3$, et ſub Parallelo Promontorii $= 59'.27''.2$. In hac obſeruatione lunari Anomalia Lunae vera erat $= 5^s.25°$, Argumentum annuum $= 2^s.16°$, et Diſtantia Lunae a Sole $= 3^s.16°$.

Quum

Quum obſeruationibus hiſce lunaribus, d. $\frac{12}{23}$ Febr. Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei habitis, reſpondens quoque obſeruatio inſtituta ſit in obſeruatorio Regio, quod Berolini eſt, et hanc cum obſeruatione Cel. de la Caille methodo praecedenti conferre iuuabit. Obſeruatio autem Berolinenſis in Epiſtola D. de la Lande ad Cel. Kaeſtnerum obuia, ſequentibus verbis continetur: „A. 1752. d. 23 Febr. in obſeruatorio regio Berolinenſi $6^h.54'.39''$. temp. v. limbus Lunae praecedens „Meridianum attigit, et ad $6^h.55'.50''\frac{2}{3}$ centro ipſo „Lunae in Meridiano conſtituto veram differentiam declinationum inter limbum Lunae meridionalem et „ſtellam ζ Tauri obſeruaui $0°.32'.31''$, ſtella ad „ſeptentrionem exiſtente.„

Quamuis in hac obſeruationis Berolinenſis relatione altitudo Meridiana Lunae apparens non ſit notata, leui tamen negotio eam ex altitudine Meridiana ζ♉ Petropoli obſeruata definire poſſumus, modo detur eleuatio Poli obſeruatorii Berolinenſis. Inueni autem ex magno ſat numero obſeruationum circa ſtellam Polarem et β draconem An. 1750. Maio, Iulio et Auguſto menſibus, prope obſeruatorium Berolinenſe ſumma cura habitarum, eleuationem Poli huius obſeruatorii veram $= 52°.30'58''$. Differentia ſimiliter Meridianorum obſeruatorii Cel. de la Caille in Promontorio Bonae ſpei et Berolinenſis facile fluit ex differentia Meridianorum Petropolin inter et Promontorium initio huius diſſertationis inuenta. Quia enim differentiam Meridianorum Berolinenſis et Pariſini obſeruatorii, alias accurate determinaui $0^h.44'.25''$, erit differentia Meridianorum inter Petropolitanum et Berolinenſe

linenſe obſeruatorium $= 1^h.7'.35''$, poſita nimirum diſtantia Petropolitani obſeruatorii a Pariſino ſecundum Aequatorem $= 1^h.52' 0''$. Hinc admiſſa differentia Meridianorum Petropolitani obſeruatorii et Promontorii Bonae ſpei ſupra inuenta $= 0^h.47'.10''$, prodibit diſtantia quaeſita Promontorii Bonae ſpei ab Obſeruatorio Berolinenſi ſecundum Aequatorem $= 0^h.20'.25''$ ortum verſus, adeoque $7''\frac{1}{4}$ temp. minor ea, quam olim adhibuit Wagnerus in narratione ſua de ratione ac methodo obſeruationum aſtronomicarum, auſpiciis Nobil. D. de Kroſigk Berolini et ſimul in Capite Bonae ſpei, ad parallaxin Lunae praecipue determinandam, inſtitutarum. Praeterea inueni ſecundum formulas ſupra enucleatas angulum, quem ſub Berolinenſi Parallelo conſtituit verticalis linea cum radio ad centrum terrae ducto, in hypotheſi terrae ellipſoidalis ſupra ſuppoſita $= 15'.29''.8$, in hypotheſi Bougueriana autem $= 19'.33''\frac{1}{2}$; itemque radium ex centro telluris ad Parallelum Berolinenſem ductum in prima hypotheſi $= 0.99708386$, in altera vero $= 3270386$, hexap.

Hiſce praemiſſis, ſequitur, vt diſtantiam Lunae culminantis apparentem, ſecundum declinationem a ♃♉ ſub Meridiano Promontorii Bonae ſpei, in Parallelo Berolinenſis obſeruatorii, ex obſeruatione ſupra relata, eruamus hoc modo:

Alt. Merid. ζ♉ d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 Petropol.
obſeruata et refract. correcta - $= 51^{\circ}. 1'. 25''. 1$
Eleuatio Aequatoris Petropol. obſeruat. $= 30. 3. 20$

Declinatio appar. ζ♉ d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1752 $= 20.58.5.1$ Bor.
Eleuatio Aequatoris Berol. obſeruatorii $= 37.29.2$

Alt. Mer. ζ♉ in obſ. Ber. refract. correcta $= 58.27.7.1$
Differentia declinat. inter marg. ☽ae auſtr.
et ζ♉ Berolini obſeruata - 0.32.31

Alt. Mer. app. marg. ☽ae auſtr. refr. corr. $= 57.54.36.1$
Semidiameter Lunae apparens - $=$ 16.36 1

Alt Mer. app. centri Lunae refract. corr. $= 58^{\circ}. 11'. 12''. 2$

Iam ad reducendam hanc altitudinem Lunae Merid. ad Meridianum Promontorii Bonae ſpei, habemus tempus culminat. centri Lunae in Promont. $= 6^{h}. 54'. 58''$. t. v.
Subtrahatur differentia Meridianorum $= 0. 20. 25$

Temp. culminat. centri ☽ae in Prom.
ad Merid. Berolinen. reductum $= 6. 34. 33$
Temp. culminat. centri ☽ae Ber. obſ. 6. 55. $50\frac{2}{3}$

differentia $= 0^{h}. 21'. 17''\frac{2}{3}$.

Motus Lunae verus in declinationem pro hoc temporis interuallo $21'. 17''\frac{2}{3}$ ex Tabulis Halleianis aequatur $10''. 7$, quibus augenda eſt altitudo Meridiana apparens centri Lunae Berolini obſeruata, vt innoteſcat

Altit. Merid. appar. centri ☽ae ſub Merid. Promont. in Parallelo Berol. obſeruat - - - - $= 58^{\circ}. 11'. 22''.9$

Alt. Merid. ζ♉ ſub Parallelo Berol. obſeruatorii refractione correcta $= 58. 27. 7. 1$

Diſtantia appar. centri ☽ae culminantis ſec. declinat. a ζ♉ in Parallelo Berol. obſeruator. ſub Merid. Promontorii Bonae ſpei. - - - - - - - $= 0^{\circ}. 15'. 44''. 2.$ A. r.

Diſt. appar. centri ☽ae culminant. ſec. declinat. a ζ♉ in Promont. obſeruata $= 1. 5. 23. 8$ B. r.

Differ. diſt. appar. ſiue ſumma Parall. $= 1^{\circ}. 21'. 8''$.

Dantur itaque ſequentes valores litterarum in formulis pro ſupputanda Parallaxi Lunae horizontali contentarum: $A = 1^{\circ}. 21'. 8''$; $v = 58^{\circ}. 11'. 22''. 9$; $V = 34^{\circ}. 1'. 31''. 9$, et in hypotheſi terrae ellipſoidalis ſupra admiſſa $v + \Pi = 58^{\circ}. 26'. 52''\frac{1}{2}$; $V + \pi = 34^{\circ}. 16'. 21''$; $r = 0.99708386$ et $R = 0.99856302$, hinc $m = 1\ 0014836$, ſiue $lm = 0.0006439$. In hypotheſi autem Bougueriana $v + \Pi = 58^{\circ}. 30'. 56''\frac{1}{2}$; $V + \pi = 34^{\circ}. 17'. 59''\frac{1}{2}$; $r = 3270386$ hexaped. et $R = 3276132$ hexaped. adeoque $m = 1.001757$, vel $lm = 0.0007624$.

Prodibit igitur ex hiſce datis ad tempus obſeruat. d. $\frac{12}{23}$ Febr. Parallaxis Lunae horizontalis in hypotheſi terrae ellipſoidalis ſupra aſſumta, pro Parallelo Berolinenſi $= 60'. 3''. 6$, et pro Parallelo Promontorii $= 60'. 8''. 9$; ex altera autem hypotheſi figurae telluris ſub Parallelo Berolinenſi $= 60'. 6''. 4$ et ſub Parallelo Promontorii $= 60'. 12''. 7$.

Para-

Parallaxin Lunae horizontalem ex obſeruatione Berolinenſi deductam, comparando cum ea, quae obſeruationibus Petropolitanis innititur, facile apparet, ſiue relationem obſeruationis Berolinenſis circa differentiam declinationum Lunae et ζ♉ eſſe mendoſam, ſiue obſeruationem ipſam erroneam, adeo vt ea, niſi erroris fons prius detectus fuerit, vti nequaquam poſſimus. In praeſenti ſufficit indicare, quod obſeruatio Berolinenſis magis cum obſeruationibus Petropolitanis conſentiret, ſi in relatione obſeruationis Berolinenſis loco $= 0°.32'.31''$, legere liceret $0°.31'.32''$.

Ad noſtras itaque obſeruationes reuertendo, ex calculis ſupra inſtitutis, ſequentes colligimus rationes Parallaxeos Lunae horizontalis ex Tabulis Halleianis ſupputatae, ad Parallaxin eius horizontalem, ex obſeruationibus Petropoli et in Promontorio Bonae ſpei ſimul habitis concluſum: Ex obſeruationibus nimirum d. $\frac{18}{29}$ Ian. inſtitutis, Parallaxis Lunae horizontalis tabularia eſt ad Parallaxin horizontalem ex obſeruationibus in hypotheſi figurae telluris Bougueriana pro Parallelo Petropolitano deductam, vt $59'.48''$ ad $60'.0''$, ſiue vt 1. ad 1.00334; ex obſeruationibus d. $\frac{19}{30}$ Ian. vt $59'\ 20''\frac{1}{3}$ ad $59'.42''.4$, ſiue vt 1. ad 1.00615; ex obſeruationibus denique d. $\frac{12}{23}$ Februarii vt $58'.54''\frac{2}{3}$ ad $59'.18''.3$, ſiue vt 1. ad 1.00669. Inueniemus quoque rationem Parallaxeos Lunae horizontalis, ex obſeruationibus pro Parallelo Petropolitano collectae, ad eius diametrum obſeruatam et ad horizontem reductam, vt ſequitur: ſecundum obſeruationes d. $\frac{18}{29}$ Ian. Parallaxis Lunae horizontalis in hypotheſi figurae telluris Bougueriana, pro Parallelo Petropo-

tropo-

tropolitano, ſupputata eſt ad eius diametrum horizontalem, vt 60 ad 33. 125; ex obſeruat. d. $\frac{19}{30}$ Ian. vt 60 ad 33. 037; ex obſeruat. d. $\frac{12}{23}$ Febr. vt 60 ad 33. 100.

Rationibus hiſce inuicem collatis, apparebit, obſeruationes d. $\frac{19}{30}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitas, ſatis bene congruere, et cum differentia Parallaxium horizontalium ex Tabulis depromta, et cum diametris Lunae obſeruatis; obſeruationem autem d. $\frac{18}{29}$ Ian. inſtitutam contra aliquantulum ab illis aberrare, praeſertim cum decremento diametri lunaris a d. $\frac{18}{29}$ ad d. $\frac{19}{30}$ Ian. accurate ſatis non reſpondeat. An vero error, quo obſeruatio haec contaminata eſſe videtur, ex verificatione diuiſionum, quam ſibi circa ſextantem ſuum inſtituendum propoſuit Cel. de la Caille, corrigi queat, in medio relinquere cogor. Hoc autem ſcio, obſeruationes Petropolitanas d. $\frac{18}{29}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitas, nulla egere correctione, ex diuiſione quadrantis noſtri oriunda, quod filum quadrantis pendulum in vtraque obſeruatione Lunae et ſtellae, eidem diuiſionis in limbo quadrantis puncto diebus iam notatis accuratiſſime fuit applicatum.

Animaduerto autem, quod in obſeruationibus d. $\frac{18}{29}$ et $\frac{19}{30}$ Ian. vnius eiusdemque marginis Lunae, borealis nimirum, altitudo Meridiana, et Petropoli, et in Promontorio Bonae ſpei ſit obſeruata, ita vt diameter Lunae erronea nullum afferre queat errorem Parallaxi Lunae ex hiſce obſeruationibus ſupputatae; quod vero in obſeruatione d. $\frac{12}{23}$ Febr. habita, Cel de la Caille auſtralem Lunae limbum tanquam terminatum in Promontorio obſeruauerit, ego contra Petropoli borealis limbi

limbi altitudinem, propter exiguam cornuum Lunae obliquitatem, breui temporis interuallo inter culminationem Lunae et ſtellae ζ♉ coactus ceperim, cum praeterea limbus hic ſtellae ζ♉ eſſet citimus, totaque obſeruatio, absque vlla quadrantis perturbatione, ſolo cochleae micrometri circumactu, peragi poſſet. Ex hiſce itaque ſecundis hoc naſcitur aduerſum, quod Parallaxium Lunae ſumma, ex obſeruationibus d. $\frac{12}{23}$ Febr. concluſa, totius re vera erroris in diametrum Lunae admiſſi, adeoque Parallaxis horizontalis partis alicuius huius erroris particeps eſt. Verum quia diametrum Lunae apparentem ſingulari cura, et die ipſo obſeruationis, et die proxime praecedenti, obſeruauimus, neque minus ad correctionem altitudinis Meridianae Lunae, ex obliquitate cornuum oriundam attendimus, non eſt quod de Parallaxi Lunae horizontali ex obſeruationibus memorato die habitis deducta, aliisque obſeruationibus comprobata, valde diffidamus.

Caeterum, cum in obſeruationibus Cel. de la Caille tempus obſeruatae altitudinis Lunae non eſt notatum, tempus culminationis Lunae, ſiue tranſitus ipſius centri per filum verticale ſextantis, circiter pro tempore, quo altitudo Lunae obſeruata eſt, accipiendum eſſe exiſtimaui. Sin autem in hoc erraſſem, error hic aeque ac ille, qui ex erronea Meridianorum differentia naſcitur, in obſeruationes d. $\frac{12}{23}$ Febr. inſtitutas cadere minime poteſt; ita vt amplius non ſit, quod de Parallaxi Lunae ex obſeruationibus d. $\frac{19}{30}$ Iun. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitis ſimul concluſa pro accuratiſſima habenda ambigamus.

Quod ad differentiam attinet, quae Parallaxi Lunae horizontali, ex diuerſitate figurae telluris naſcitur, ex praecedentibus calculis perſpicuum eſt, differentiam inter hypotheſin terrae ellipſoidalis, quae menſuris graduum Meridiani circa Aequatorem et circulum Polarem captis innititur, et theoriam, quam circa figuram telluris imaginatus eſt Cel. Bouguerus, in Parallaxi Lunae horizontali ſub Parallelo Petropolitano vix eſſe notabilem, quippe quae ad 2 tantum minuta ſecunda aſſurgat: in Parallaxi autem horizontali Lunae pro Parallelo Promontorii Bonae ſpei paulo notabiliorem, ſiquidem differentia ibi ſit 4 propemodum minutorum ſecundorum. Si parallaxes Lunae horizontales Parallelorum propriae ex obſeruationibus d. $\frac{12}{23}$ Febr. habitis ad Aequatorem et Polos pro ratione radiorum terreſtrium reducantur, prodibit ex hypotheſi ſupra aſſumta terrae ellipſoidalis Parallaxis horizontalis Lunae ſub Aequatore $= 59'. 28''.5$, et ſub Polis $= 59'. 11''. 9$, differentia exiſtente $= 16''.6$. Simili modo habebimus in hypotheſi figurae telluris Bouguerianae Parallaxin Lunae horizontalem ad d. $\frac{12}{23}$ Febr. ſub Aequatore $= 59'. 32''. 5$; ſub Polis $= 59'. 12''. 5$, et differentiam $= 20''. 0$. ita vt ſummatim Parallaxis horizontalis ſub Aequatore ſit ad Parallaxin horizontalem ſub Polis, vt ratio, quae inter axes intercedit, nimirum in hypotheſi terrae ellipſoidalis antea adhibita vt 215 ad 214, et in hypotheſi Bouguerianae vt 179 ad 178.

Si ad aliam adhuc deſcendamus hypotheſin terrae ellipſoidalis particularem, admittendo ex. gr. differentiam axium ex comparatione 1.^{mi} gradus latitudinis,

cum

cum gradibus diuerſis in Gallia prae aliis ſingulari perſpectoque ſtudio dimenſis, deductam quamproxime $= \frac{1}{301}$, prodibit angulus, quem conſtituit verticalis linea cum radio ad centrum Telluris ducto ſub Parallelo Petropolitani obſeruatorii $= 9'. 52''$, et ſub Parallelo Promontorii Bonae ſpei $= 10'. 31''$: itemque radius ad centrum terrae ductus pro latitudine Petropol. obſeruatorii $= 0.99753256$, poſito radio ſub Aequatore $= 1$, et pro latitudine Promontorii Bonae ſpei $= 0.99897932$, adeoque Parallaxis Lunae horizontalis ex obſeruationibus d. $\frac{12}{23}$ Febr. ſub Parallelo Petropolitano $= 59'. 13''. 4$, et ſub Parallelo Promontorii $= 59'. 18''. 5$, quae, ſi reducatur ad Aequatorem et Polos, abit ſub Aequatore in $59'. 22''. 2$, et ſub Polis in $59'. 10''. 4$. Si terra ponatur Sphaerica, Parallaxis Lunae horizontalis ſecundum obſeruationes d. $\frac{12}{23}$ Febr. aequatur $59'. 6''. 7$. Ex quo porro intelligitur, Parallaxin horizontalem, ſecundum varias circa figuram Telluris hypotheſes, ex ſumma Parallaxium altitud. obſeruata ſupputatam, ſub Polis vix vno alteroue minuto ſecundo ab inuicem differre, et ad Parallaxin horizontalem, ex figura terrae Sphaericae oriundam, proxime accedere.; contra autem, ſub Aequatore maximas ſubire differentias, adeo, vt Parallaxis Lunae horizontalis ſub Aequatore, ſecundum hypotheſin Bouguerianam, in praeſenti caſu $10''. 3$, maior ſit ea, quam ex hypotheſi terrae ellipſoidalis differentiae axium $= \frac{1}{301}$ innixa concluſimus, et $26''$ fere maior Parallaxi Lunae horizontali terrae Sphaericae debita. Quaenam vero harum hypotheſium propius proximeue ad veritatem accedat, hic definire non poſſumus, et non

niſi

niſi difficillime ex obſeruationibus Parallaxium lunarium hactenus inſtitutis, definitum iri credimus.

Quamcunque autem hypotheſin circa terram Polos verſus planeſcentem adoptamus, Parallaxis Lunae horizontalis ſub Parallelo Petropolitano parum exinde immutabitur, adeo vt pro Parallaxi Lunae horizontali vera, ſub Parallelo Petropol. d. $\frac{18}{29}$ Febr. 1752 hora circiter 7. pomerid. medium quoddam inter obſeruationes d. $\frac{19}{30}$ Ian. et d. $\frac{12}{23}$ Febr. eligendo, aſſumere poſſimus $59'.17''$. Parallaxin hanc Lunae horizontalem, ſi cum Parallaxi reſpondenti Tabularum Halleianarum comparaueris, inuenies Parallaxin ex memoratis tabulis ſupputatam parte ſui 158va circiter eſſe augendam, vt prodeat Parallaxis Lunae horizontalis ſub Parallelo Petropolitano praecedentibus obſeruationibus conueniens, ita vt, cum in obſeruatione d. $\frac{18}{29}$ Febr. Luna haud procul a Perigaeo ſuo et a 1ma quadratura cum Sole diſtabat, Parallaxis horizontalis Lunae Perigaeae, in quadraturis cum Sole conſtitutae, ad minimam orbis lunaris excentricitatem, ex praecedentibus obſeruationibus ſub Parallelo Petropolitano fit $=59'.7''\frac{1}{2}$, pro vera habenda, vſque dum ex obſeruationibus magis accommodis, in Inſula Oeſilia accuratius propter eximiam coeli ſerenitatem habitis, iisque reſpondentibus, rectius definiatur.

Poſita itaque interea Parallaxi Lunae horizontali ſub Parallelo Petropolitano d. $\frac{18}{29}$ Febr. hora 7. circiter veſpertina $=59'.17''$, et diametro Lunae horizontali ex obſeruatione circa idem tempus inſtituta deducta $=32'.43''$, colligitur porro Parallaxin Lunae horizontalem

talem, ſub Parallelo Petropolitano eſſe ad eius diametrum horizontalem in ratione 270 ad 149, neglecta correctione illa paruula, quae a luce erratica, qua circumfuſa apparent corpora lucida in fundo opaco poſita, proficiſcitur, et quae in Tubo 8 pedum, quo ad diametrum Lunae dimetiendam vſus ſum, 8 vel 10 mini ſecunda, pro diametro lunari adaequare poſſet, quibus diameter Lunae obſeruata, adeoque et eius diameter horizontalis, erit diminuenda. Dilatationem hanc diametri lunaris verae in tubo quadrantis noſtri 3 pedum radio, cuius beneficio praecedentes obſeruationes peregi, multo maiorem eſſe, ob ſingularem conſpicilli huius tubulati praeſtantiam, quippe quod obiecta diſtincte adeo exhibeat, vt nihil ſupra, valde dubito.

Haec fere habui, quae in praeſenti de Parallaxi terrae noſtrae ſatellitis dicerem, addens quod Parallaxis Lunae horizontalis Halleiana ex hiſce obſeruationibus parte ſui 168va circiter aucta, egregie ſatis reſpondet meditationibus, quas in peculiari diſſertatione de erroribus Tabularum lunarium, ex Eclipſibus Solis, praecipue iis, quas An. 1748 et 50 obſeruaui, definiendis cum eruditis communicaui, (*) oſtendens, Parallaxin Lunae horizontalem Halleianam, praeter nonnulla alia harum tabularum elementa corrigenda, ex obſeruationibus iam memoratarum Eclipſium, incrementum capere debere parti ſui 100^{mae} ad ſummum aequale.

OBSER-

(*) Comm. Tom. V. p. 431.

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNARIS PARTIALIS QVAE CONTIGIT D. 16/27 MARTII 1755. HABITA IN INSVLA OESILIA

AB A. N. GRISCHOW.

Quamuis vtilitas, quae ex obſeruationibus Eclipſium Lunarium, ſiue in theoriam Lunae corrigendam, ſiue in Tabulas Lunares accuratiores exhibendas redundat, noſtris temporibus permagni non fiat, eiusmodi tamen obſeruationes determinandis longitudinibus terreſtribus, vbi aliae obſeruationes melioris notae deſunt, egregie inſeruire Aſtronomis notum eſt. Hunc itaque in finem huius Eclipſeos obſeruationem, quantum in me poſitum fuit, accuratiſſime in Inſula Oeſilia peragere conſtitueram, praecipue cum coeli fauor per multos dies antecedentes, ad Horologium Aſtronomicum per altitudines Solis reſpondentes corrigendum, adeſſet. Ad obſeruationem autem ipſam inſtituendam adhibui Teleſcopium Gregorianum 2. pedum exquiſitiſſimum, per quod ſequentes obſeruationes, fauente coelo, habere mihi contigit.

Temp.

Temp. Pend.	Temp. appar.	
11ʰ. 48′. 20″	12ʰ. 42′. 33″	Initium Eclipſeos, ſiue ingreſſus Lunae in vmbram Telluris.
58. 3	52. 17	Vmbra ad Grimaldum.
12ʰ 0. 47	55. 1	Grimaldus totus in vmbra.
6. 41	13. 0. 55	Tycho incipit immergi.
8. 18	2. 32	Tycho totus in vmbram immerſus.
21. 53	16. 8	Vmbra ad Keplerum.
32. 49	27. 4	Copernicus immergi incipit.
37. 9	31. 24	Copernicus totus in vmbra.

Poſtea coelum maiori ex parte nubibus turbidis ex Occidente aduectis inuoluebatur.

13ʰ. 8′. 0	14ʰ. 2′. 18″	Vmbra vix ad Manilium pertingere, per nubes videbatur.

Coelo rurſum ſereno.

13ʰ. 26′. 7″	14ʰ. 20′. 25″	Grimaldus totus ex vmbra egreſſus.
14. 4. 55	59. 15	Tycho apparere incipit, momento quaſi temporis.
6. 16	15. 0. 36	Tycho totus conſpicuus.
27. 5 vel 15	21. 26 vel 36	Finis Eclipſeos, ſiue egreſſus Lunae ex vmbra terreſtri.

Pars diſci Lunaris eclipſata per totum Eclipſeos tempus nigricantis erat coloris, adeo vt partis eclipſatae veſtigium relinqueretur nullum. Vmbrae peripheria viſibilis perfecte circularis non erat, ſed inaequaliter ſinuabatur.

Paulo

Paulo poſt Eclipſeos finem coelum vndique nubibus turbidis obtegebatur.

Cum dies iam aliquot ante hanc Eclipſin inſtrumenta Aſtronomica collecta ex obſeruatorio Arensburgenſi eſſent ſublata, omniaque ad diſceſſum Petropolin parata, obſeruationem huius Eclipſeos in praedio quodam Inſulae Oeſiliae, Koeljal dicto, habere coactus fui. Nihil tamen praetermiſi, quod ad accurandam huius Eclipſis obſeruationem pertineret. Diſtat autem ſecundum operationes Geographicas in Inſula Oeſilia peractas praedium Koeljal ab obſeruatorio Arensburgenſi in Longitudinem $53''\frac{1}{2}$ temp. Orientem verſus, in Latitudinem vero $5'.48''$. ad Boream verſus, ita vt obſeruatio ſupra relata nullo negotio ad Meridianum obſeruatorii Arensburgenſis reduci queat.

OBSER-

OBSERVATIO ECCLIPSEOS LVNARIS PETROPOLI IN OBSERVATORIO ASTRONOMICO MARTII 17. MANE TEMPORE CIVILI ANNO 1755. ST. VET. INSTITVTA

A

N. POPOWIO et A. KRASILNIKOWIO.

	Tempore penduli	Tempore vero.
Vmbra diluta in margine diſci ☽ae apparet	1h 1′ 30″	1h 6′ 49″ 1/5
Vmbra denſior - - -	1 7 0	1 12 19 1/5
Initium Eclipſeos adeſſe putauimus	1 8 0	1 13 19 1/5
Initium vere factum vidimus - -	1 9 40	1 14 59 1/5
Vmbra attingit mare humorum -	1, 15, 33	1 20 52 4/5 obſ. bona
- - attingit Grimaldum - -	1 16 33	1 21 52 1/5 ſubdubia
- - tegit Gaſſendum - -	1 19 30	1 24 49 1/5 dubia
- - attingit Tychonem - -	1 25 40	1 30 59 obſ. bona
Totus Tycho in vmbra - -	1 27 0	1 32 19 ſed immerſio totalis dubia ob nubes tenues
Vmbra attingit Copernicum - -	1 51 30	1 56 48 bona
- - tegit Copernicum - -	1 56 45	2 2 3 bona
- - attingit mare nectaris - -	1 57 58	2 3 16 bona
- - tegit Dionyſium - -	2 9 6	2 14 24 bona
Totus Copernicus extra vmbram -	2 40 56	2 46 13 bona

	Tempore penduli	Tempore vero
Apparere incipit Grimaldus -	$2^h 41' 35''$	$2^h 46' 52''$ bona
Totus Grimaldus extra vmbram	2 45 26	2 50 43 bona
Emerſus eſt totus Dionyſius -	3 0 22	3 5 38$\frac{1}{2}$ bona
Apparere incipit Tycho - -	3 24 0	3 29 15$\frac{1}{2}$ ſubdubia
Tycho totus extra vmbram	3 25 20	3 30 35$\frac{1}{2}$ obſ. bona
Finis Eclipſeos factus eſt - -	3 44 15	3 49 30 bona
Penumbra etiam reliquit Lunam eademque priſtino ſplendori eſt reſtituta - - -	3 49 0	3 54 14.

Coelum durante Eclipſi tranquillum et maxima ex parte ſerenum erat, licet nubes ſubinde circa Lunam ortae turbarunt interdum obſeruationes, quarum maxime dubias hic omittere potius, quam in ſeriem referre placuit. Tempus in horologio numerabant ſtudioſi per vices. Obſeruatio facta eſt tubis diuerſis, altero 6$\frac{1}{2}$, altero 13 pedum; ſed in momentis obſeruationum bene vterque, ego ſc. et Kraſilnikowius, conuenimus, pleraeque autem obſeruationum inſtitutae ſunt tubis eiusdem longitudinis 6$\frac{1}{2}$ pedum ſatis bonae notae. Vmbra Terreſtris bene fuit terminata et denſa, adeo vt nullae maculae, quamuis lucidiſſimae, per eam conſpici potuerint.

MER-

MERCVRIVS IN SOLE VISVS LIPSIAE D. 6. MAII ST. NOV. ANNO 1753 HORIS MATVTINIS TEMPORE CIVILI

A

GODOFREDO HEINSIO.

Congreſſus hic ☿ii cum Sole, quippe circa nodum deſcendentem, intra Solis diſcum haerentem, celebratus, cum circumſtantiarum pondere valde ſe commendet; in eo deſcribendo nonnihil prolixus ero, vt cuique copia relinquatur, obſeruationes denuo ad examen reuocandi, et, ſi e re viſum fuerit conditiones introducendi, quas in hac diſquiſitione forſan contemnendas eſſe putaui. Hunc in finem generaliter primum obſeruationis circumſtantias enumerare, methodum obſeruandi deinde, cum obſeruationibus poſitionem ♀ii in diſco *Solis* concernentibus, exhibere; et tandem concluſiones inde deductas, aliaque proferre, licebit.

Mercurium in Sole oriente videndi copiam quidem faciebat locus ad obſeruationem hanc rite expediendam electus; aſt coeli facies non aeque annuebat. Circa tempus enim Solis ortus die 6. Maii totum coelum nubibus obductum deprehendebatur, quae quidem interruptae videbantur, exiguam tamen ſpem, Solem in vicinia horizontis conſpiciendi, relinquebant. Spes reſtituta fuit, dum circa hor. 5. nubes diſſipari incipiebant; adſpectus tamen primus Solis non niſi hor. 5. 32′.

ideoque hora integra poſt Solis ortum, concedebatur. Mercurium tunc per trientem diametri Solis iam intra diſcum eius progreſſum diiudicaui. Ab eo tempore obſeruationibus pro determinanda ☿ii in diſco Solis poſitione, infra deſcribendis, incubui, quantum quidem copioſae nubes, vento forti boreali agitatae, permittebant, inceptas operationes ſubinde et praeſertim verſus tempus egreſſus ☿ii e Sole interrumpentes. Inde etiam factum eſt, vt momentum valde deſideratum, egreſſus nempe ☿ii e Sole, obſeruari non potuerit. Circa ſemiſſem enim horae vndecimae Sol nubibus ſpiſſis inuolutus, non niſi hor. 11. 16′. in conſpectum rediit; quo autem tempore Mercurius diſcum Solis iam deſeruerat.

Diſcus ☿ii inſtar maculae nigerrimae per tubos aſtronomicos 6, 9, 11 pedum, et ab aliis, et a me, viſus eſt circulariter rotundus beneque terminatus; vapores tamen, aut nubes tenues, vel agitatio tubi a vento, adſpectum hunc ſubinde turbarunt. Teleſcopium Gregorianum ſub apparatu, quo obiecta ſecundum diametrum 52 vicibus auget, diſcum ☿ii plerumque tremulum, nec ſatis terminatum, repraeſentabat, exceptis quibusdam momentis, quibus iſte etiam circulariter rotundus, nigerrimus et bene terminatus apparuit. Sed huius Tubi ea eſt indoles in contemplationibus Solaribus, vt, coelo etiam ſudo, maculae ſolares raro per aliquot momenta diſtinctae videantur, ſed plerumque tremulae, ſiquidem calor ingens, in foco ſpeculi maioris excitatus, aërem ibi quaſi ebullientem et Solis imaginem tremulam efficit. Annulum lucidum circa ☿ii limbum

alias

ſias viſum per Tubos memoratos, deprehendere non potui.

Macula haerebat in ſole ad *m* (figurae 1. ſitu erecto declinatae), cuius poſitionem obſeru. 6. manifeſtavit. Eſt nempe diſtantia centri eius a centro Solis in diurno huius C μ orientem verſus capta = 205, et diſtantia centri maculae boream verſus a diurno centri Solis ſeu *m* μ = 60 eiusmodi partibus, quarum diameter Solis continet 531. hor. 7. 40′. cum Sol e nubibus prorumperet, omnes, qui aderant, nouum phaenomenum in vicinia Mercurii ad M tunc exiſtentis, antea non viſum, ſignificabant. Macula nempe ad *n* apparebat nigerrima, circulariter et diſtincte terminata, ad inſtar ☿ii minoris, cuius diameter dimidiam ipſius Mercurii circiter aequabat diametrum. Mercurii Satellitem vidiſſe facile ſibi quis perſuadere potuiſſet. Poſitio eius ad *n* reſpectu ☿ii M et fili horizontalis HR oculorum iudicio aeſtimata fuit. Cum hor. 8 42′ Mercurius in *q* haereret, ex ſitu ipſius *n* reſpectu *q* et *m* diiudicare licuit, maculam *n* in eodem diſci ſolaris loco perſtitiſſe. Exactiorem huius maculae poſitionem explorare alia negotia non permiſerunt. Caeterum, cur macula ante viſa non fuerit, oculis in Mercurium intentis condonare licet; forſan et frequens coeli impuritas adſpectum non niſi in vicinia Mercurii ad M poſiti conceſſit.

Tab. XV. Fig. 1.

Quod ad correctionem temporis horologii oſcillatorii attinet, non obſtante per tres dies, nempe d. 5. 6. et 7. Maii, tempeſtatis inconſtantia, ex reſpondentibus Solis altitudinibus die 5. poſt, et die 6. ante meridiem captis, optime colligere licuit mediam

talem non ſolum redegi, verum etiam ope cochleae ad G effeci, vt in iſto axis ſitu bulla aërea ad *b* quieta medium tubuli vitrei occuparet. Hoc modo in quauis alia libellae appenſione e ſitu bullae ad *b* criterium dabatur ſitus horizontalis axeos EF. Tigillum dein e longinquo, ope alius libellae, ſecundum ſuam longitudinem, in ſitum horizontalem diſpoſui, ad quod directo tubo, factoque axe EF horizontali, examen inſtitui, an filum aliquod reticuli in longitudinem tigilli incideret, et cum ea congrueret. In caſu contrario tubum cum reticulo, tubo AB intus inſertum, tamdiu conuerti, dum congruentia fili alicuius cum longitudine tigilli acquireretur; quo tandem factum eſt, vt bulla aërea ad *b* haerente, filum iſtud ſemper in ſitum horizontalem rediret. Hoc filum in ſequentibus *horizontale*, quod autem ad illud normale eſt, *verticale* vocabitur. Hoc per (|), iſtud per (—); fila autem obliqua per (/ \) pro ſitu eorum ſignabo.

Tab. XV. Fig. 3. Sub hoc apparatu die 6. Maii appulſus limbi Solis praecedentis *p* et ſequentis *c* ad verticale; ſuperioris *s* et, ſi fieri potuit, inferioris *i* ad horizontale; centri denique ☿ii ad fila reticuli, ſingulari tamen attentione ad verticale et horizontale, tubo immoto, annotaui, vt ſequuntur. Figurae 3. ſitus eſt inuerſus pro apparentia tubi aſtronomici.

Obſeru.

Obſeruatio 1.
Temp. horologii
$5^h.49'.58''$. p. ad |
50. 9. ☿ ad —
51. 6½ ☿ ad \
— 41. 5 ad —
— 45½ ☿ ad |
52. 41½ c ad |
nubes poſtea.

Attentus ad Solem e nubibus prorumpentem libellam appendere neglexeram; filum tamen axi EF parallelum, ſenſuum iudicio, proxime horizontaliter directum erat. In ſequentibus obſeruationibus libella ſemper adhibita et rite diſpoſita fuit.

Obſeru. 2.
$6^h.11'.46''$. p ad |
12. 35½. ☿ ad —
13. 6½. ☿ ad \
13. 31. ☿ ad |
— 56½. 5 ad —
14. 41½. c ad |

Obſeru. 3.
$6^h.18'.36''$. i ad — dub. ad ½''
19. 5. p ad |
20. 36¾. ☿ ad —
20. 48¼. ☿ ad |
21. 58½. 5 ad —
22. 1 c ad |

Obſeru. 4.
$6^h.25'.11''$. i ad —
25. 23½. p. ad |
27. 4. ☿. ad |
27. 11½. ☿ ad —
28 19. c ad |
28. 33½ 5 ad —

Obſeru. 5.
$7^h.7'.56\frac{1}{2}''$. p. ad |
8. 38. ☿. ad —
9. 1½. ☿. ad \
9. 22½. ☿ ad |
10. 3½. 5 ad —
10. 52½. c ad |

Obſeru. 6.

$7^h.17'.\ 2\frac{1}{2}''$. p. ad |
— 24 ☿ ad —
— $44\frac{1}{2}$ *m* ad —
— $56\frac{3}{4}$ ☿ ad /
18. 25. ☿ ad |
— $50\frac{3}{4}$. 5 ad —
19. 34. *m* ad |
19. $59\frac{1}{2}$ *c* ad |

Obſeru. 7.

$9^h.\ 1'.\ 38''$. p. ad |
2. 8. ☿ ad —
— $15\frac{1}{2}$. ☿ ad \
— 53. ☿ ad \ dub. ad 1″
3. $52\frac{1}{2}$ 5 ad —
4. $22\frac{1}{2}$. *c* ad |
Poſitio Tubi non ſatis firma, finita obſeruatione, deprehendebatur.

m eſt macula ſupra deſcripta.

Obſeru. 8.

$9^h.40'.41\frac{1}{2}''$. p. ad |
— 53. ☿ ad — dub. ad $\frac{1}{2}''$
41. 3. ☿ ad \
— $9\frac{1}{2}$. ☿ ad |
— 36. ☿ ad / dub. valde
42. 45. 5 ad —
43. 18. *c* ad |

Obſeru. 9.

$9^h.45'.15\frac{1}{2}''$. p. ad |
— 31. ☿ ad —
— $38\frac{1}{4}$ ☿ ad \
— 56. ☿ ad / dub.
47. $25\frac{1}{2}$. 5 ad —
47. $50\frac{1}{2}$. *c* ad |
nubes deinde copioſae.

In obſeru. 7. 8. 9. Mercurius valde oblique incidit in filum /.

Obſeru. 10.

$10^h.\ 24'.36''$. p. ad |
— $50\frac{1}{2}$. ☿ ad |
— 58. ☿ ad \
25. $15\frac{1}{2}$. ☿ ad —
27. $2\frac{1}{2}$. *c* ad |
27. $25\frac{1}{2}$. 5 ad —

Ex

Ex his obſeruationibus determinatio poſitionis centri Mercurii in diſco Solis ſequentem in modum patet. Referant FB verticale, FG horizontale filum, exiſtente ad F recto; *psci* diſcum Solis vtrumque filum ad *p* vel E et *s* vel I tangentem; C centrum eius; CE in E ad FB, CI in I ad FG normalem, GCB diurnum centri Solis. Centrum Mercurii ſit in ☿, ex quo verſus diurnum GB ducantur ☿V ad FB, ☿H ad FG parallelae. Situs figurae 4. eſt inuerſus pro apparentia Tubi aſtronomici. His factis patet, radium diſci CA, vel CE, exponere ſemimoram diſci Solis per horarium, ſeu per filum, quod in A ad diurnum GB normale concipi debet; CB exhibere ſemimoram diſci Solis per verticale, CG per horizontale filum; BV repraeſentare interuallum inter appulſus limbi praecedentis *p* et ☿ii ad verticale, GH interuallum inter appulſus limbi ſuperioris *s* et ☿ii ad horizontale filum. Si igitur detur CA, vel CE; in quadrato CEFI, dabitur poſitio centri diſci C; et cum habeatur CB ex *p* ad | et *c* ad |, dabitur in Δlo CEB ad E rectangulo recta CB, et inde diurnus centri GCB poſitione. Ex *p* ad | et ☿ ad | habetur BV; GH vero ex *s* ad —, et ☿ ad —; quare actis per V et H reſpectiue parallelis ad FB, FG, dabitur locus Mercurii in ☿, qui per ☿ *d* ad GB normalem ad diurnum centri Solis GB referri poteſt, ita vt C*d* ſit diſtantia centri ☿ii a centro Solis in iſto diurno; ☿ *d* autem diſtantia centri ☿ii ab eodem diurno.

Tab XV. Fig. 4.

Peracta ſic eſſet conſtructio loci ☿ii in diſco Solis, dummodo de mora diſci Solis per horarium, cuius ſe-

miſſis per CA, CE vel CI exhibetur, conſtaret. Quamuis autem iſtam ex Tabulis depromere liceret, conſultius tamen erit, ex obſeruationibus ipſis eam deducere, quorſum morae Solis per verticale et horizontale filum in obſeru. 3. et praeſertim 4. notatae faciunt. Scilicet ob ſin. tot: ſin. EBC = BC: EC et ſin. tot: ſin. IGC (coſ. EBC) = CG : CI (EC);
Tab. XV. fit. ſin. EBC × BC = ſin. tot. × EC = coſ. EBC × CG; quare
Fig. 5. BC : CG = coſ. EBC : ſin. EBC. Iunctis itaque BC (mora per verticale), CG (mora per horizontale) ad angulum rectum, ductaque BG, prodibit GBC inclinatio diurni ad filum verticale; et ſi BC in B*c* transferatur, et per *c* ad GC parallela *ce* agatur, repraeſentabit *ce* moram diſci Solis per horarium, quam hoc modo $= \frac{531}{4}$ ſecund. temporis, vel 2′. 12¾″. inueni. Inde et ex declinatione Solis boreali 16°. 35′. datur diameter Solis apparens in partibus circuli maximi = 31′. 48″.

In conſtructione loci ☿ii ſecundum ſchema figurae 4, diametrum diſci Solaris ſemper in 531 partes aequales diuiſam ſuppono, quae in ſequentibus *partes ſcalae* dicuntur, re vera autem quartas partes ſecundorum temporis referunt; in quibus partibus deinceps reliquae menſurae exhibentur. Hoc pacto radius CA, CE, vel CI conficit 265½; et 31′. 48″. circuli maximi reſpondent 531 partibus ſcalae.

Cum in obſeru. 7 et 9 appulſus ☿ ad | immediate non dentur, eos ex cognita diurni poſitione et reliquis appulſibus collegi, et quidem in obſeru 7. 9^h. 2′. 20½″, in obſeru. 9. 9^h. 45′. 42″. In obſeru. 10. autem

autem cum Sol iam ad meridianum appropinquaret, et inde error $\frac{1}{4}$ ſecundi temporis in mora Solis per filum verticale, ſi forſan daretur, eximium errorem in conſtructione poſitionis diurni producere valeret, angulum diurni cum verticali ($= 65°. 51'.$) et moram iſtam ($= 291.$ part. ſcal.) calculo indagare et adhibere placuit.

Methodus ☿ii poſitionem definiendi ſupra tradita ſupponit, Mercurium durante tranſitu per fila reticuli locum ſuum in diſco Solis non mutaſſe, quod cum rigore factum non ſit, huius rei rationem habere oportet. Manifeſtum autem eſt, quod, ſi Mercurius eodem inſtanti, ad vtrumque filum, horizontale ſcilicet et verticale, appuliſſet, vel, quod ad idem redit, filorum interſectionem ſemper traieciſſet, nulla correctione ob mutatum ☿ii locum opus ſit, ſed ad ipſum tranſitus per filorum interſectionem momentum locus ☿ii referri debeat. Omne igitur diſcrimen, quod ex mutatione loci emergere poteſt, recidit in interuallum temporis inter appulſus ☿ii ad horizontale et verticale filum; quod, ſi exiguum ſit, errorem ſenſibilem efficere nequit. Pone enim interuallum iſtud aequale vni minuto primo temporis, et Mercurium, numero rotundo, intra 8. horas diametrum Solis, ſeu 531. partes ſcalae, peragrare; variatio loci circiter $1\frac{1}{9}$ part. ſcalae conficiet, ſeu errorem in obſeruatione $= \frac{1}{4}$ ſecundi temporis producet, qui raro in eius modi obſeruationibus euitari poteſt.

His ita conſtitutis in obſeruationibus memoratis id efficere allaboraui, vt, quantum fieri potuit, inter-

vallum inter appulſus ☿ ad — et | eſſet valde exiguum; inde correctionem ob mutatum ☿ii locum negligere, et medium interualli iſtius momentum pro eo ſumere licuit, ad quod locus ☿ii conſtructus alligetur, *momentum obſeruationis* deinceps vocandum. Tabula ſequens rem diſtincte explicabit:

	Interuallum inter appulſus ☿ ad — et ad |	Momentum Obſeruationis ſecundum tempus horologii	Tempore vero Solari.
In obſeru.	1. 1′. 36½″.	5^b. 50′. 57″.	5^b. 56′. 8″.
	2. 0. 55½.	6. 13. 3.	6. 8 14.
	3. 0 11½.	6. 20. 42.	6. 15. 53.
	4. 0. 7½.	6. 27. 8.	6. 22. 19.
	5. 0. 44½.	7. 9. 0.	7. 4. 12.
	6. 1. 1.	7. 17. 54.	7. 13. 6.
	7. 0. 12½.	9. 2. 14.	8. 57. 27.
	8. 0. 16½.	9. 41. 1.	9. 36. 16.
	9 0. 10½.	9. 45 36.	9 40. 51.
	10. 0. 25.	10. 25. 3.	10. 20. 18.

Simili ratiocinio id, quod ex differentia parallaxium Solis et Mercurii in computum trahi potuiſſet, omittendum putaui.

Tab. XVI. Fig. 1. Praeſto nunc erat conſtructio ſchematis quod diſcum Solis cum diurno centri DCV et ſemita ☿ii viſa AIE ſitu erecto exhibet, in qua numeri adſcripti loca ☿ii pro obſeruationum numeris reſpondentibus denotant.

Deprehenſa autem fuit in partibus ſcalae.

Diſtan-

		Diſtantia centri ☿ii a centro ☉lis in diurno centri ☉lis.		Diſtantia centri ☿ii a diurno centri Solis.	
In obſ.	1 - -	98	orientem verſus -	9	boream verſus
	2 - -	$73\frac{1}{2}$	- - - -	$5\frac{1}{2}$	auſtrum verſ.
	3 - -	66	- - - -	8	- - - -
	4 - -	61	- - - -	11	- - - -
	5 - -	21	- - - -	$32\frac{1}{2}$	- - - -
	6 - -	$8\frac{1}{2}$	- - - -	37	- - - -
	7 - -	$94\frac{1}{2}$	occidentem verſus	89	- - - -
	8 - -	130	- - - -	$111\frac{1}{2}$	- - - -
	9 - -	$137\frac{1}{2}$	- - - -	114	- - - -
	10 - -	173	- - - -	$133\frac{1}{2}$	- - - -

Sic quidem loca ☿ii referuntur ad diurnum conſtantem, qui tamen reuera ſitum ſuum reſpectu eclipticae durante tranſitu ☿ii per ſolem mutauit. Cum autem variatio inclinationis diurni ad Eclipticam ab obſeru. 1 vsque ad 10 nondum $3\frac{1}{4}$ minuta prima conficiat, quae vtique in ſchemate ſub ſenſus non cadit; praeterea vero error adhuc minuatur, ſi angulus Eclipticae cum diurno pro tempore coniunctionis centri ☉ et ☿ accipiatur, hunc $= 16°.51\frac{1}{4}'. =$ NCD, quo ecliptica NC orientem verſus ſuper diurno CD boream verſus eleuatur, adhibere placuit.

Ex conſtructo ſchemate innotuit, ang. VDE vel CDI $= 27°.15'.$, quem ſemita ☿ii cum diurno centri Solis format, nec non DC, diſtantia verticis huius anguli D a centro diſci C $=$ 84. part. ſcalae. Hinc, exiſtente ad N nodo ☿ii deſcendente, in △lo NCD inuenire licuit *angulum eclipticae cum ſemita ☿ii viſa* CND

CND = CDI − NCD = $10^\circ.23\frac{3}{4}$, et NC *diſtantiam nodi a centro diſci* = 213, 15 part. ſcalae vel = $12'.46''$. circuli maximi. Angulum CND ponunt Tabulae Halleianae = $10^\circ.24'.16''$. Caſſinianae = $10^\circ.23'.44''$; NC vero Halleianae = $12'.58''\frac{4}{5}$.

E centro diſci C ad eclipticam NC excitata ſit perpendicularis CI, quae locum centri ☿ii in I, tempore coniunctionis centrorum ☉ et ☿ reſpectu eclipticae monſtrat, et latitudinem ☿ii auſtralem in ☌ deſignat. Erit ergo in △lo DCI, ang. DCI (= complemento ipſius NCD ad rectum) = $73^\circ.8'\frac{3}{4}$; et inde (ob CDI = $27^\circ.15'$.) DIC = $79^\circ\ 36'\frac{1}{4}$. Quapropter ex data DC dabitur *latitudo auſtr.* ☿ *in* ☌ nempe CI = 39, 13. part. ſcalae, vel = $2'.20''\frac{1}{2}$ circuli maximi. Hanc Tabulae Halleianae = $2'.22''\frac{3}{4}$, Caſſinianae tantum = $0'.59''$. aſſignant.

Ex C in ſemitam ☿ii viſam NE demiſſa ſit perpendicularis CM, vt CM ſit *diſtantia minima centrorum*, et in M locus ☿ii in momento minimae centrorum diſtantiae. In △lo CMI ad M rectangulo ex datis DIC, vel MIC, et IC, dabitur CM = 38,461. part. ſcalae, vel = $2'.18''\frac{1}{5}$ circ. maximi; et IM = 7,0561. part. ſcalae. Diſtantiam centrorum minimam faciunt Tabulae Halleianae = $2'.20''\frac{13}{20}$, Caſſinianae = $0'.57''\frac{9}{10}$.

Pro inueniendo motu horario ☿ii in ſemita viſa, ex conſtructo ſchemate diſtantiam cepi locorum ☿ii in obſ. 1 et 10 = 305. part ſcalae, cui interuallum temporis = $4^b.34'.10''$. reſpondet. Inde acquiritur motus horarius = $66\frac{3}{4}$ part. ſcalae vel = $3'.59''\frac{3}{4}$ circuli

culi maximi, quo cum Tabulae Caſſini et Halleii optime conſentiunt. Scala ſic parata fuit, cuius ope in partibus temporis diſtantiam ſingulorum ☿ii locorum a loco eius I in ☌ explorare, et, facta comparatione cum momentis obſeruationum, *tempus coniunctionis* detegere licuit, vt Tabula docet.

		Diſtantia loci ☌ ☿ ☉ in tempore a loco ☿ in		Momentum ☌ centrorum ☿ et ☉ in Ecliptica tempore vero
Obſeruat.	1	$1^h.27'.30''$	orientem verſus	$7^h.13'.38''$.
	2	1. 2. 15		10. 29
	3	0. 56. 15		12. 8
	4	0. 50. 20		12. 39
	5	0. 10. 0		14. 12
	6	0. 2. 0	occid. verſus	11. 6
	7	1. 45. 0		12. 27
	8	2. 23. 45		12. 31
	9	2. 30. 30		10. 21
	10	3. 7. 0		13. 18
			Medium	$7^h.12'.17''$.

Tabulae Caſſini tempus ☌ verum ponunt Pariſiis $= 2^h.35'.22''$. quod Lipſiae erit $= 3^h.15'.22''$, vnde emergit inſignis differentia inter calculum et obſeruationem $= 3^h.56'.55''$. enormis autem prodit diſcrepantia, ſi calculum ſecundum Tabulas de la Hire cum obſeruatione compares. Iſte ſcilicet Lipſiae Tempus ☌ circiter ponit die 5 Maii poſt merid. $11^h.30'$, quod $7^h.42'$. tempus ☌ ex obſeruatione praecedit.

Si ope horarii recta IM ſupra inuenta conuertatur in tempus, habetur tempus per IM $= 6'. 20''$; et inde *Momentum minimae centrorum diſtantiae* $= 7^h. 5'. 57''$. Lipſiae tempore vero.

Tabulae Caſſinianae iſtud aſſignant, ſub Meridiano Pariſienſi $= 2^h. 32' 44''$. temp. vero, Halleianae autem ſub Merid. Grenouicenſi $= 6^h. 47'. 12''$. temp. vero, quod Lipſiae erit $= 7^h. 36'. 32''$. ita vt calculum ex Tab. Halleii obſeruatio anticipauerit $0^h. 30'. 35''$.

Tabulae igitur Halleianae nouo exemplo praeſtantiam ſuam in motibus ☿ii praedicendis commendant, excepto tempore, in quo limae adhuc ſunt ſubiiciendae. Mirum autem non eſt, tantas Tabularum aberrationes hic locum habere, cum iis vnica tantum obſeruatione Tranſitus ☿ii circa nodum deſcendentem, ea ſcilicet *Heuelii* an. 1661, vti licuerit. Caeterum notandum, calculos ſecundum Tabulas *Caſſini* et *Halleii*, ad quos prouocaui, peractos eſſe a Cel. *Baermanno*, Mathem. Prof. Wittenbergenſi; et quidem pro obſeruatore in centro telluris poſito.

Tandem ex ſupra inuenta CM, et radio diſci CA in △lo ACM ad M rectangulo, rectam AM et ope horarii ſemimoram tranſitus $= 3^h. 56'. 8''$. definire licuit, quam Tabulae Halleianae $= 3^h. 56'. 19''$. Caſſinianae $= 3^h. 58'. 4''$. pronunciant. Hoc modo ex deducto diſtantiae centrorum minimae momento colligitur Egreſſus centri ☿ii Lipſiae tempore vero $11^h. 2'. 5''$.

Peruenerunt ad manus nonnullae huius Tranſitus ☿ii obſeruationes aliis in locis factae, quas tranſcribere expediet. Scilicet Temp.

	Temp. vero		
Londini	10^{h}. 11′. 52″.	Exitus centri.	Obſeruator Bird.
Neapoli	11. 5. 51.	Contactus interior - - -	Cartani
	— 9. 5.	- - - exterior	
	11. 7. 28.	Exitus centri	
Laxenburgi	11. 16. —	Exitus centri - - - -	Franz.
Bononiae	10. 54. 41.	Contactus interior	tub. 8. ped.
	— 57. 23.	- - - exterior	
	10. 56. 2.	Exitus centri	
	10. 54. 45.	Contactus interior	tub. 11. ped.
	— 57. 23.	- - - exterior	
	10. 56. 4.	Exitus centri	
Wratislauiae	11. 26. 0.	Contactus interior	
	— 28. 30.	- - - exterior	
	11. 27. 15.	Exitus centri	
Göttingae	6. 56. 20.	Diſtant. minima centror. = 2′. 27″.	
	7. 3. 20.	Coniunct. in long. cum lat. = 2′. 30″.	

Facta comparatione cum reſpondentibus momentis ex meis deductionibus inuenitur Meridianorum differentia Lipſienſis et

		reſpectu Lipſiae
Londin.	= 0^{h}. 50′. 13″.	occidental.
Ne pol.	= 0. 5. 23.	oriental.
Laxenb.	= 0 13. 55.	orient.
Bonon.	= 0. 6. 2.	occid.
Wratislav.	= 0. 25. 10.	orient.
Götting.	= 0. 8. 57.	occid.

Additamentum ad praecedentem diſſertationem

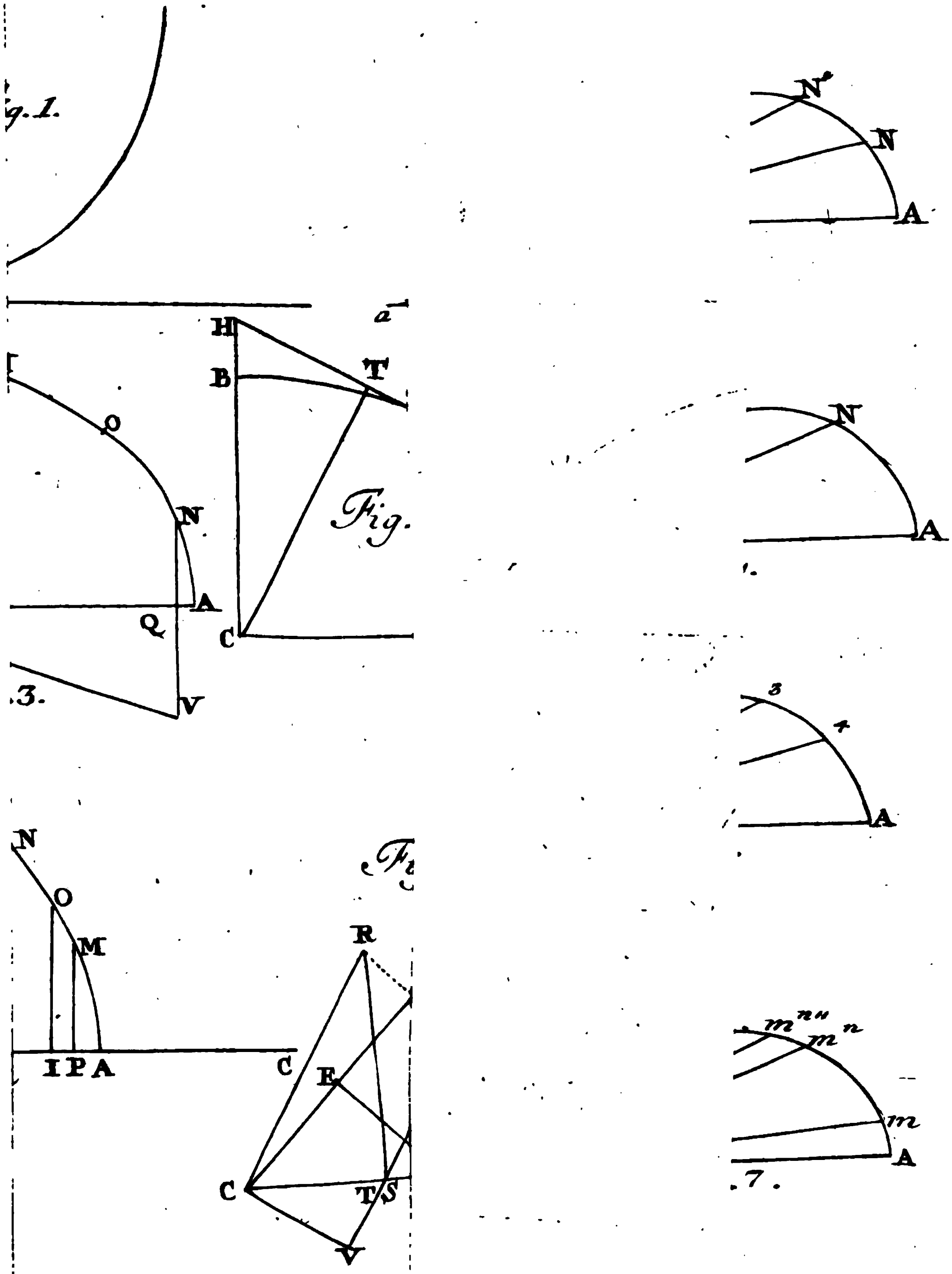
A. N. GRISCHOVII.

Egreſſus Centri ☿ii Pariſiis obſ. 10h. 20′. 7″ temp. ver.
Egreſſus Lipſiae ex obſeruat.
Cl. Heinſii ſupput. - - 11. 2. 5

diff. = 0h. 41′. 58″
Propter Parall. add. - - - 14

Differ. Mer. inter Par et Lipſ. = 0h. 42′. 12″
Eorundem Meridianor. differ. ex aliis accuratioribus obſervationibus deducta, et Calend. Aſtron. Berol. inſerta - - = 0h. 38′. 56″

error = 0h. 3′. 16″. = 49′ Aequatoris.


Co
ig. 1.
a
H
B
T
O
N
A
Q
C
V
.3.
Fig.
N
N
A
N
A
3
4
A
N
O
M
I P A
C
R
E
C
T S
V
m nu
m n
m
A
.7.

Additamentum ad praecedentem diſſertationem

A. N. GRISCHOVII.

Egreſſus Centri ☿ii Pariſiis obſ. $10^{b}. 20'. 7''$ temp. ver.
Egreſſus Lipſiae ex obſeruat.
Cl. Heinſii ſupput. - - $11. 2. 5$

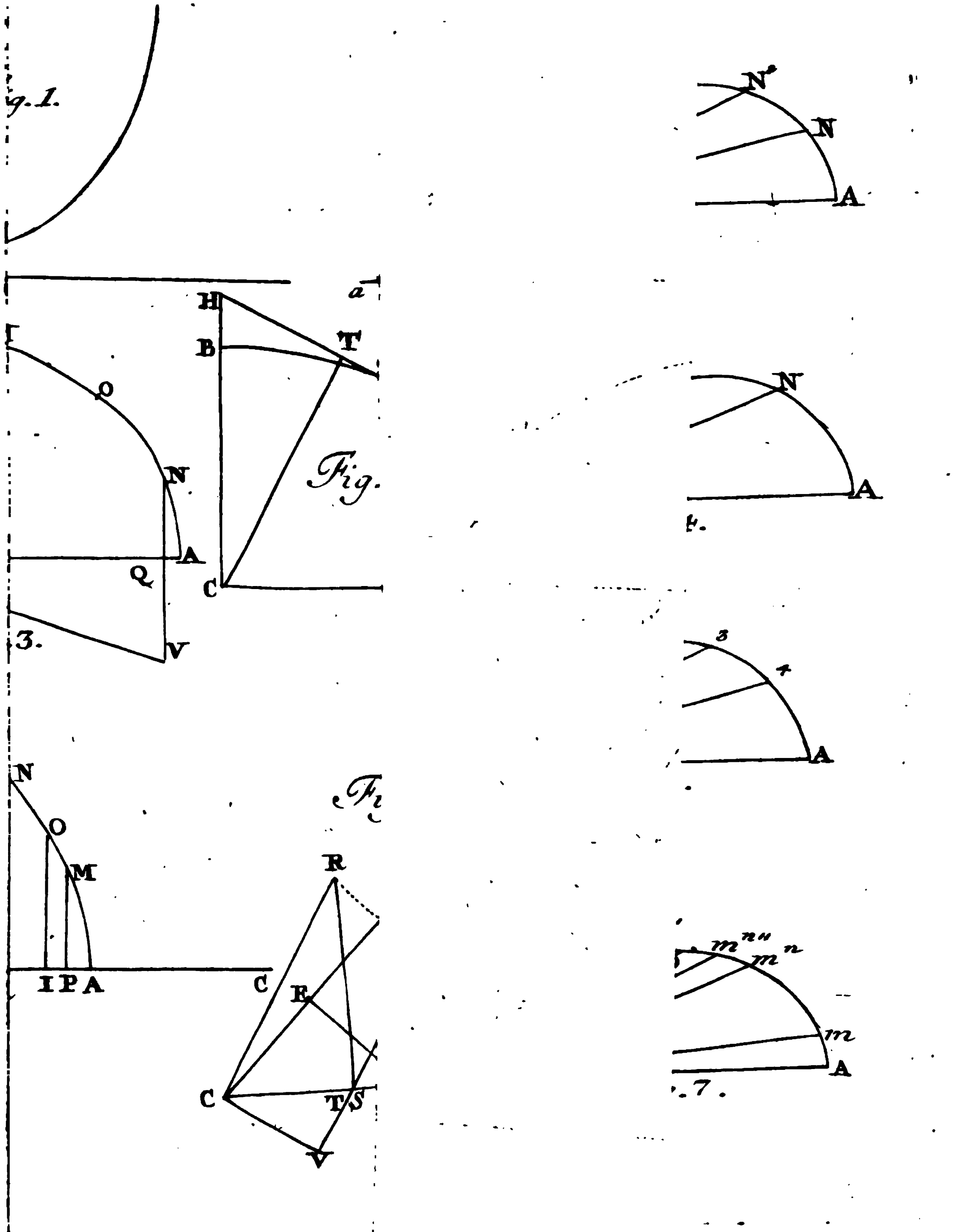
diff. = $0^{b}. 41'. 58''$
Propter Parall. add. - - - 14

Differ. Mer. inter Par et Lipſ. = $0^{b}. 42'. 12''$
Eorundem Meridianor. differ. ex aliis accuratioribus obſervationibus deducta, et Calend. Aſtron. Berol. inſerta - - = $0^{b}. 38'. 56''$

error = $0^{b}. 3'. 16''. = 49'$ Aequatoris.

Tab. II.

Co



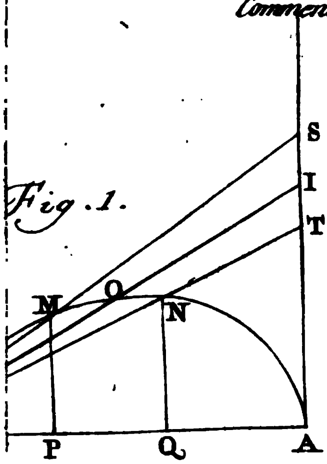


Fig. 1.

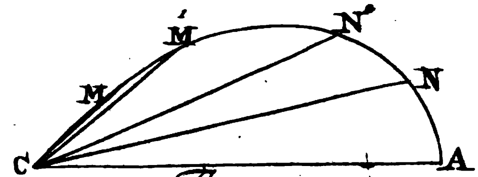


Fig. 2.

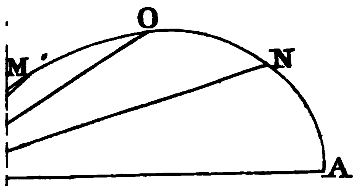


Fig. 3.

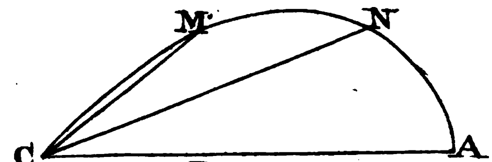
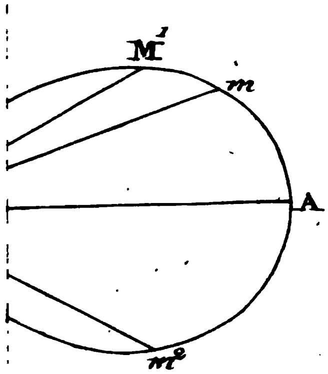


Fig. 4.



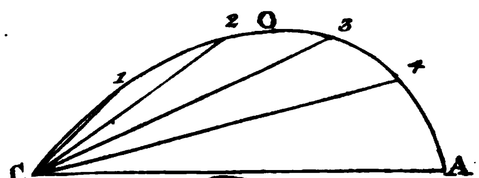


Fig. 6.

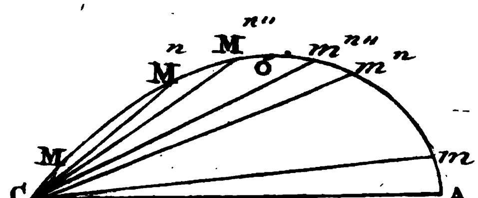
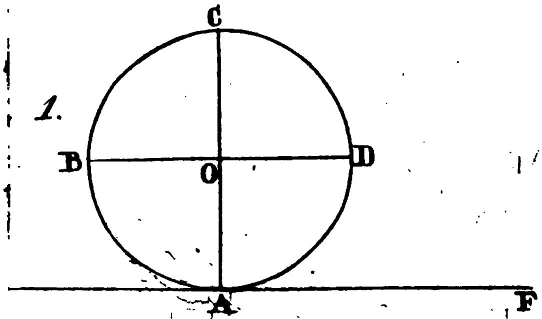


Fig. 7.



1.

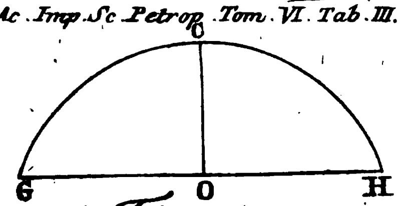


Fig. 2.

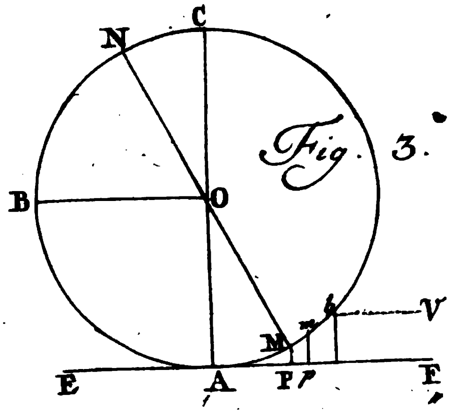


Fig. 3.

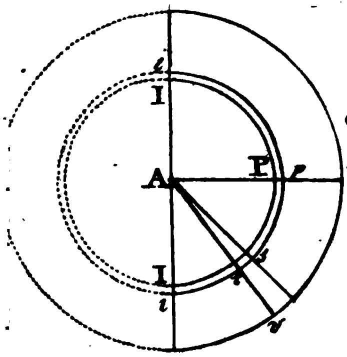
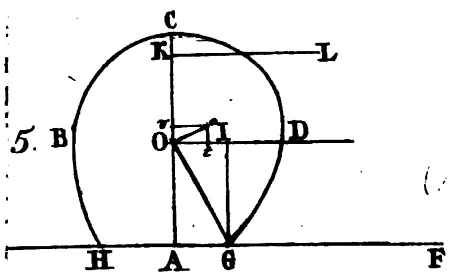


Fig. 4



5.

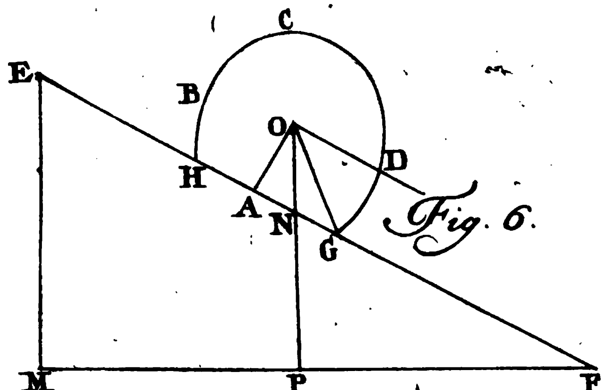


Fig. 6.

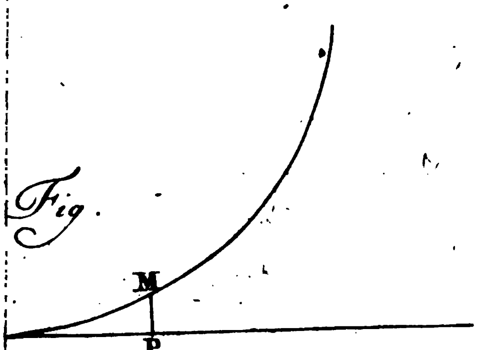


Fig.

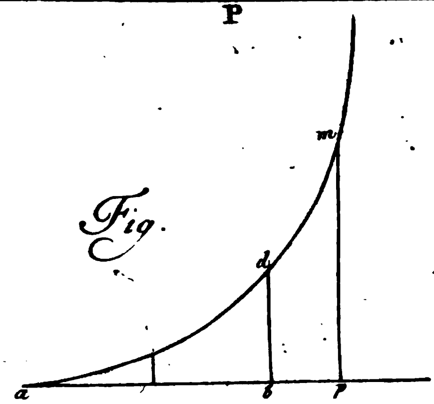


Fig.

Fig: 1. Fig: 3.

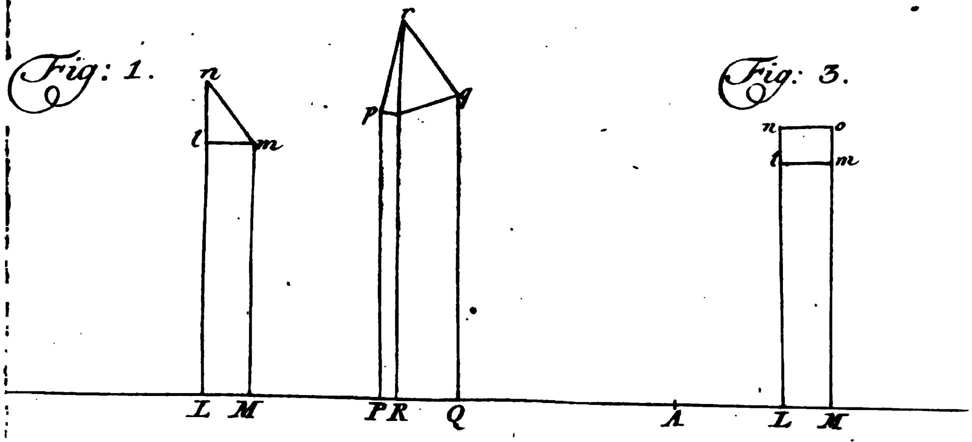
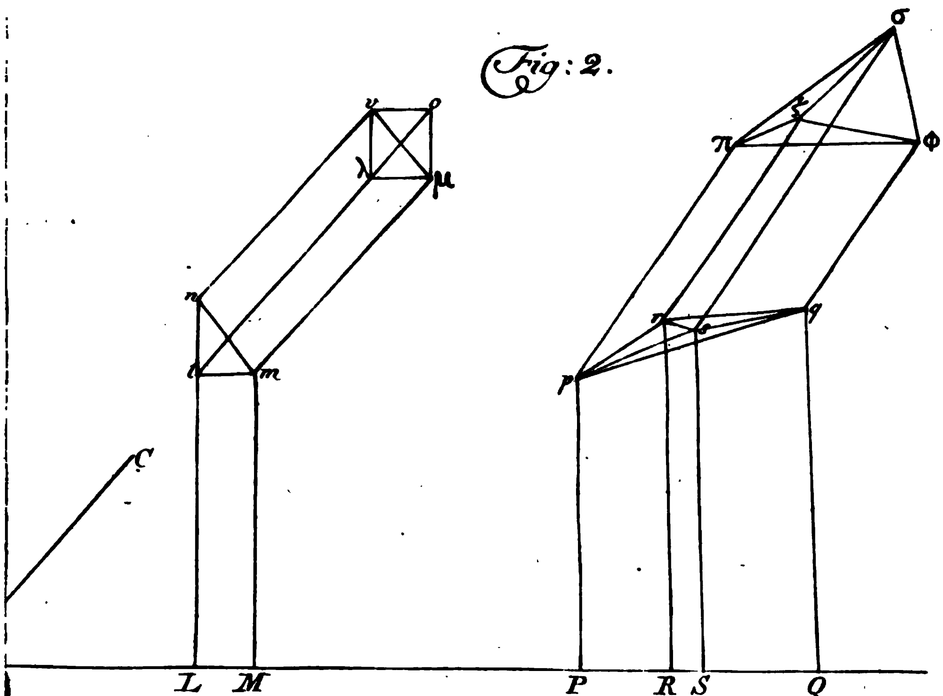
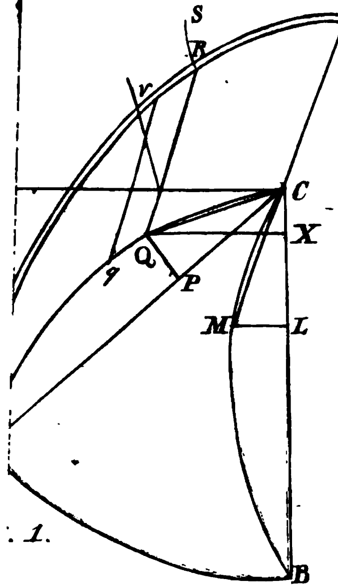


Fig: 2.




S
R
A
v
C
X
Q
q
P
M
L
B

. 1.

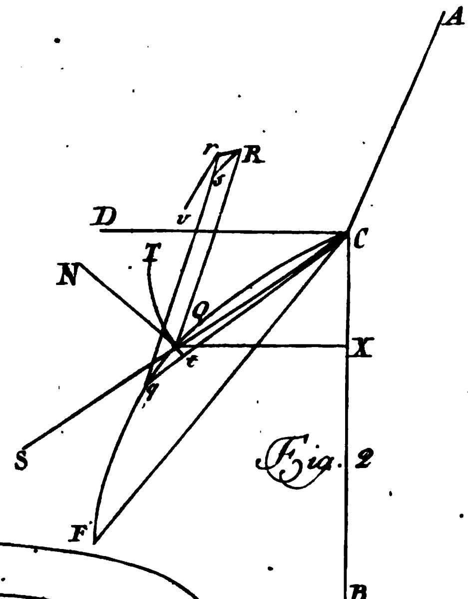
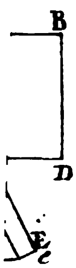

A
r
R
s
D
v
C
T
N
Q
X
t
q
S
F
B

Fig. 2


B
D
E
e

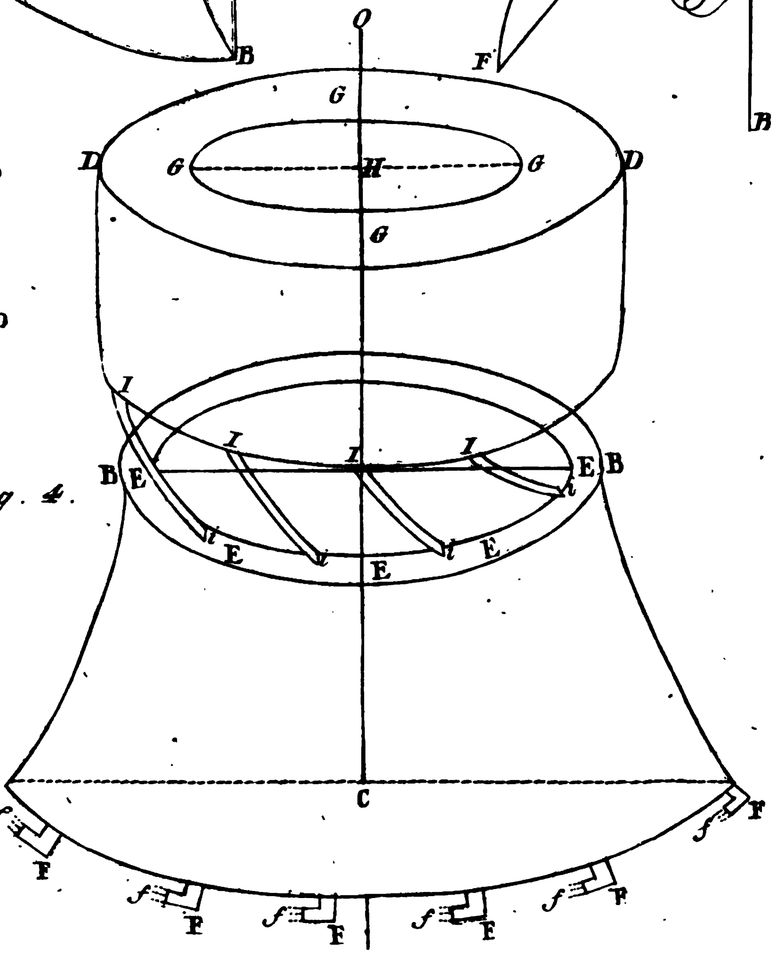

O
G
D
G
H
G
D
G
I
I
I
I
B
E
E
B
i
i
i
i
E
E
E
F
C
F
f
F
f
F
f
F
f
F
f
F
f
F

Fig. 4.

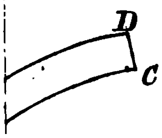


Fig. 1.

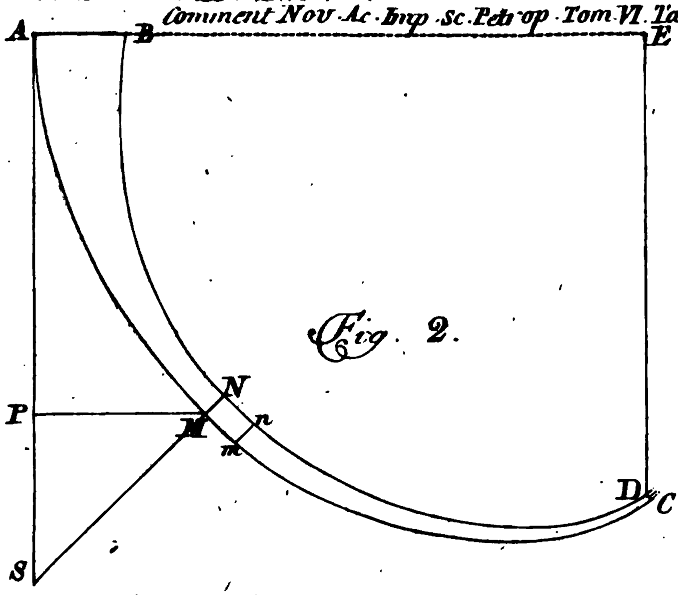


Fig. 2.

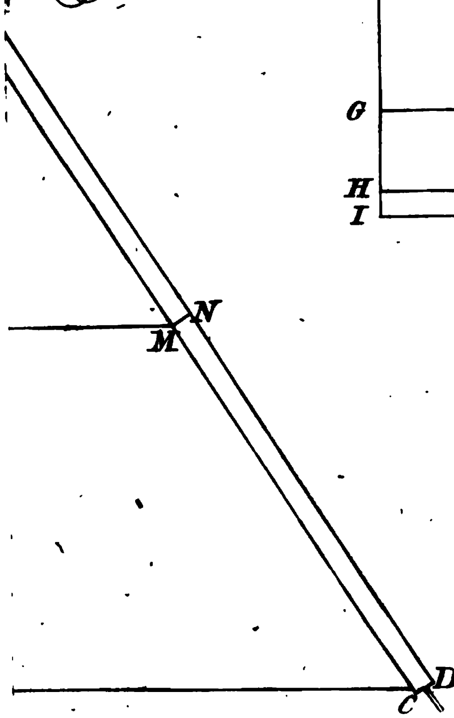


Fig. 3.

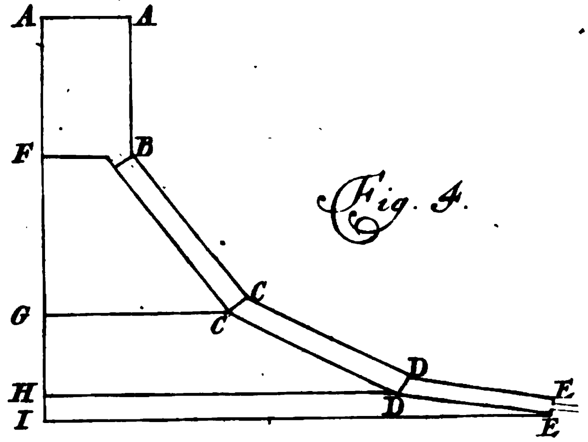


Fig. 4.

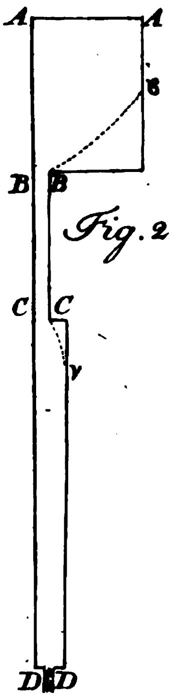


Fig. 2.

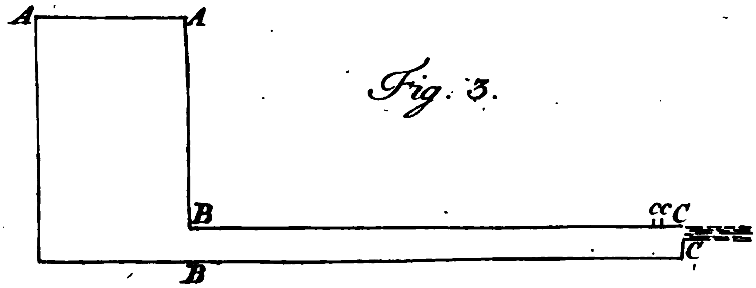


Fig. 3.

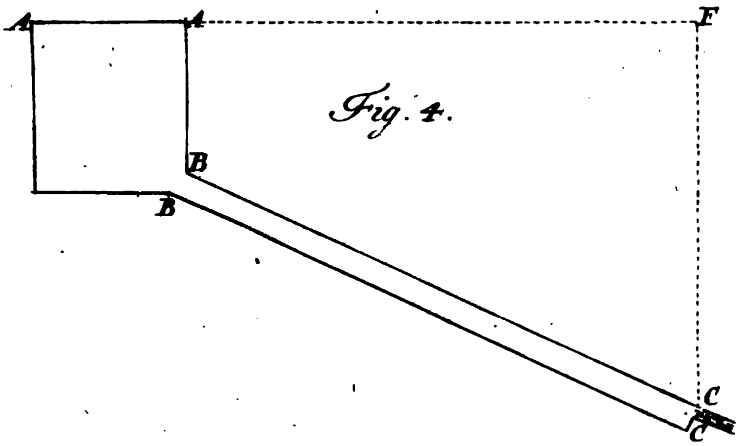


Fig. 4.

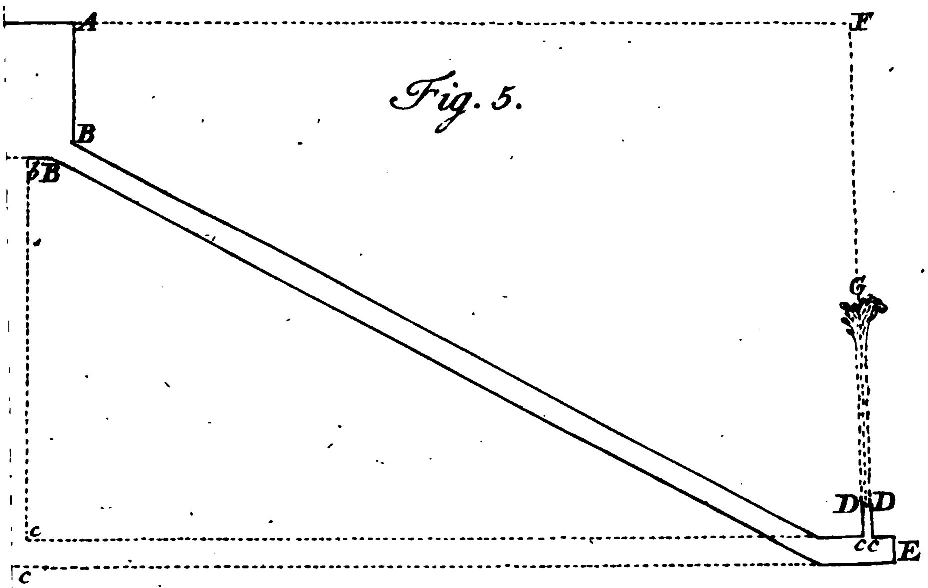
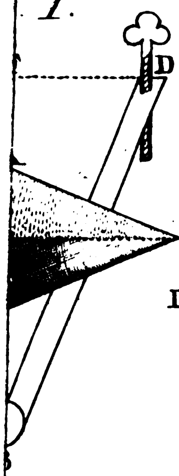


Fig. 5.



1.

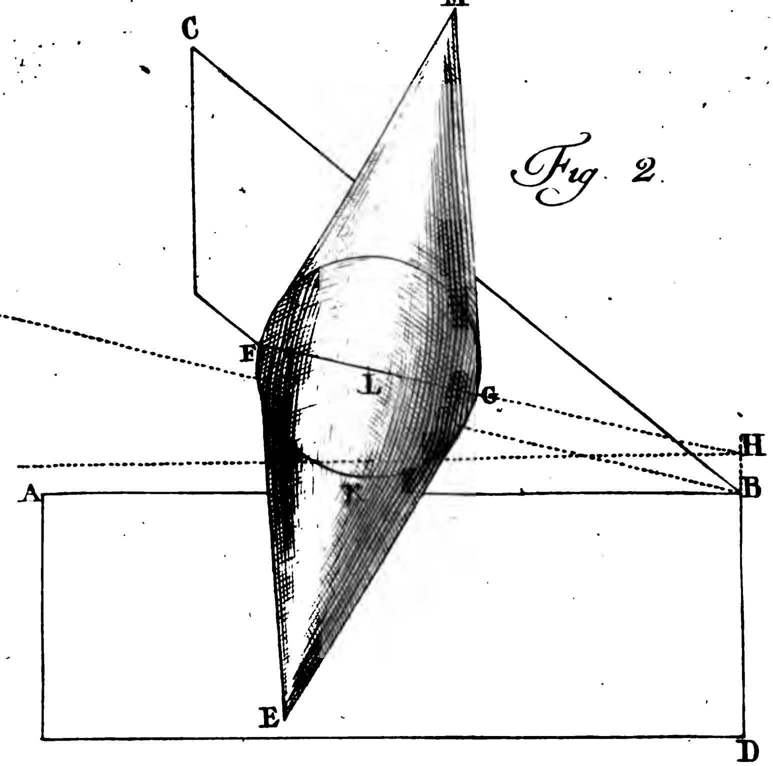


Fig. 2.

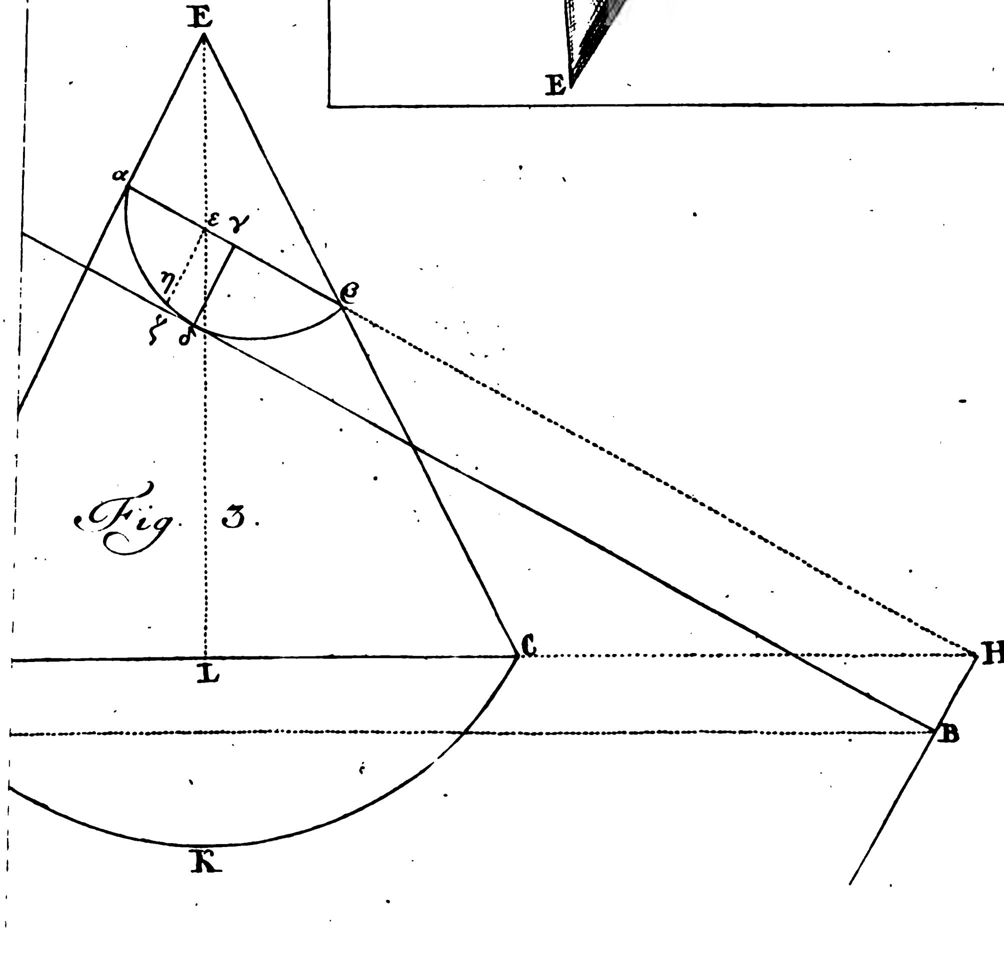


Fig. 3.

Fig. 1.

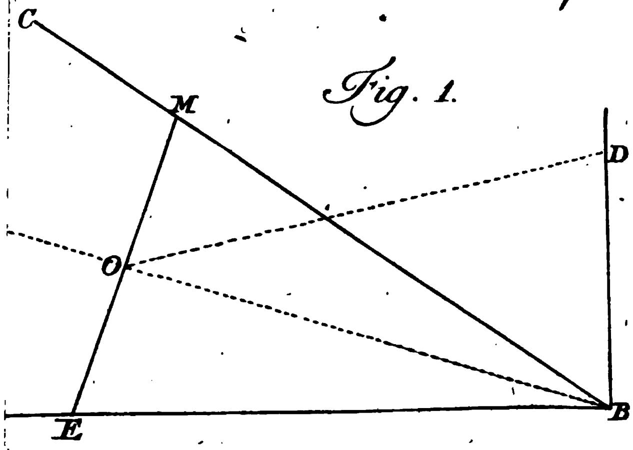


Fig. 3.

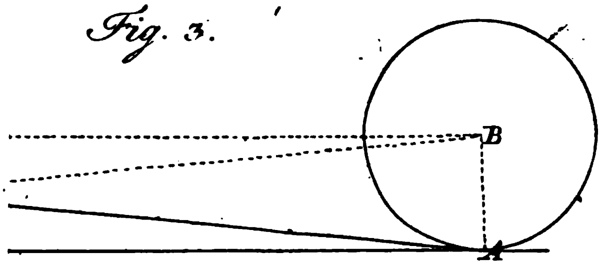
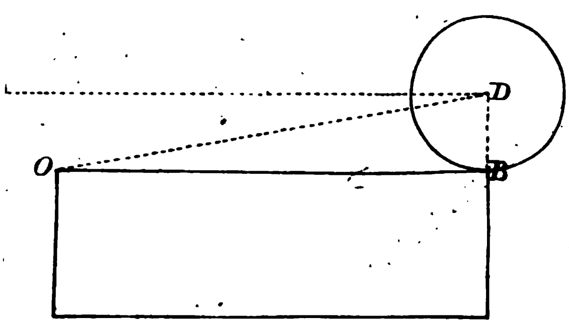


Fig. 2.



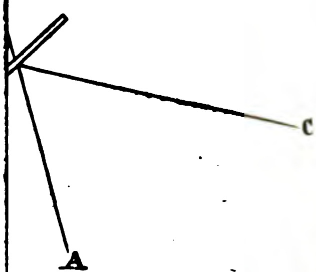




Fig. 1.

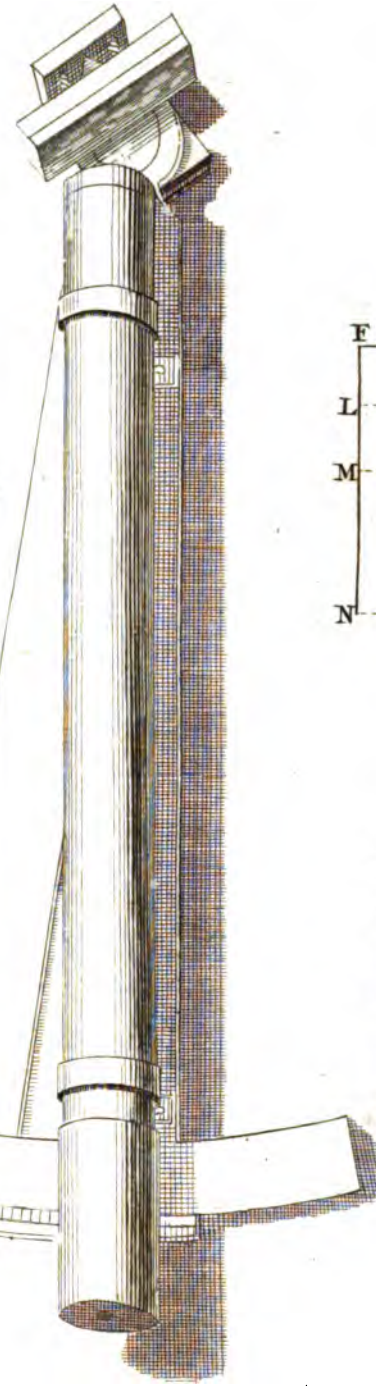


Fig. 3.

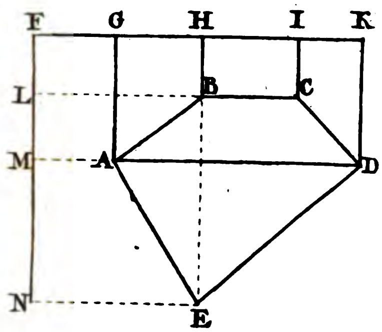
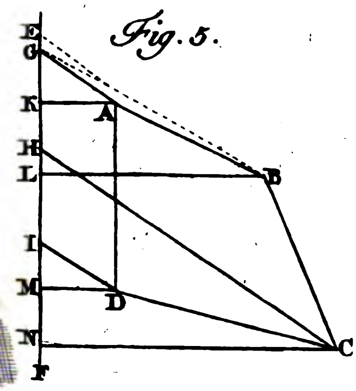
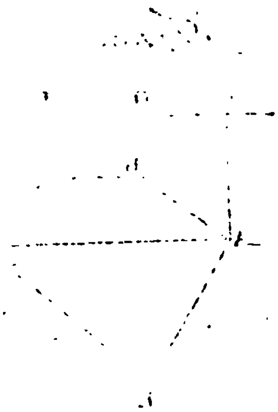


Fig. 5.





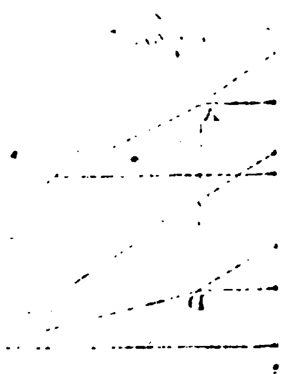


Fig. 1.




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
4.

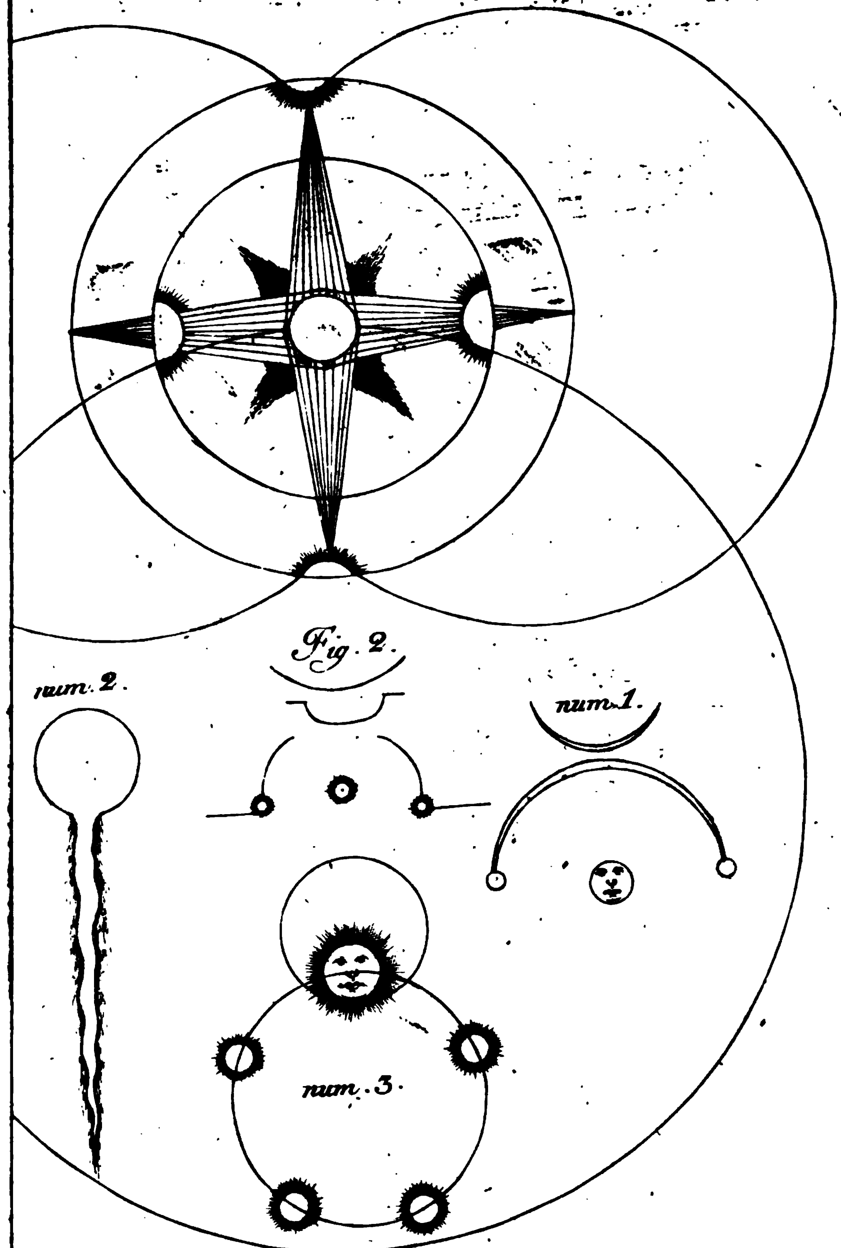
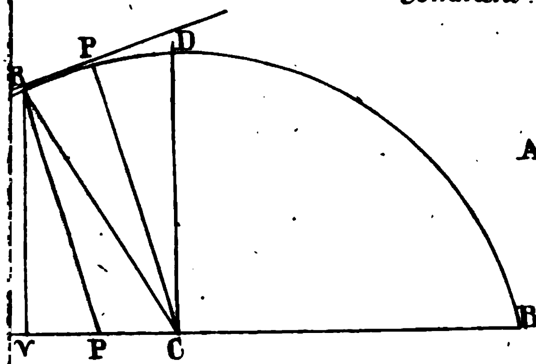


Fig 3.



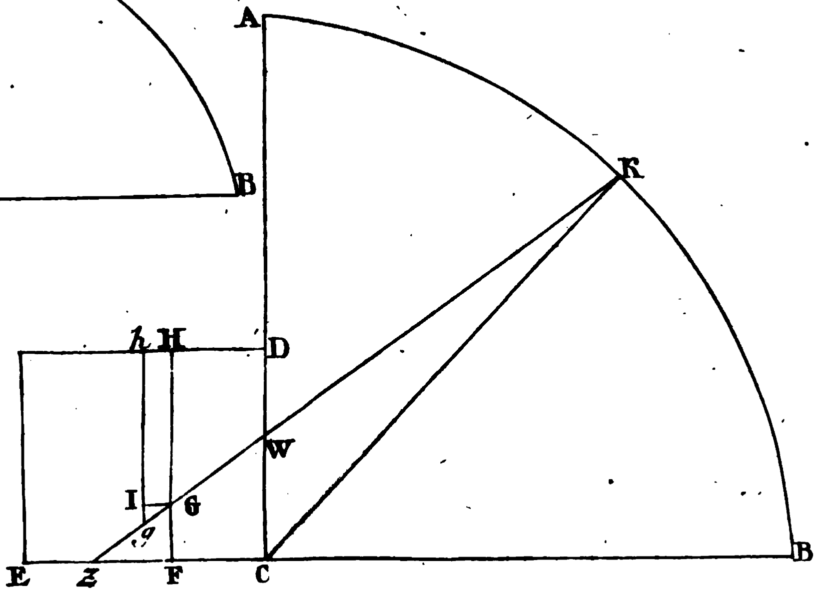


Fig. 2

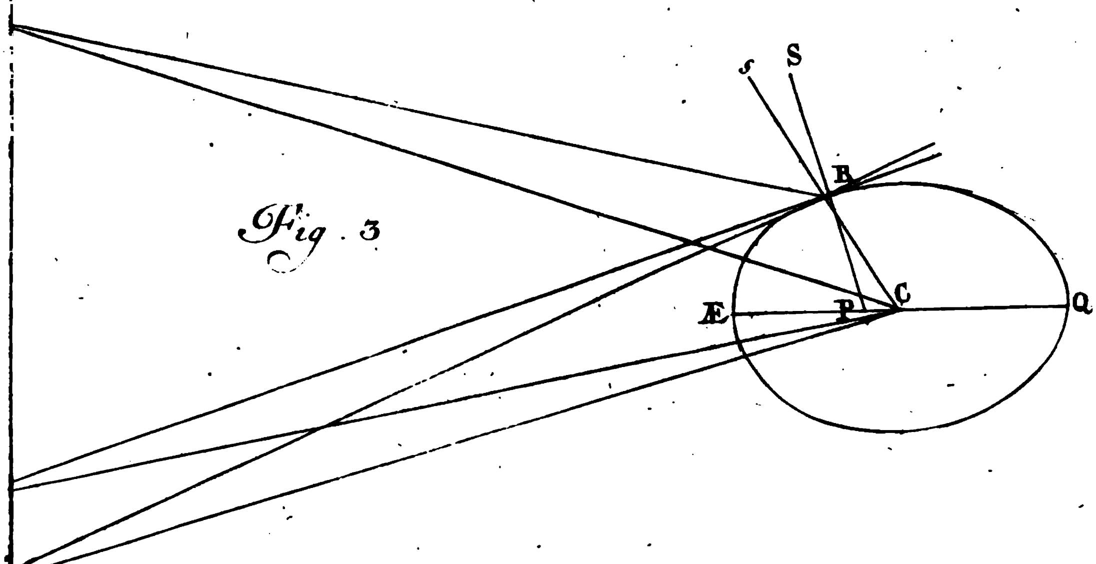
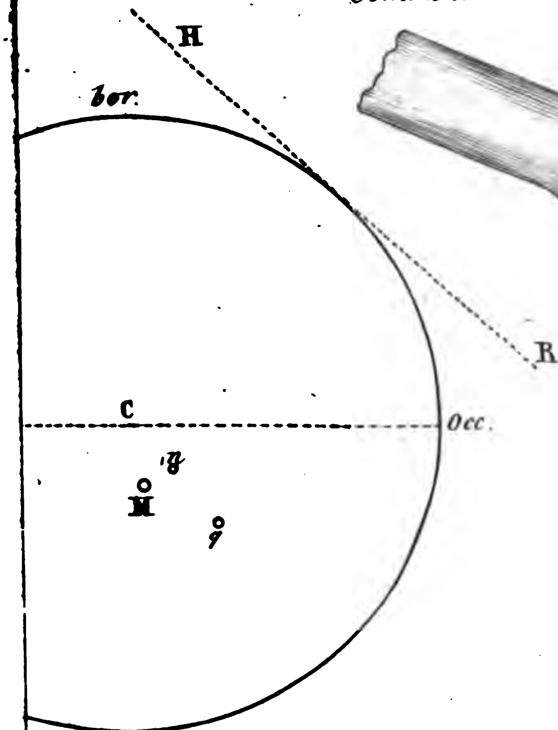


Fig. 3



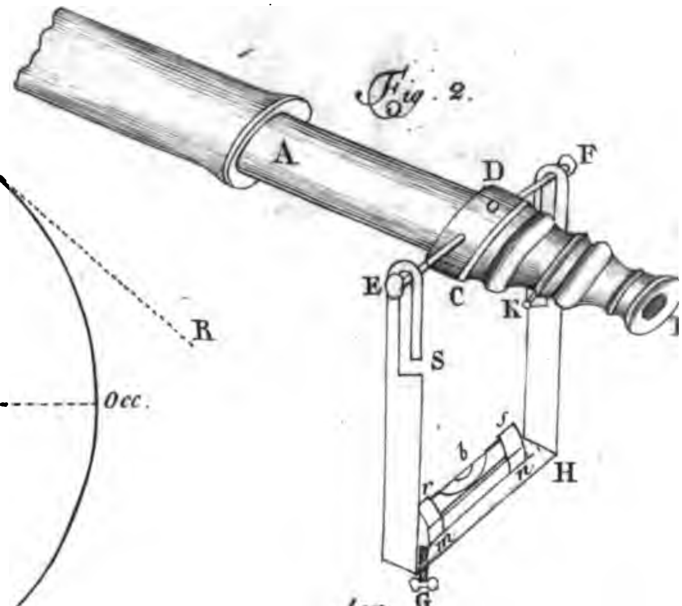


Fig. 2.

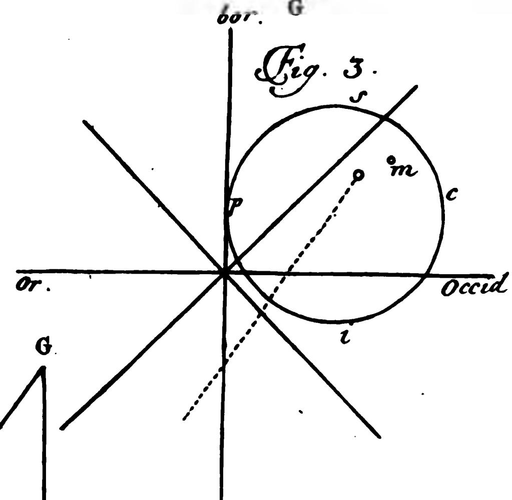


Fig. 3.

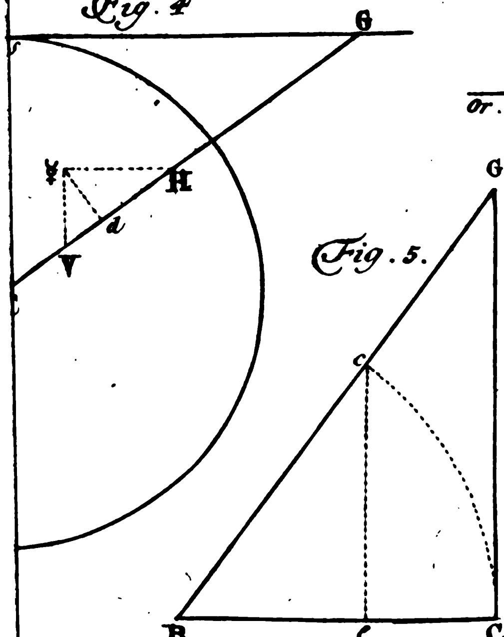
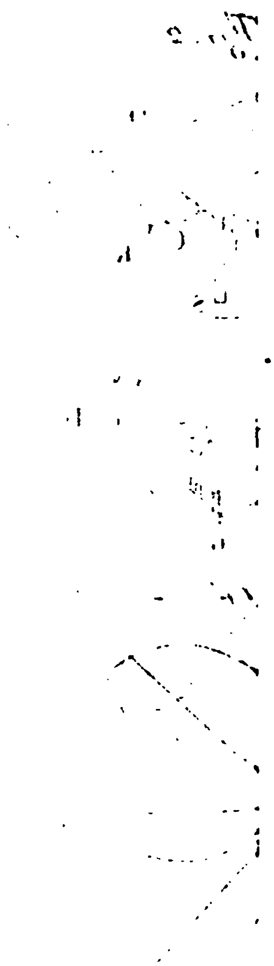
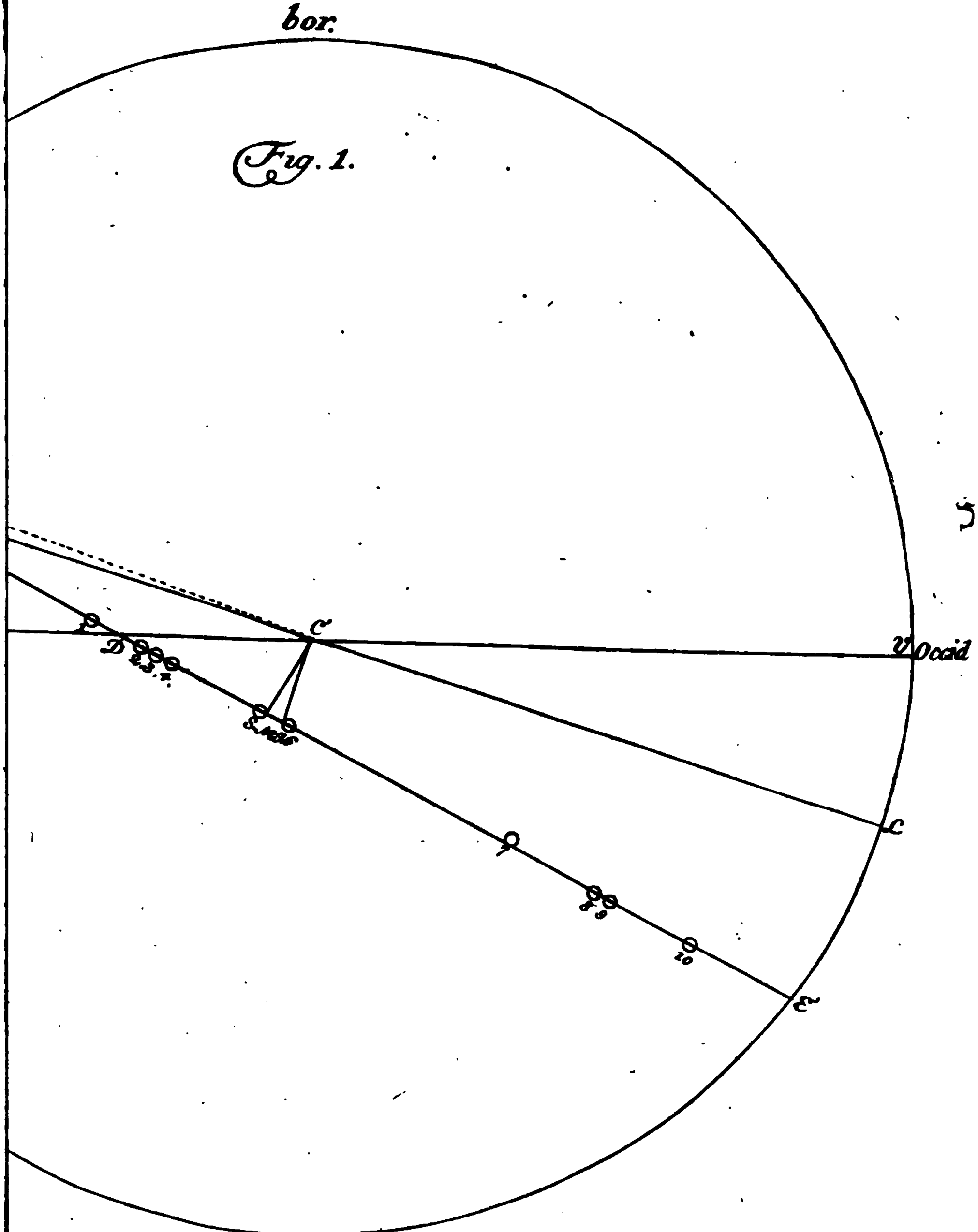


Fig. 4.

Fig. 5.




bor.
Fig. 1.
C
D
V Occid
c
7
8 9
10

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

3 2044 092 615 327